Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

博 士 論 文 審 査 報 告 書
Doctoral Thesis Screening Results Report

論 文 題 目
Thesis Theme

Verified numerical computation for elliptic partial differential equations and related problems
楕円型偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算と関連する問題

申 請 者
(Applicant name)

Kazuaki TANAKA

田中 一成

Department of Pure and Applied Mathematics
Research on Numerical Analysis

February, 2017

数値計算は生物学や物理学等に由来する様々な現象を理解するために科学および工学の広い分野で重要な役割を担っている．しかし従来の数値計算は一般に丸め誤差や打切り誤差，離散化誤差をはじめとする様々な誤差を伴い，それらが最終的な数値結果に致命的な影響を及ぼすことがあるため，このことはかねてより問題視されてきた．一方で数値計算の過程で発生する全ての誤差を考慮し，定量的に誤差上限を保証する数値計算のことを“精度保証付き数値計算”と呼ぶ．ここで“精度保証”という言葉には誤差の把握以外に，対象とする問題の解の存在の保証を同時に行うという意味を含む．そのため，数学的立場から数値的検証法や計算機援用(存在)証明と呼ばれることもある．精度保証付き数値計算は従来の数値計算にはない特徴を持つことから近年世界的に注目を集めている．

特に本論文の対象とする問題は以下の非線形楕円型ディリクレ境界値問題(1)である．

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

対象とされる領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ 上の有界な多角形領域であり，$\partial\Omega$ は Ω の境界を表す．Δ はラプラス作用素，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は与えられた非線形写像を表し，特に $f(t) = |t|^{p-1}t$ $(p > 1)$ および $f(t) = \varepsilon^{-2}(t - t^3)$ の 2 例が取り扱われる．本論文において問題(1)に対する“精度保証”とは，(1)の近似解 $\hat{u}$ を数値的に求め，それを中心とする明示された半径 r の閉球 $B(\hat{u}, r)$ 内に真の解が存在することを証明するということを指す．ただし，H_0^1 ノルム(即ち $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$)と L^∞ ノルムの意味での精度保証法が議論される．また，本論文の対象は以下の問題(2)の解に対する精度保証付き数値計算を含む．

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

即ち，必要である場合は(1)の精度保証された解に対して，その正値性も同時に保証することで(2)の解を精度保証している．問題(1)の解 u が問題(2)の解でもあるとき，u は(1)の正値解と呼ばれる．本論文のいくつかの箇所にて Ω の凸性が加えて要求される．これは精度保証された(1)の弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ の H^2 正則性が L^∞ ノルムの意味での精度保証を行う際に必要となるためである．

(1)および(2)は生物学や物理学等に由来する様々なモデルに起因する重要な偏微分方程式であるため，これまで解析的，数値的両方の側面から広く研究されてきた．特に本論文で対象とされる $f(t) = |t|^{p-1}t$ $(p > 1)$ および $f(t) = \varepsilon^{-2}(t-t^3)$ $(\varepsilon > 0)$ のどちらの場合も(2)の解の存在性・唯一性に関する結果が偏微分方程式論により知られている．例えば $f(t) = |t|^{p-1}t$ $(p > 1)$ のときは，$\partial\Omega$ が滑らかで，かつ Ω が各軸に対して対称な凸領域であれば(2)は唯一解を持つ．また，領域が滑らかでない場合も $\Omega = (0, 1)^2$ の等の解の十分な滑らかさが保証される凸

対称領域であれば同様に正値解の唯一性が保証される．一方 $f(t) = \varepsilon^{-2}(t - t^3)$ $(\varepsilon > 0)$ のときは，λ_1 を $-\Delta$ のディリクレ条件を課した Ω 上での弱い意味での最小固有値とするとき，$\varepsilon^{-2} > \lambda_1$ であれば (2) は唯一解を持つということが任意の有界領域に対して得られる．このような結果が知られているにも関わらず，解の定量的な情報や，そこから観測される解の形状等は，現状の解析的手法のみからでは明らかにされていない．

本論文で提案される手法を用いれば (1) および (2) の真の解の定量的な情報をその数値的に得た近似解との差を表す不等式の形で得ることができる．即ち，現状の解析的手法では得られない解の情報を知ることができる．特に (1) の解の精度保証法だけでなく，その解の正値性を込めて存在が数値的に初めてこの論文において議論されている点は特筆すべき点である．更にその応用として，埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ の最良定数 $C_p(\Omega)$ の高精度な評価法についても詳細に議論されている．

以下が本論文の各章の概要である．

1 章では本論文の対象とする問題やモチベーション，背景，先行研究等が記述される．

2 章ではまず本論文で使用する記号の準備が行われれ，次に問題 (1) に対する H_0^1 ノルムの意味での精度保証付き数値計算のために用いるニュートン・カントロビッチの定理を改良した定理が紹介される．この定理は (1) の近似解 $\hat{u}$ がある種の “良い” 条件を満たせばその近くに真の解が存在するということを主張するものである．また，$\hat{u}$ に更に条件を課すことにより，(2) に対する精度保証を行うための定理も提案される．領域が凸である場合は問題 (1) の弱解の H^2 正則性が保証されるため，$H^2(\Omega)$ から $L^\infty(\Omega)$ への埋め込み定数を具体的に評価することにより，上記手法により得られた H_0^1 ノルムの意味での解の包含から，$L^\infty(\Omega)$ の意味での解の包含が得られることも述べられる．本章で提供される定理の要求する近似解 $\hat{u}$ の満たすべき条件をチェックするためには，問題 (領域 Ω や非線形写像 f) や $\hat{u}$ に依存するいくつかの定数を具体的に評価する必要がある．特に本章の最後では，その必要な定数の 1 つである埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ の定数 $C_p(\Omega)$ の粗い評価法について述べられる．

3 章では，対象問題 (1) を弱形式化し作用素 $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ $(u \mapsto -\Delta u - f(u))$ を用いて $\mathcal{F}(u) = 0$ と書いたときに，その近似解 $\hat{u}$ における $\mathcal{F}$ のフレッシェ微分 $\mathcal{F}'_{\hat{u}}$ の逆作用素ノルム $\left\| \mathcal{F}'^{-1}_{\hat{u}} \right\|_{B(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))}$ の評価法について述べられる．これも 2 章で提案された精度保証法に必要な定数の 1 つである．ここで $H^{-1}(\Omega)$ は $H_0^1(\Omega)$ の共役空間である．この逆作用素ノルムの評価を $\hat{u}$ により摂動されたある楕円型自己共役作用素の最小固有値を求める問題に帰着し，その最小固有値を劉・大石の手法により上下から具体的に評価することで所望のノルム評価を実現している．

4 章では (2) に対する精度保証法の応用例として，関数空間間の埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ の最良定数 $C_p(\Omega)$ の評価法について述べられている．より正

確には$C_p(\Omega)$は

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_p(\Omega)\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{for all } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

を満たす最小の定数として定義される．この最良値を達成させる関数uは非線形楕円型境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

を満たす．特に$\Omega = (0,1)^2$の場合に(4)が唯一解を持つことに注意し，2章で述べた方法でその解の精度保証を行うことにより$C_p(\Omega)$の最良値の高精度な評価を実現している．本章では$p = 3, 4, 5, 6, 7$とした時の最良値を12〜13桁の精度で評価した結果がまとめられている．

5章では$f(t) = \varepsilon^{-2}(t - t^3)$の場合，即ちアレン・カーン方程式の定常問題

$$\begin{cases} -\Delta u = \varepsilon^{-2}(u - u^3) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

に対する精度保証付き数値計算について議論される．εを変化させた場合に精度保証に必要な各種定数や解の形がどのように変化するかを具体的な例と共に示される．また，2章で述べた方法を応用し，その正値解および非正値解の精度保証を行った例も併せて紹介される．

6章では論文全体を総括し，今後の展望が述べられる．

以上を要するに，従来，偏微分方程式の境界値問題の解の精度保証法においては解の存在と局所的一意性が証明されていた．それに加えて，本論文では，解の正値性を精度保証付き数値計算で証明するという新しい精度保証理論を展開している．これは，精度保証付き数値計算理論の大きな発展と評価できる．その結果，ソボレフ空間 $H_0^1(\Omega)$ のルベーグ空間 $L^p(\Omega)$ への埋め込み定数の上下からの高精度な評価が得られたことも数学的に大きな成果である．従って，本論文が提供する成果は，偏微分方程式およびその数値解析分野の発展に大きく貢献するものであるといえ，本論文は博士(工学)の学位論文として価値あるものと認める．

2017年1月

審査員

主査　早稲田大学教授　工学博士 早稲田大学　大石 進一

早稲田大学教授　博士(工学) 早稲田大学　柏木 雅英

早稲田大学教授　理学博士 早稲田大学　田中 和永