Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

博 士 論 文 概 要
Doctoral Thesis Synopsis

論　文　題　目
Thesis Theme

Verified numerical computation for elliptic partial differential equations and related problems
楕円型偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算と関連する問題

申　請　者
(Applicant name)

Kazuaki TANAKA

田中　　一成

Department of Pure and Applied Mathematics
Research on Numerical Analysis

December, 2016

本論文では以下の楕円型ディリクレ境界値問題 (1) に対する精度保証付き数値計算法を考える．

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，Ω は $\mathbb{R}^2$ 上の有界な多角形領域，即ち有界な多角形状の開集合とする．$\partial\Omega$ はその境界を表す．また，Δ はラプラス作用素，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は与えられた非線形写像とする．本論文において問題 (1) に対する “精度保証” とは，(1) の近似解 $\hat{u}$ を数値的に求め，それを中心とする明示された半径 r の閉球 $B(\hat{u}, r)$ 内に真の解が存在することを証明するということを指す．ただし，本論文では H_0^1 ノルム (即ち $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$) と L^∞ ノルムの意味での精度保証を考える．本論文の対象は以下の問題 (2) の解に対する精度保証付き数値計算を含む．

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

即ち，必要である場合は (1) の精度保証された解に対して，その正値性も同時に保証することで (2) の解を精度保証する．問題 (1) の解 u が問題 (2) の解でもあるとき，u を (1) の正値解という．問題の可解性や精度保証付き数値計算を行う難しさは非線形写像 f に大きく依存するが，本論文では代表的な例として，$f(t) = |t|^{p-1}t$ $(p > 1)$ および $f(t) = \varepsilon^{-2}(t - t^3)$ を取り扱う．ここで，ε は特異摂動と呼ばれる現象に関係する正の小さいパラメーターである．本論文のいくつかの箇所にて Ω の凸性が加えて要求される．これは精度保証された (1) の弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ の H^2 正則性が L^∞ ノルムの意味での精度保証を行う際に必要となるためである．

今日，数値計算は生物学や物理学等に由来する様々な現象を理解するために科学および工学の広い分野で重要な役割を担っている．しかし従来の数値計算は一般に丸め誤差や打切り誤差，離散化誤差をはじめとする様々な誤差を伴い，それらが最終的な数値結果に致命的な影響を及ぼすことがあるため，このことは予てより問題視されてきた．一方で数値計算の過程で発生する全ての誤差を考慮し，定量的に誤差上限を保証する数値計算のことを “精度保証付き数値計算” と呼ぶ．ここで “精度保証” という言葉には誤差の把握以外に，対象とする問題の解の存在の保証を同時に行うという意味を含む．そのため，数学的立場から数値的検証法や計算機援用 (存在) 証明と呼ばれることもある．先行研究としては『大石進一 , 精度保証付き数値計算 , コロナ社 , 2000』や『中尾充宏，渡部善隆 , 実例で学ぶ精度保証付き数値計算 理論と実装 , サイエンス社 , 2011』等にまとめてある手法が有名であり，精度保証付き数値計算は従来の数値計算にはない特徴を持つことから近年世界的に注目を集めている技術である．

特に我々の興味は楕円型境界値問題 (1) および (2) に対する精度保証付き数値計算である．(1) および (2) は生物学や物理学等に由来する様々なモデルに起因する重

要な偏微分方程式であるため，これまで解析的，数値的両方の側面から広く研究されてきた．特に本論文で対象とする $f(t)=|t|^{p-1}t\ (p>1)$ および $f(t)=\varepsilon^{-2}(t-t^3)$ $(\varepsilon>0)$ のどちらの場合も (2) の解の存在性・唯一性に関する結果が偏微分方程式論により知られている．$f(t)=|t|^{p-1}t\ (p>1)$ のときは，Ω が滑らかでかつ各軸に対して対称であれば (2) は唯一解を持つ．また，領域が滑らかでない場合も $\Omega=(0,1)^2$ の等の解の十分な滑らかさが保証される対称領域であれば同様に正値解の唯一性が保証される．$f(t)=\varepsilon^{-2}(t-t^3)\ (\varepsilon>0)$ のときは，λ_1 を $-\Delta$ のディリクレ条件を課した Ω 上での弱い意味での最小固有値とするとき，$\varepsilon^{-2}>\lambda_1$ であれば (2) は唯一解を持つということが任意の有界領域に対して得られる．このような結果が知られているにも関わらず，解の定量的な情報 (各点での値や最大値，最小値等) やそこから観測される解の形状等は，現状の解析的手法のみからでは明らかにされていない．精度保証付き数値計算は，真の解の定量的な情報をその数値的に得た近似解との差を表す不等式の形で得ることができるという点で有用であると言える．

以下，本論文の各章の概要を述べる．

1 章では本論文の対象とする問題やモチベーション，背景，先行研究等について記述する．

2 章ではまず本論文で使用する記号の準備を行う．次に問題 (1) に対する H_0^1 ノルムの意味での精度保証付き数値計算のために用いるニュートン・カントロビッチの定理およびその改良された定理を紹介する．これらの定理は (1) の近似解 $\hat{u}$ がある種の “良い” 条件を満たせばその近くに真の解が存在するということを主張するものである．また，そこに更に条件を加えることにより (2) に対する (即ち (1) の正値解に対する) 精度保証も可能になるということも述べる．領域が凸である場合は問題 (1) の弱解の H^2 正則性が保証されるため，$H^2(\Omega)$ から $L^\infty(\Omega)$ への埋め込み定数を具体的に評価することにより，上記手法により得られた H_0^1 ノルムの意味での解の包含から，$L^\infty(\Omega)$ の意味での解の包含が得られることも述べる．本章で紹介する定理の要求する近似解 $\hat{u}$ の満たすべき条件をチェックするためには，問題 (領域 Ω や非線形写像 f) や $\hat{u}$ に依存するいくつかの定数を具体的に評価する必要がある．例えば，問題を記述する作用素の $\hat{u}$ における線形化作用素の逆作用素ノルムや，埋め込み $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ の不等式に現れる定数 $C_p(\Omega)$ 等である．2 章の最後では $C_p(\Omega)$ の上からの粗い評価を得るための古典的な手法であるタランティの最良定数とヘルダーの不等式を用いた評価方法についても言及する．

3 章では，対象とする問題 (1) を弱形式化し作用素 $\mathcal{F}:H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)\,(u\mapsto -\Delta u-f(u))$ を用いて $\mathcal{F}(u)=0$ と書いたときに，その近似解 $\hat{u}$ における $\mathcal{F}$ のフレッシェ微分 $\mathcal{F}'_{\hat{u}}$ の逆作用素ノルム $\left\|\mathcal{F}'^{-1}_{\hat{u}}\right\|_{B(H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega))}$ の評価法について述べる．ここで $H^{-1}(\Omega)$ は $H_0^1(\Omega)$ の共役空間を表し，通常の sup ノルムを導入したものとする．この逆作用素ノルムは $\hat{u}$ により摂動されたある楕円型自己共役作用素の最小固有値から計算することができ，その最小固有値を劉・大石の手法で上下から具体的

に評価することで所望のノルム評価を実現する．劉・大石の手法は $H_0^1(\Omega)$ のある有限次元部分空間 V_N 上で近似された固有値と，元の無限次元空間 $H_0^1(\Omega)$ で計算された固有値の差を評価する．ここで N は V_N の $H_0^1(\Omega)$ に対する近似度を表す正のパラメータである．例えば本論文では $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $H_0^1(\Omega)$ を張る基底としたときに，$V_N = \mathrm{span}\{\phi_i : i = 1, 2, \cdots, N\}$ のように V_N を選び，このとき N は V_N を張る基底関数の数を表すことになる．劉・大石の手法を用いて対象とする固有値を評価するには V_N の $H_0^1(\Omega)$ に対する近似度を反映する補完誤差定数 C_N を具体的に評価する必要がある．即ち，$h \in L^2(\Omega)$ に対して，それに対応するポアソン方程式 $-\Delta u = h$ のディリクレ境界値問題の弱解を u_h と書いたときに

$$\|u_h - P_N u_h\|_V \le C_N \|h\|_{L^2(\Omega)} \tag{3}$$

を任意の $h \in L^2(\Omega)$ に対して満たす正定数 C_N である．ここで，P_N は $H_0^1(\Omega)$ から V_N への直交射影であり，$(P_N u - u, v_N)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ for all $u \in H_0^1(\Omega)$ and $v_N \in V_N$ で定義される．3 章の最後では V_N をルジャンドル多項式から構成される基底で張られた空間としたときの C_N の評価法を述べる．

4 章では関数空間間の埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ の最良定数 $C_p(\Omega)$ の評価法について述べる．より正確には $C_p(\Omega)$ は

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_p(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{for all } u \in H_0^1(\Omega). \tag{4}$$

を満たす正定数として定義される．この最良値 (即ち極値) を達成させる関数 u は楕円型境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

を満たすことを示す．更に問題 (5) の解の唯一性について $\Omega = (0,1)^2$ の場合に議論し，2 章で述べた方法でその解の精度保証を行うことにより，$C_p(\Omega)$ の最良値をタイトに評価する．特に本章では $p = 3, 4, 5, 6, 7$ の場合の結果を与え，$C_p(\Omega)$ の最良値を 12〜13 桁の精度で評価した結果をまとめる．

5 章では $f(t) = \varepsilon^{-2}(t - t^3)$ の場合，即ちアレン・カーン方程式の定常問題

$$\begin{cases} -\Delta u = \varepsilon^{-2}(u - u^3) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

に対する精度保証付き数値計算を考える．この問題の解は $\varepsilon > 0$ が小さくなるにつれて特異摂動という現象を起こす．また，複雑な解の分岐を引き起こすことでも知られる．このことから一般に ε が小さいほど解の精度保証は難しくなる．5 章では ε を変化させた場合に精度保証に必要な各種定数や解の形がどのように変化するかを具体的な例と共に紹介する．また，2 章で述べた方法を応用し，その正値解の精度保証を行った例も併せて紹介する．

6 章では本論文で述べた手法・結果を総括し，今後の展望を述べる．

早稲田大学　博士（工学）　学位申請　研究業績書

氏 名　　田中　一成　印

（2016 年　12 月　現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
論文	[1] Akitoshi Takayasu, Kaname Matsue, Takiko Sasaki, Kazuaki Tanaka, Makoto Mizuguchi, Shin'ichi Oishi: Numerical validation of blow-up solutions for ODEs, to appear in Journal of Computational and Applied Mathematics. [2] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, Makoto Mizuguchi, and Shin'ichi Oishi: Sharp numerical inclusion of the best constant for embedding $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ on bounded convex domain, Journal of Computational and Applied Mathematics, 311, 306–313 (2017), to appear. Electronically published in doi.org/10.1016/j.cam.2016.07.021. [3] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, Makoto Mizuguchi, and Shin'ichi Oishi: Estimation of the Sobolev embedding constant on domains with minimally smooth boundary using extension operator, Journal of Inequalities and Applications, 1, 1-23 (2015). [4] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, Makoto Mizuguchi, and Shin'ichi Oishi: Numerical verification of positiveness for solutions to semilinear elliptic problems, JSIAM Letters 7, 73-76 (2015). [5] Kazuaki Tanaka, Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu, and Shin'ichi Oishi: Verified norm estimation for the inverse of linear elliptic operators using eigenvalue evaluation, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 31, 665-679 (2014).
講演	[6] 田中一成，関根晃太，大石進一：楕円型微分方程式の正値解に対する精度保証付き数値計算法（Verified numerical computation method for positive solutions to elliptic differential equations）, RIMS 研究集会「現象解明に向けた数値解析学の新展開 II」, 2016 年 10 月 19 日～10 月 21 日. [7] 関根晃太，田中一成，大石進一：ある無限次元固有値を用いた楕円型偏微分方程式の解の存在性に対する計算機援用証明法（Computer-assisted proof for existence of solutions to PDEs using an infinite eigenvalue）, RIMS 研究集会「現象解明に向けた数値解析学の新展開 II」, 2016 年 10 月 19 日～10 月 21 日. [8] 関根晃太，田中一成，大石進一：有界な凸領域における連立楕円型偏微分方程式の解の計算機援用存在証明法（Computer assisted existence proof of solutions to system of partial differential equations with bounded convex polygonal domains）, The Twenty-Eighth RAMP Symposium, 2016 年 10 月 13 日～10 月 14 日. [9] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, Shin'ichi Oishi: On verified numerical computation for positive solutions to elliptic boundary value problems, Computer Arithmetic and Validated Numerics, SCAN2016, Sep. 26-29, 2016. [10] Kouta Sekine, Kazuaki Tanaka, Shin'ichi Oishi: A norm estimation for an inverse of linear operator using a minimal eigenvalue, Computer Arithmetic and Validated Numerics, SCAN2016, Sep. 26-29, 2016. [11] Akitoshi Takayasu, Kaname Matsue, Takiko Sasaki, Kazuaki Tanaka, Makoto Mizuguchi, and Shin’ichi Oishi: Verified numerical computations for blow-up solutions of ODEs, Computer Arithmetic and Validated Numerics, SCAN2016, Sep. 26-29, 2016.

早稲田大学　博士（工学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
講演	[12] Kazuaki Tanaka, Shin'ichi Oishi: On verified numerical computation for elliptic Dirichlet boundary value problems using sub- and super-solution method, The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Toki Messe, Niigata, Japan, August 1-6, 2016. [13] Kouta Sekine, Kazuaki Tanaka, Shin'ichi Oishi: Estimation for optimal constant satisfying an inequality for linear operator using minimal eigenvalue, The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Toki Messe, Niigata, Japan, August 1-6, 2016. [14] Kaname Matsue, Akitoshi Takayasu, Takiko Sasaki, Kazuaki Tanaka, Makoto Mizuguchi, and Shin'ichi Oishi: Rigorous numerics of blowup solutions for ODEs, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 1-5, 2016. [15] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, Shin'ichi Oishi: Numerically verifiable condition for positivity of solution to elliptic equation, The 11th East Asia SIAM. June, 20-22, 2016. [16] 高安亮紀, 松江要, 佐々木多希子, 田中一成, 水口信, 大石進一：放物面コンパクト化を用いる常微分方程式の爆発解の数値的検証法, 日本応用数理学会 2015 年度連合発表会，神戸学院大学ポートアイランドキャンパス，2016 年 3 月 4 日～3 月 5 日. [17] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, Makoto Mizuguchi, Shin'ichi Oishi: Numerical verification for positiveness of solutions to self-adjoint elliptic problems, JSST 2015 International Conference on Simulation Technology, Oct. 12-14, 2015. [18] Kazuaki Tanaka and Shin'ichi Oishi: Computer-assisted analysis for solutions to nonlinear elliptic Neumann problems, JSST 2014 International Conference on Simulation Technology, Oct. 29-31, 2014. [19] Kazuaki Tanaka and Shin'ichi Oishi: Numerical verification for periodic stationary solutions to the Allen-Cahn equation, The16th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, SCAN2014, Sep. 21-26, 2014. [20] 高安亮紀, 松江要，佐々木多希子，田中一成，水口信，大石進一：Verified numerical enclosure of blow-up time for ODEs，日本数学会 2015 年度年会，京都産業大学，2015 年 9 月 13 日～9 月 16 日. [21] 田中一成, 関根晃太, 水口信, 大石進一：楕円型偏微分方程式の解の正値性に対する数値的検証法，日本応用数理学会 2015 年度年会，金沢大学，2015 年 9 月 9 日～9 月 11 日. [22] 若山馨太, 田中一成, 関根晃太, 尾崎克久, 大石進一：逐次添加法による三角形分割の Delaunay 性に対する数値的検証法，日本応用数理学会 2015 年度年会，金沢大学, 2015 年 9 月 9 日～9 月 11 日. [23] 高安亮紀, 松江要，佐々木多希子，田中一成，水口信，大石進一：常微分方程式の爆発解に対する精度保証付き数値計算, 日本応用数理学会 2015 年度年会, 金沢大学, 2015 年 9 月 9 日～9 月 11 日.

早稲田大学　博士（工学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
講演	[24] 関根晃太，田中一成，高安亮紀，山崎憲：シグマノルムを利用した精度保証付き数値計算法の連立楕円型偏微分方程式への応用，第４７回日本大学生産工学部学術講演会，日本大学，2014 年 12 月 6 日.
	[25] 田中一成, 水口信, 関根晃太, 大石進一 : An a priori estimation of the Sobolev embedding constant and its application to numerical verification for solutions to PDEs, 第 10 回日本応用理学会研究部会連合発表会，京都大学吉田キャンパス総合研究８号館， 2014 年 3 月 19 日～3 月 20 日.
	[26] Kazuaki Tanaka and Shin'ichi Oishi: Numerical verification for stationary solutions to the Allen-Cahn equation, The International Workshop on Numerical Verification and its Applications, Waseda Univ. Nishiwaseda campus, Japan, March, 2014.
	[27] Kazuaki Tanaka, Makoto Mizuguchi, Kouta Sekine, Akitoshi Takayasu, Shin'ichi Oishi: Estimation of an embedding constant on Lipschitz domains using extension operators, JSST 2013 International Conference on Simulation Technology. Sep. 11-13, 2013.
	[28] 田中一成, 高安亮紀, 劉雪峰, 大石進一 : 線形楕円型作用素の Neumann 条件下における精度保証付き逆作用素ノルム評価, 日本応用数理学会 2013 年度年会, アクロス福岡, 福岡県福岡市, 2013 年 9 月 9 日～9 月 11 日.
	[29] Kazuaki Tanaka, Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu, Shin'ichi Oishi: Verified norm estimation for the inverse of linear elliptic operators and its application, The 9th East Asia SIAM. June 18-20, 2013.
	[30] 田中一成，高安亮紀，劉雪峰，大石進一：逆作用素ノルム評価を用いた楕円型 Neumann 境界値問題の解に対する精度保証付き数値計算，日本応用数理学会 2013 年度連合発表会，東洋大学白山キャンパス, 2013 年 3 月 14 日～3 月 15 日.
	[31] 田中一成, 高安亮紀, 劉雪峰, 大石進一 : 線形楕円型作用素の Neumann 条件下における精度保証付き逆作用素ノルム評価, 日本応用数理学会 2012 年度年会, 稚内全日空ホテル, 北海道稚内市, 2012 年 8 月 28 日～9 月 2 日.　（その他講演５件）
その他（ポスター発表）	[32] 若山馨太，田中一成，関根晃太，尾崎克久，大石進一：Delaunay 三角形分割の精度保証付き数値計算手法に対する考察，日本応用数理学会 2016 年度年会，北九州国際会議場，2016 年 9 月 12 日～9 月 14 日.　（その他ポスター発表２件）
その他（受賞）	[33] 若山馨太，田中一成，関根晃太，尾崎克久，大石進一，日本応用数理学会 2016 年度年会，優秀ポスター賞 受賞.
	[34] 田中一成，2016 年度大川功記念特別優秀賞 受賞.
	[35] Kazuaki Tanaka, JSST 2014 International Conference, Student Presentation Award 受賞.
	[36] Kazuaki Tanaka, JSST 2013 International Conference, Student Presentation Award 受賞.