

立方体と分割合同な三角錐の構成について

小森 洋平・利根川真隆・雪田 友成

1. 序文

「三角形の面積は、底辺と高さが等しい長方形の面積の $\frac{1}{2}$ 倍である。」という事実は、直感的にも明らかである。与えられた三角形に図1のような変形を行い、長方形に変形する。三角形の底辺の長さを a 、高さを h としたとき、変形後の長方形は高さが $\frac{1}{2}h$ になっているので、三角形の面積 S は $S = a \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}ah$ となることが視覚的にも理解できる。

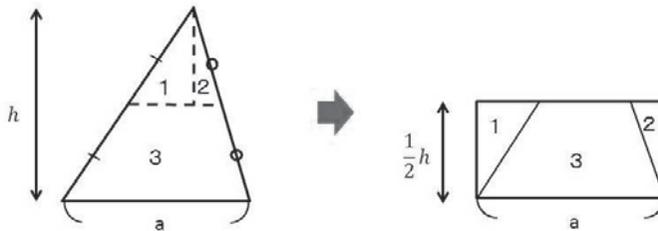


図 1. 三角形と長方形の面積の関係

しかし「三角錐の体積は、底面積と高さが等しい三角柱の体積の $\frac{1}{3}$ 倍である。」という事実に疑問を感じた人は多いのではないだろうか。この事実の厳密な証明には、微積分の知識を用いる。だが先の証明を踏襲し、与えられた三角錐を底面が合同で、高さが $\frac{1}{3}$ 倍になっている三角柱に切り張りによって変形できれば、三角錐と三角柱の体積の関係に納得できるであろう。

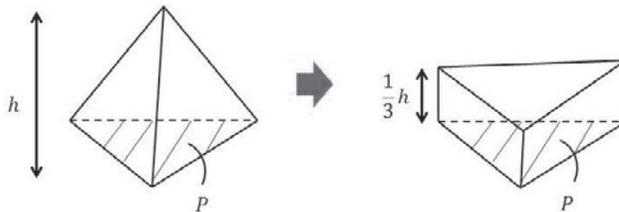


図 2. 理想的な三角柱への変形

しかし残念ながらこのアイディアは、Dehn が 1901 年に示した Hilbert の第 3 問題の否定的解決により、一般の三角錐に適用できない。だがこれまでの研究により、三角錐を巧みな分割により三角柱へと変形できる例が発見されている。本論文では Boltianskii の Hilbert's Third Problem に従い、Hill によって発見された例を詳しく説明していく。

2. 分割合同について

前章で三角形や三角錐を「変形する」という表現を用いたが、正確には以下に説明する「分割合同」という概念を用いて図形の変形を定義する。今回は主題である多面体の分割合同のみ定義するが、多角形の場合も同様に定義される。

定義 2.1. (平面) $H \subset \mathbb{R}^3$ が、ある $a \in \mathbb{R}^3$ と $c \in \mathbb{R}$ が存在し $H = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x|a) = c\}$ を満たすとき、 H は \mathbb{R}^3 の平面であるという。ただし $(x|a)$ はベクトル x と a の内積を表す。

定義 2.2. (多面体) $P \subset \mathbb{R}^3$ が、有限個の平面によりかこまれる、内点をもつ集合であるとき、 P を \mathbb{R}^3 の多面体と呼ぶ。

定義 2.3. (多面体の和) 多面体 P, Q が共通の内点を持たないとき、 $P \cup Q$ を $P + Q$ と書き、 P と Q の和と呼ぶ。

注意 2.1. \mathbb{R}^3 の等長写像の集合は、写像の合成によって等長変換群 $E(3)$ をなす。 $v \in \mathbb{R}^3$ に対し、 $t_v(x) := x + v$ は、平行移動を表す。任意の $f \in E(3)$ は、平行移動と直行行列によって $f(x) = Ax + v$ と一意的にあらわされる ($v \in \mathbb{R}^3, A \in O(3)$)。

ここで、平面 H の平行移動と直行行列による像を考える。

$$\begin{aligned} A(H) &= \{Ax \in \mathbb{R}^3 | (x|a) = c\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 | (A^{-1}x|a) = c\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 | (x|Aa) = c\}, \\ t_v(H) &= \{x + v | (x|a) = c\} = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x|a) = c'\}. \end{aligned}$$

(ただし、 $c' \in \mathbb{R}$ は、 $(x + v|a) = (x|a) + (v|a) = c + (v|a) =: c'$ を満たす定数とする。)

以上より、 $A(H), t_v(H)$ のどちらも平面である。よって多面体の等長写像による像は多面体であることがわかる。

定義 2.4. (分割合同) 2つの多面体 P, Q が、有限個の互いに合同な多面体に分割できるとき、 P と Q は分割合同であるという。多面体 P, Q が分割合同であるとき、 $P \sim Q$ と記す。より厳密に言うと、 P と Q が分割合同であるとは、多面体 $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k$ と等長写像 f_1, \dots, f_k が存在し、 $P = P_1 + \dots + P_k, Q = Q_1 + \dots + Q_k$ かつ $f_i(P_i) = Q_i (1 \leq i \leq k)$ を満たすことである。

例 2.1. 下の斜角柱 K と直角柱 K' は分割合同である。(図 3 参照)

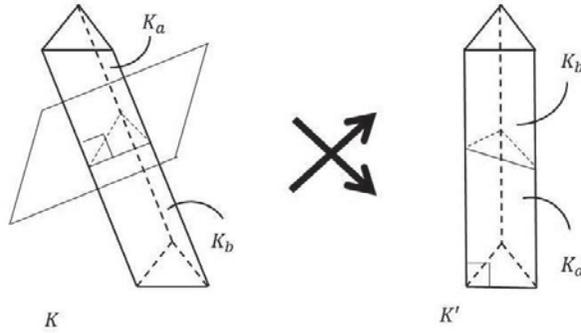


図 3. 分割合同の例

次の補題は、分割合同の定義から容易に示される。

補題 2.1. 多面体 P と Q は、多面体 $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k$ が存在し、 $P = P_1 + \dots + P_k, Q = Q_1 + \dots + Q_k$ かつ $P_i \sim Q_i (1 \leq i \leq k)$ ならば、 $P \sim Q$ である。

次に、分割合同の議論をする際に便利な補題を用意する。

補題 2.2. 分割合同は \mathbb{R}^3 上の多面体の集合に、同値関係を定める。
(特に、分割合同は推移律を満たす。)

証明. 反射律、対称律に関しては明らかである。

推移律を満たすことを示したいので、多面体 A, B, C に対し $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$ を示す。

A と B, B と C はそれぞれ分割合同であるので、多面体 $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k, B'_1, \dots, B'_l, C_1, \dots, C_l$ と、等長写像 $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l$ が存在し、 $A = A_1 + \dots + A_k, B = B_1 + \dots + B_k = B'_1 + \dots + B'_l, C = C_1 + \dots + C_l$ かつ $A_i = f_i(B_i), C_j = g_j(B'_j) (1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l)$ が成立する。

$F_{ij} = B_i \cap B'_j$ とする。(ただし F_{ij} は空も許す。) このとき各 F_{ij} は共通の内点を持たない。なぜなら $i \neq i^*$ ならば、 $F_{ij} \in B_i, F_{i^*j} \in B_{i^*}$ であり、 B_i と B_{i^*} は共通の内点を持たないからである。また、 $\cup_{j=1}^l F_{ij} = \cup_{j=1}^l (B_i \cap B'_j) = B_i \cap (\cup_{j=1}^l B'_j) = B_i \cap B = B_i$ である。

よって $A = \cup_{i=1}^k A_i = \cup_{i=1}^k f_i(B_i) = \cup_{i=1}^k f_i(\cup_{j=1}^l F_{ij}) = \cup_{i=1}^k \cup_{j=1}^l f_i(F_{ij})$ であることがわかる。同様に $C = \cup_{i=1}^k \cup_{j=1}^l g_j(F_{ij})$ である。

ここで $f_i(F_{ij}) \cong g_j(F_{ij})$ である。なぜなら左辺は $g_j \circ f_i^{-1}$ という等長写像で右辺に移りあうからである。以上より $A \sim C$ がわかる。□

注意 2.2. 分割合同は、 \mathbb{R}^2 上の多角形の集合にも同値関係を定める。

さらに補題を一つ用意する。

補題 2.3. 任意の三角形 P に対し、縦の長さが 1 の長方形 R が存在し、 $P \sim R$ 。

証明. 次の 5 つの操作を行う。

- 1, 三角形 P を、平行四辺形に変形する。(図 4 参照)

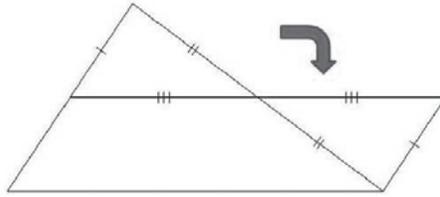


図 4

- 2, 平行四辺形を、長方形に変形する。(図 5 参照)

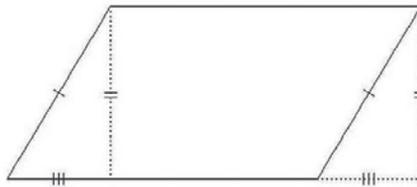


図 5

- 3, 必要ならば、縦の辺を等分割して横に並べる操作を繰り返し、
1 辺の長さが 1 より大きい長方形に変形する。(図 6 参照)

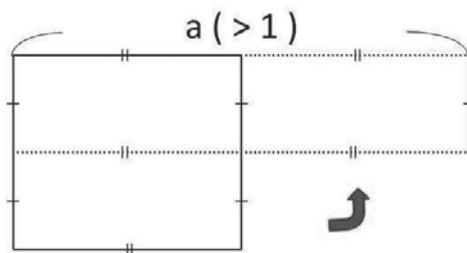


図 6

4, 長方形を、高さが1の平行四辺形に変形する。(図7参照)

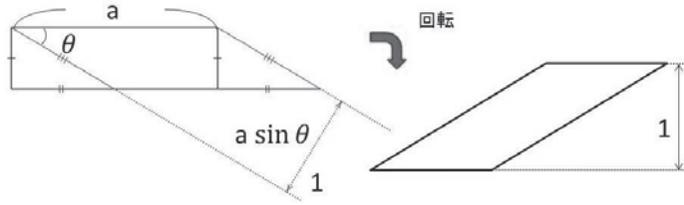


図 7

5, 平行四辺形を、長方形 R に変形する。(図8参照)

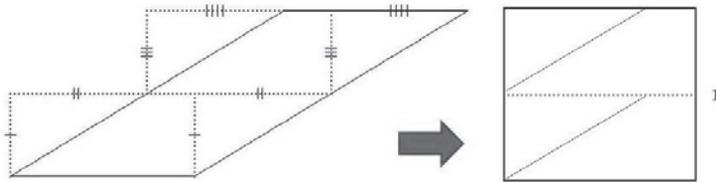


図 8

□

注意 2.3. $m(P)$ を多角形 P の面積とすると、得られた長方形 R の横の長さは、 $m(P)$ である。

以上の用意をもとに、次の命題を示す。

命題 2.1. 任意の直角柱 K は、ある立方体 C と分割合同である。

証明. 直角柱 K は底面が P 、高さが h であるとする。

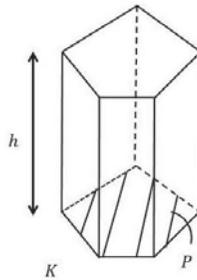


図 9. 直角柱 K

底面 P を三角形分割し、 $P = P_1 + \dots + P_k$ とする。補題 2.3. より、各三角形 P_i と分割合同である、縦の長さが 1 の長方形 R_i が存在する ($i = 1, \dots, k$)。各 R_i を横に並べた長方形を R_P とする。このとき補題 2.2. より、 $P \sim R_P$ である。(図 10 参照)

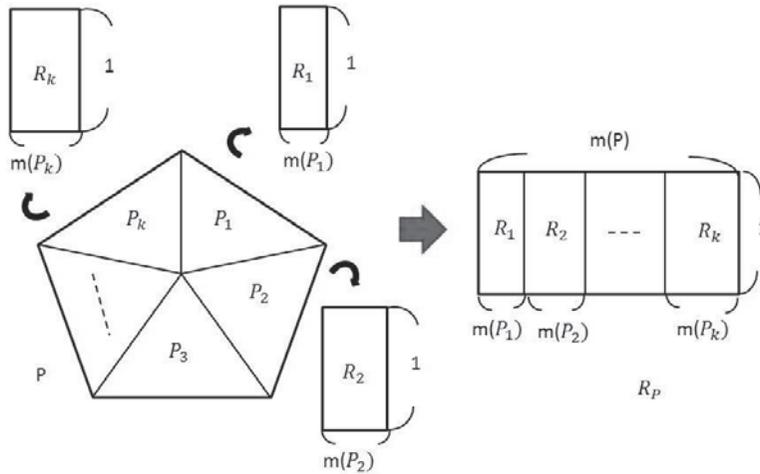


図 10. 底面の長方形への変形

P_i を底面、高さが h の直角柱を K_i 、 R_i を底面、高さが h の直角柱を L_i 、 R_P を底面、高さが h の直角柱を L とする ($i = 1, \dots, k$)。このとき $K = K_1 + \dots + K_k$ 、 $L = L_1 + \dots + L_k$ かつ $K_i \sim L_i$ なので、補題 2.1. より $K \sim L$ となることがわかる。(図 11 参照)

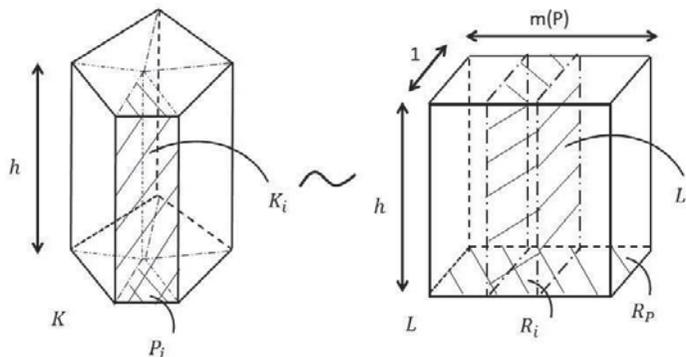


図 11. 直角柱への変形

次に、 L の $h \times m(P)$ の長方形の面を底面と思い同様の操作を行う。得られた直方体を L' とすると、 L' は $1 \times 1 \times V(K)$ の直方体で $L \sim L'$ ある。よつ

て一辺が $\sqrt[3]{V(K)}$ の立方体 C を考えれば、先の操作を C に行うことにより $1 \times 1 \times (\sqrt[3]{V(K)})^3$ の直方体を得るが、これは L' に一致するので $C \sim L'$ である。 $K \sim L \sim L'$ に注意すると、 $K \sim C$ であることがわかる。□

系 2.1. 任意の斜角柱 K は、ある立方体 C と分割合同である。

証明. K が斜角柱の場合を考える。斜角柱の側辺の長さを h' 、底面と側辺がなす角を θ とすると、 $h' = \frac{h}{\sin\theta}$ である。

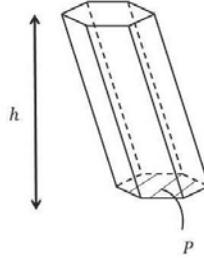


図 12. 斜角柱 K

底面 P を三角形分割し、 $P = P_1 + \dots + P_k$ とする。ただし、必要ならば分割の各三角形 P_i を 3 辺の midpoint を結ぶ線分によって分割する操作 (図 13 参照) を繰り返し、 P の分割 P_1, \dots, P_k は次の条件を満たすよう十分細かく分割されているとする。

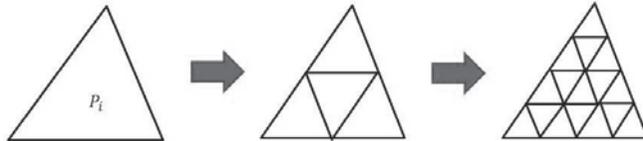


図 13. 三角形分割 P_i の細分

P_i の 3 辺の長さを l_i^j ($j = 1, 2, 3$) とし、底面を P_i 、高さが h の斜角柱を K_i'' とする。 K_i'' の 3 つの側面は平行四辺形である。3 つの平行四辺形 A_i^j のそれぞれの内角のうち鋭角のものを θ_i^j とする。このとき P の分割 P_i は、 $j = 1, 2, 3$ に対し $h' > 2l_i^j \cos\theta_i^j$ を満たすとする。(図 14 参照)

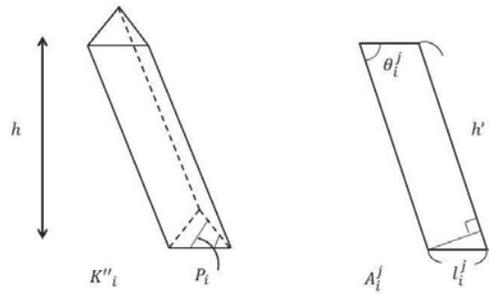


図 14. 斜角柱 K''_i と平行四辺形 A''_i

先の条件を満たすとき、 K''_i の側面に垂直である適当な平面をとれば、上下面と交わることなく斜角柱を切ることができる。切断後の上下の斜角柱をそれぞれ K''_{ia} , K''_{ib} とする。 K''_{ia} , K''_{ib} の上下を入れ替えることにより、直角三角柱を得る。(図 15 参照) これを K_i とし、命題 2.1. の操作を行えばよい。□

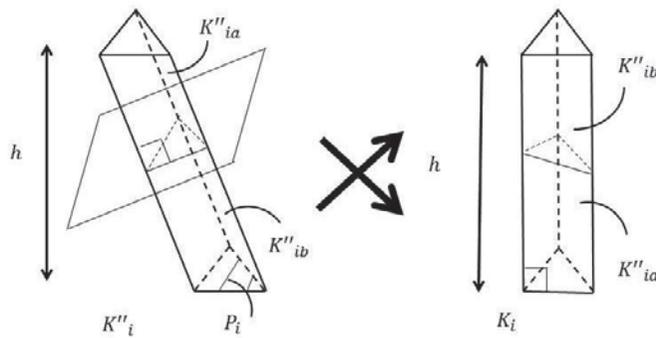


図 15. 斜角柱から直角柱への変形

分割合同は推移律を満たすので、命題 2.1. より次がわかる。

定理 2.1. 次の 2 つは、同値である。

- (1) 三角錐は底面が合同で、高さが $\frac{1}{3}$ の三角柱と分割合同である。
- (2) 三角錐は、ある立方体と分割合同である。

よって序文で述べた理想的な変形をするためには、(2) を満たすことを確かめればよい。

3. SYDLER の定理

\mathbb{R}^1 の基底 e_1 に対し 1 単体 (線分) を

$$[e_1] = \{b_0 + x_1 e_1 \mid 1 \geq x_1 \geq 0\}$$

とする。ここで b_0 は \mathbb{R}^1 の任意の点である。また \mathbb{R}^2 の基底 e_1, e_2 に対し 2 単体 (三角形) を

$$[e_1, e_2] = \{b_0 + x_1e_1 + x_2e_2 \mid 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq 0\}$$

とする。ここで b_0 は \mathbb{R}^2 の任意の点である。最後に \mathbb{R}^3 の基底 e_1, e_2, e_3 に対し 3 単体 (四面体) を

$$[e_1, e_2, e_3] = \{b_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\}$$

とする。ここで b_0 は \mathbb{R}^3 の任意の点である。(図 16 参照) さらに 1 単体 $[e_1]$

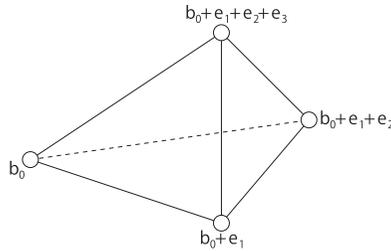


図 16. 四面体 $[e_1, e_2, e_3]$

と 2 単体 $[e_2, e_3]$ の Minkowski 和を

$$[e_1] \times [e_2, e_3] = \{x + y \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [e_1], y \in [e_2, e_3]\}$$

とすると、 $[e_1] \times [e_2, e_3]$ は三角斜柱である。また $[e_1, e_2] \times [e_3]$ も同様に三角斜柱である。多面体 M の λ 倍相似拡大した多面体を λM とするとき、四面体の相似拡大は次のような分割を持つ。

命題 3.1. 任意の四面体 M と任意の正の実数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対し、ある三角斜柱 P_1, P_2 が存在して、 $(\lambda + \mu)M \sim \lambda M + \mu M + P_1 + P_2$ と表せる。

証明. 次を示せば十分である。(図 17 参照)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)[e_1, e_2, e_3] &\sim \lambda[e_1, e_2, e_3] + \mu[e_1, e_2, e_3] \\ &\quad + \lambda[e_1] \times \mu[e_2, e_3] + \lambda[e_1, e_2] \times \mu[e_3] \end{aligned}$$

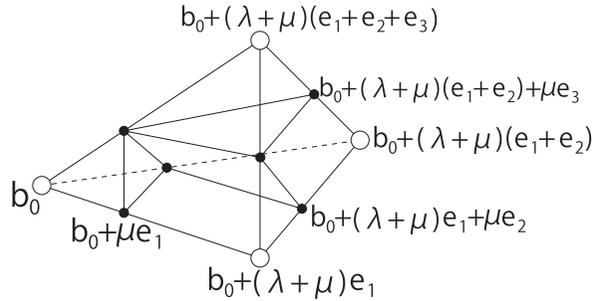
$(\lambda + \mu)[e_1, e_2, e_3]$ の任意の元 $x = b_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ($\lambda + \mu \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$) は次のどれかの条件を満たす。

- (1) $\mu \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mu[e_1, e_2, e_3]$
- (2) $\lambda + \mu \geq x_1 \geq x_2 \geq \mu \geq x_3 \Leftrightarrow x \in \lambda[e_1, e_2] \times \mu[e_3]$
- (3) $\lambda + \mu \geq x_1 \geq \mu \geq x_2 \geq x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \lambda[e_1] \times \mu[e_2, e_3]$
- (4) $\lambda + \mu \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \mu \Leftrightarrow x \in \lambda[e_1, e_2, e_3]$

□

有限個の三角斜柱の和集合と分割合同な多面体の全体を Z_2 とする。定義から $P, Q \in Z_2$ ならば $P + Q \in Z_2$ である。

系 3.1. 任意の多面体 M と任意の正の実数 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対し、ある多面体 $P \in Z_2$ が存在して、 $(\lambda + \mu)M \sim \lambda M + \mu M + P$ と表せる。

図 17. 四面体 $(\lambda + \mu)M$ の分割

証明. M の四面体分割 $M = B_1 + B_2 + \cdots + B_k$ を 1 つ固定する. 任意の B_j に対し, 命題 3.1 よりある多面体 $P_j \in Z_2$ が存在して, $(\lambda + \mu)B_j \sim \lambda B_j + \mu B_j + P_j$ と表せる. よって $P = P_1 + \cdots + P_k \in Z_2$ とおくと

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)M &\sim \lambda B_1 + \cdots + \lambda B_k + \mu B_1 + \cdots + \mu B_k + P_1 + \cdots + P_k \\ &\sim \lambda M + \mu M + P \end{aligned}$$

となる. □

特に $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ とすれば次の系を得る.

系 3.2. 任意の多面体 M と任意の自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対し, ある多面体 $Q \in Z_2$ が存在して, $pM \sim p \cdot M + Q$ と表せる. ここで $p \cdot M$ は M の p 個の和とする.

定理 3.1. (Sydler) 多面体 M は立方体と分割合同とする. M のある分割合同 $M = A_1 + A_2 + \cdots + A_p$ とある多面体 A が存在して, 任意の A_i は A と合同とする. このとき A も立方体と分割合同である.

証明. 系 3.2 より $pA \sim p \cdot A + Q$ ($Q \in Z_2$) と表すことができ, 仮定 $M \sim p \cdot A$ から $pA \sim M + Q$ となる. 命題 2.1. と仮定から $M + Q$ は立方体と分割合同より, pA も立方体と分割合同となるので, A 自身も立方体と分割合同になる. □

系 2.1. より平行六面体は立方体と分割合同なので, 立方体と分割合同な四面体を作るには, 互いに合同な四面体に分割できる平行六面体をみつければよいことになる.

4. HILL の第 1 型四面体

4 章と 5 章では, 先ほど示した Sydler の定理を応用し, 立方体と分割合同な三角錐の構成方法を紹介します. まず初めに, Hill の第 1 型四面体を構成する.

以下の条件を満たす 3 つの一次独立なベクトルを p, q, r とする.

- p, q, r の長さは等しい.
- p と q , q と r , r と p のなす角は等しい.

このとき p, q, r により作られる平行六面体を P として, P の各頂点に図 18 のように名前を付ける.

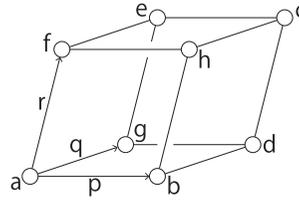


図 18. 平行六面体 P

頂点 a, c を結ぶ対角線を含み他の対角の位置にある頂点の組を通る平面は 3 つ存在し、これらの平面により P は 6 つの合同な四面体に分割される。(図 19 参照) まず対角線 ac と頂点 b, e 含む平面により P は二つの三角斜柱へ分割

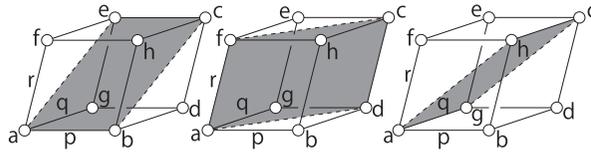


図 19. 平行六面体 P を分割する平面

される。(図 20 参照)

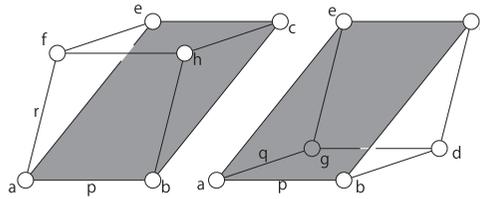


図 20. 平行六面体 P を分割して得られる三角斜柱

次に対角線 ac と頂点 d, f を含む平面により三角斜柱は四角錐と四面体へと分割される。(図 21 参照)

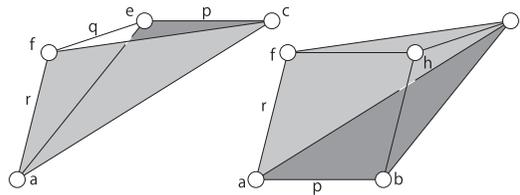


図 21. 三角斜柱を分割して得られる四面体

最後に対角線 ac と頂点 g, h を含む平面により四角錐は 2 つの四面体へと分割される。(図 22 参照)

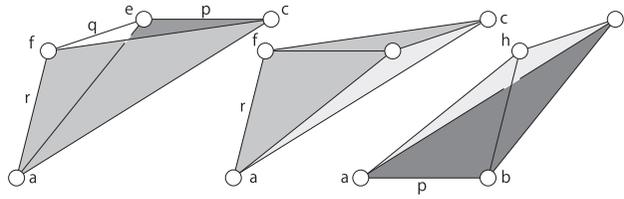


図 22. 平行六面体 P を分割して得られる四面体

得られた 6 つの四面体は、各辺の長さに着目すると合同であることがわかる。したがって Sydlar の定理から立方体に分割合同であり、これを **Hill の第 1 型四面体** という。

5. HILL の第 2, 3 型四面体

前章で得た Hill の第 1 型四面体をさらに分割し、新たに立方体と分割合同である四面体を構成していく。Hill の第 1 型四面体がもつ対称性が鍵となる。

Hill の第 1 型四面体 $abcd$ について、辺 ac と辺 bd の中点をそれぞれ x, y とする。(図 23 参照)

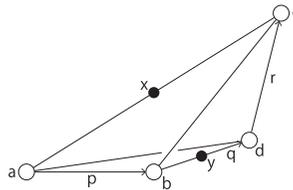


図 23. Hill の第 1 型四面体 $abcd$

命題 5.1. 線分 xy は辺 ac と辺 bd に直交している。

証明. 点 x, y のベクトル表示はそれぞれ

$$x = a + \frac{1}{2}(p + q + r), y = a + p + \frac{1}{2}q$$

である。したがって線分 xy の方向ベクトルは

$$y - x = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r$$

と表される。線分 xy の方向ベクトルと辺 ac, bd の方向ベクトルとの内積を計算すると p, q, r の仮定より、

$$\begin{aligned} (c - a|y - x) &= (p + q + r|\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r) \\ &= \frac{1}{2}\{(p|p) - (r|r)\} + \frac{1}{2}\{(q|p) + (r|p) - (p|r) - (q|r)\} = 0 \\ (d - b|y - x) &= (q|\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r) \\ &= \frac{1}{2}\{(q|p) - (q|r)\} = 0 \quad \square \end{aligned}$$

すなわち Hill の第 1 型四面体は線分 xy に対して π 回転対称である。したがって、頂点 b, d と点 x を通る平面と頂点 a, c と点 y を通る平面により四面体 $abcd$ を 2 つの合同な四面体に分割する。(図 24 参照)

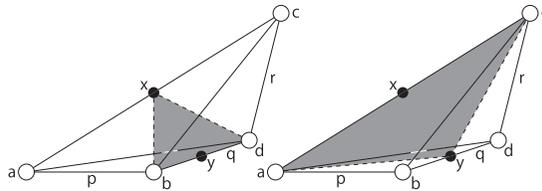


図 24. Hill の第 2, 3 型四面体

こうして得られる四面体をそれぞれ、**Hill の第 2 型四面体**、**第 3 型四面体** という。

6. まとめ

Sydler の定理より、Hill の第 1 型四面体、第 2 型四面体、第 3 型四面体は立方体と分割合同である。よって定理 2.1 より、これらの四面体は高さが $\frac{1}{3}$ の三角斜柱に分割合同であることがわかる。しかしこれまでの議論はあくまで存在性を示したものであり、実際どのように切り張りすれば三角斜柱へと変形できるのかという情報までは含んでいない。具体的な切り張りによる三角錐から三角柱への変形例としては、[1] pp.99 や [3] に記載されているのでそちらを参照していただきたい。

本論文ではできるだけ初等的な説明を心がけたが、現在多面体の分割合同に関する議論は、Dehn 不変量という多面体の辺の長さや面角によって定まる不変量を用いることが多い。定理 2.1 で「与えられた三角錐は高さが $\frac{1}{3}$ の三角柱に変形できるか」という問題は、「立方体と分割合同であるか」で判定可能であることを示したが、これは「Dehn 不変量が自明であるか」に対応している。今回紹介した Hill による 3 種類の四面体は、立方体と分割合同な (すなわち三角斜柱に分割合同な) 四面体の 1 例であり、Dehn 不変量を用いることにより他にもこれまでに 27 個の例が散在的に発見されている。([1]pp.170-173 参照) しかし、立方体と分割合同な四面体の完全な分類はいまだ決定されておらず、今後の興味深い課題である。

[参考文献]

- [1] Boltianskii, V. G., *Hilbert's Third Problem*, V.H. Winston & Sons, 1978.
- [2] Hill, M. J. M., Determination of the volumes of certain species of tetra-hedra without employment of the method of limits, *Proc. London Math. Soc.* 27 (1896), pp. 39-53.
- [3] 河崎英一, 模型を活用した「角錐の体積」指導—「数学的活動」のねらいを目指して—, 早稲田大学数学教育学会誌第 32 巻第 1 号, 2014, pp. 32-41