

博士論文概要

論文題目

Mathematical foundations of
semirelativistic nonlinear fields

半相対論的非線形場の数学的基礎

申請者

Kazumasa	FUJIWARA
藤原	和将

物理学及応用物理学専攻 数理物理学研究

2016年 5月

冪乗型の自己相互作用を持つ半相対論的古典場を記述する模型方程式として、次の非線形偏微分方程式

$$i \partial_t u + (m^2 - \Delta)^{1/2} u = f(u), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}$$

を考える。初期時刻 $t=0$ で初期状態 $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を与えた初期値問題の可解性及び適切性に就いて論じる。ここで質量 m は実数であり、相互作用を表す非線形項 f は多項式とし、分数階微分 $(m^2 - \Delta)^{1/2}$ は $(m^2 + \xi^2)^{1/2}$ を表象とするフーリエ掛算作用素と定義する。

半相対論的方程式は、特殊相対性理論に於ける粒子の運動エネルギーを作用素に置き換える事で得られる方程式であり、分数階微分 $(1 - \Delta)^{1/2}$ を含む点に特徴がある。分数階微分は非局所的な作用素であり、半相対論的方程式はローレンツ不変ではない。この為、相対論的量子力学に於いては、相対論的運動エネルギーの 2 乗に対応するクライン・ゴルドン方程式や、クライン・ゴルドン方程式の一階化に相当するディラック方程式が用いられて来た。現在に於いても、クライン・ゴルドン方程式やディラック方程式は相対論的な場の方程式として妥当であると考えられている。然し非局所的な作用素を直接解析する為の数学的な知識は、半相対論的方程式が相対論的量子力学の観点から破棄された当時に比べて十分に整備されており、数学的対象として興味深いものとなって来た。加えて質量が無い場合、半相対論的方程式は分数階シュレディンガー方程式としてレビ過程に基づく経路積分から導出される事が知られている。又、半分の波動方程式として乱流のモデル等に用いられている。更に、質量がある場合に於いても、ボゾン星のモデルとして用いられている。この様に、半相対論的方程式の数学的基礎を研究する事は、これらの物理現象を理解する為にも重要であると考えられる。

本論文では、半相対論的方程式の数学的な基礎付けの第一歩として、最も基本的な空間一次元に於ける初期値問題の可解性と適切性に就いて論じる。ここで云う可解性とは、半相対論的方程式の初期値問題を弱方程式の意味で満たす弱解が存在する事を指す。又、ここで云う適切性とは、 L^2 を基礎とするソボレフの意味に於いて、指定された可微分性を持つ初期値に対して、同様の可微分性を持つ解が一意的に存在し、初期値と解を結び付ける解写像が初期値に対して連続である事を指す。

既存の半相対論的方程式の初期値問題の研究では、ボゾン星のモデルであるハートリー型の非線形項を伴う半相対論的方程式が主に取り扱われており、冪乗型の非線形項を伴った半相対論的方程式の研究は限られている。特に、半相対論的方程式が解を有すると判明している初期値の可微分性は、期待される可微分性に比べて不自然に高い。質量が無い場合、半相対論的方程式は適当な尺度変換に対して不変である事から、臨界尺度によって半相対論的方程式が可解である様な初期値の可微分性が推測される。然し、可解性が期待される劣臨界尺度に於いても、

半相対論的方程式の可解性は完全に理解されていない。例えば、一般の冪乗型の非線形項を伴う半相対論的方程式の解を構成する方法の一つは、ボローニャとライアルが行った様な半相対論的発展作用素のユニタリー性とソボレフの埋蔵理論による逐次近似法である。この手法による半相対論的方程式が解を有する為の初期値の可微分性の下限は、関数を一様に評価できる $1/2$ 階である。初期値の可微分性が $1/2$ 階である場合、 $1/2$ 階のソボレフ空間は半相対論的方程式のエネルギーに対応する為、エネルギー保存則に基づいて時間大域的な適切性が得られる。エネルギー保存則に基づく適切性は、クリーガー、レンズマン、ラファエルによって議論されている。 $1/2$ 階は先行研究に於ける半相対論的方程式の可解性の境界であるが、臨界尺度から見て真に高い為、より広汎な初期値に対して半相対論的方程式は可解性や適切性を有すると期待される。

より低階のソボレフ空間に於ける半相対論的方程式の初期値問題を研究する為には、半相対論的発展作用素の平滑化効果や非線形項から来る非線形効果に基づく平滑化効果の精密な評価が重要である。特に一次元に於いては、既存の半相対論的発展作用素の平滑化効果に対応するストリッカーツ評価は、 $1/2$ 階以下のソボレフ空間に於いて、冪乗型の非線形を伴う半相対論的方程式を解析する為には不十分である。そこで本論文では、二次の非線形評価に基づく L^2 に於ける半相対論的方程式の初期値問題の適切性を先ず論じる。続いて半相対論的方程式の弱解の非存在性を示し、半相対論的発展作用素の平滑化効果が $1/2$ 階以下のソボレフ空間に於ける初期値問題を解析する為には、本質的に不十分である事情を説明する。これらの結果により、一次元に於ける半相対論的方程式の初期値問題の可解性と適切性の精密な理解が得られる。加えて、エネルギー保存則に基づくコンパクト性を用いた解の構成方法を見直す事で、改良したエネルギー保存則に基づく解の構成方法を述べる。

二次の非線形項を伴う半相対論的方程式の初期値問題の議論では、 $f(z) = z^2, \bar{z}^2, |z|^2$ の三つの場合に分け、最も基本的な二次の非線形効果に基づく平滑化作用を議論する。具体的には、ブルガン等によって導入されたフーリエ制限法を用いる事で、 $f(z) = \bar{z}^2$ に限り、平滑化作用が働き、半相対論的方程式の初期値問題の適切性を L^2 まで得る事が出来る事を示す。更に、 $f(z) = z^2, |z|^2$ の場合に於いては、 $1/2$ 以下の階数のソボレフ空間に於いて、解作用素の初期値に対する 2 回連続微分可能性が破綻する事を示す。そして $f(z) = \bar{z}^2$ の場合於いては、負の微分階数のソボレフ空間に於いて、解作用素の 3 回連続微分可能性が破綻する事を示す事で、フーリエ制限法の適用限界が技術的な問題ではなく、摂動論的枠組みに於いて本質的である事を示す。

エネルギー保存則に基づく解の構成方法の改良に就いては、吉田型の近似作用素を応用した近似方程式に関して議論を行う。従来の先験的評価に基づく手法で

は、エネルギー保存則に対応する解を、滑らかな解によって近似し、近似解の弱極限として構成する。対して本論文では、吉田型の平滑化作用素を用いたエネルギー保存則に対応する近似方程式を導入する事で、エネルギーに対応する解を、近似解の極限として構成する。特に、吉田型の平滑化作用素に対する双線型評価を見直す事で、近似解の収束が初等的に議論出来る事を示す。そして、近似解に対する収束性を強化した事で、近似解の極限が実際に半相対論的方程式の解である為の検証を容易に出来る事を示す。

半相対論的方程式の弱解の非存在性に就いては、ゲージ不変性の無い $f(z) = |z|^p$ ($p > 1$) に関して、原点に適当な特異性を有する初期値に対応する時間局所的な弱解が存在しない事を示す。一次元に於いては、特異性を有する関数は、 $1/2$ 以下の階数のソボレフ空間のみに属する。加えて、半相対論的方程式がストリッカーツ型の平滑化作用を有する場合、非線形効果を考慮しない初期値問題の可解性は f の次数のみに依存すると考えられる。弱解が存在しない為の条件と、上記の事実を合わせる事で、半相対論的発展作用素の平滑化効果が、 $1/2$ 階以下のソボレフ空間に於いて、半相対論的方程式の解を構成する為には不十分である事を議論する。半相対論的方程式の弱解の存在の議論に関しては、戌亥（いぬい）によって、優臨界尺度に於いて時間局所的な弱解が存在しないような初期値の条件が発見されている。対して本論文では、劣臨界尺度に於いても半相対論的方程式の時間局所的な弱解が存在しない事を、試験関数を用いた議論によって示す。特に、試験関数を用いた議論で重要である、非局所的な分数階微分を方程式から取り除く変形と、適当な試験関数列の構成に就いて論じる。具体的には、分数階微分は、半相対論的方程式をクライン・ゴルドン方程式に近い方程式に変形する事で取り除かれる事を示す。又、質量が無い場合の半相対論的方程式を不変に保つ時空尺度変換の均衡を崩す様な試験関数を導入する事で、劣臨界尺度に於いても半相対論的方程式の時間局所的な弱解が存在しない事を示す。

本論文の構成に就いて述べる。第一章では、半相対論的方程式の物理的背景と問題設定、記法の整備と主定理に就いて述べる。第二章では、二次の非線形項を伴った半相対論的方程式の初期値問題に関して、非線形評価と対応する初期値問題の適切性に就いて論じる。第三章では、エネルギー保存則に基づく改良した解の構成方法に就いて論じる。第四章では、絶対値の冪乗型の非線形項を伴う半相対論的方程式の初期値問題に対する弱解の非存在性に就いて論じる。加えて、付録第一章に於いて、第二章と第三章で論じた二次の非線形項に対する非線形評価に対応する適切性と、エネルギー保存則に基づく適切性とを、半相対論的方程式系に対して行う。付録第二章では、第一章と付録第一章で扱った双線型評価に関する初等的な証明を与える。付録第三章では、ソボレフノルムに対する非線形評価に就いて、分数階の微分に対するライブニッツ則によって再考する。

早稲田大学 博士 (理学) 学位申請 研究業績書

氏名 藤原和将 印

(2016年 7月 現在)

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者 (申請者含む)
論文 ○ (査読有)	<p>1. Weighted L_p-boundedness of convolution type integral operators associated with bilinear estimates in the Sobolev spaces, J. Math. Soc. Japan, vol.68, no.1, pp.169-191, 2016年, 藤原和将・小澤徹.</p> <p>○ 2. Remarks on global solutions to the Cauchy problem for semirelativistic equations with power type nonlinearity, Int. J. Math. Anal., vol.9, no.53, pp.2599-2610, 2015年, 藤原和将・小澤徹.</p> <p>○ 3. Remark on local solvability of the Cauchy problem for semirelativistic equations, J. Math. Anal. Appl., vol.432, no.2, pp.744-748, 2015年, 藤原和将.</p> <p>○ 4. Well-posedness for the Cauchy problem a system of semirelativistic equations, Comm. Math. Phys., vol.338, no.1, pp.367-391, 2015年, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>○ 5. On a system of semirelativistic equations in the energy space, Commun. Pure Appl. Anal., vol.14, no.4, pp.1343-1355, 2015年, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>○ 6. Remarks on bilinear estimates in the Sobolev spaces, to appear in RIMS kōkyūroku Bessatsu, 藤原和将・小澤徹.</p> <p>7. Remark on a semirelativistic equation in the energy space, Discrete Contin. Dyn. Syst., Dynamical systems, differential equations and applications. 10th AIMS Conference. Suppl. pp. 473-478, 2015年, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>8. Stability of the Young and Hölder inequalities, J. Inequal. Appl., 2014:162, 2014年, 藤原和将・小澤徹.</p> <p>9. Identities for the difference between the arithmetic and geometric means, Int. J. Math. Anal., vol.8, no.31, pp.1525-1542, 2014年, 藤原和将・小澤徹.</p> <p>10. Exact remainder formula for the Young inequality and applications, Int. J. Math. Anal., vol.7, no.55, pp.2723-2735, 2013年, 藤原和将・小澤徹.</p>
講演 (国際会議)	<p>1. Nonexistence of local solutions for the Cauchy problem of semirelativistic equations, Workshop on Analysis in Kagurazaka 2016(開催地:東京理科大学), 2016年1月, 藤原和将.</p>

早稲田大学 博士（理学） 学位申請 研究業績書

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
(国内会議)	<p>2. Remark on local solvability of the Cauchy problem for semirelativistic equations, International Workshop on “Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics” (開催地：早稲田大学), 2015年10月, 藤原和将.</p> <p>3. The well-posedness of the Cauchy problem for a semirelativistic system, 10th AIMS Conference Series on Dynamical Systems and Differential Equations (開催地：Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), the Universidad Autónoma de Madrid (UAM)), 2014年7月, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>4. Weighted L_p-boundedness of convolution type integral operators associated with bilinear estimates in the Sobolev space, RIMS 研究集会：調和解析と非線形偏微分方程式 (開催地：京都大学), 2014年7月, 藤原和将・小澤徹.</p> <p>5. Well-posedness for the Cauchy problem of a system of semirelativistic equations, One Forum, Two Cities 2013: Aspect of Nonlinear PDEs (開催地：東京), 2013年9月, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>6. 半相対論的方程式の劣臨界尺度に於ける可解性, 第23回応用解析研究会シンポジウム(開催地：湯河原), 2016年2月, 藤原和将.</p> <p>7. Nonexistence of local solutions for the Cauchy problem of semirelativistic equations, The 22nd Machikaneyama Seminar on PDEs (開催地：大阪), 2016年2月, 藤原和将.</p> <p>8. 半相対論的方程式の局所可解性について, 第41回発展方程式研究会 (開催地：日本女子大学), 2015年12月, 藤原和将.</p> <p>9. 半相対論的方程式の時間局所可解性に就いて, 日本数学会2015年度秋季総合分科会 (開催地：京都産業大学), 2015年9月, 藤原和将.</p> <p>10. On the global solvability to the Cauchy problem for semirelativistic equations with power type nonlinearity, 第22回応用解析研究会シンポジウム(開催地：熱海), 2015年3月, 藤原和将・小澤徹.</p> <p>11. On the nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for semirelativistic equations with power type nonlinearity, 名古屋微分方程式セミナー(開催地：名古屋大学), 2015年1月, 藤原和将・小澤徹.</p> <p>12. A remark on global solutions to Semirelativistic equations with power type nonlinearity, 数理物理に現れる偏微分方程式研究会(開催地：伊豆), 2015年1月, 藤原和将・小澤徹.</p>

早稲田大学 博士（理学） 学位申請 研究業績書

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
	<p>13. 半相対論的方程式系に於ける初期値問題の適切性, 三大学偏微分方程式セミナー (開催地: 中央大学), 2014年4月9, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>14. 半相対論的方程式系の時間大域可解性, 日本数学会2014年度年会 (開催地: 学習院大学), 2014年3月, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>15. 半相対論的方程式系に於ける可解性, 第21回応用解析研究会シンポジウム (開催地: 箱根), 2014年3月, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>16. 半相対論的連立方程式系の初期値問題に対する時間大域可解性, 若手のための偏微分方程式と数学解析 (開催地: 九州大学), 2014年3月, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>17. 二次の非線形項を伴う半相対論方程式系に於ける初期値問題の適切性, 日本数学会2013年度秋季総合分科会 (開催地: 愛媛大学), 2013年9月, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p> <p>18. 二次の非線形項を伴う半相対論方程式系に於ける初期値問題の適切性, 第35回発展方程式若手セミナー (開催地: 山形), 2013年8月, 藤原和将・町原秀二・小澤徹.</p>