早稲田大学大学院 先進理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Mathematical foundations of semirelativistic nonlinear fields

半相対論的非線形場の数学的基礎

申　請　者

Kazumasa	FUJIWARA
藤原	和将

物理学及応用物理学専攻　数理物理学研究

2016 年 10 月

相対論的量子化の自由部分の記述の基礎は、自由粒子としての電子の質量、運動量とエネルギーの関係を光速度を仲介として表した等式 $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ を偏微分作用素の関係式として解釈する事によって導かれるが、これには大きく分けて三通りの方法がある。

第一の方法はクライン・ゴルドン方程式として定式化するものである。これは時間についても空間についても二階の偏微分方程式となり、質量を持つ粒子の分散性と双曲性（有限伝播性）の波動現象を良く表現する方程式であるが、量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式の持つ確率解釈（L^2 ノルム又は全電荷の保存則）を継承しないので、粒子を対象とした相対論的量子力学の基礎方程式とは見做されない。一方、相互作用の有る場の方程式として、湯川の中間子論の基礎を担うなど、非線形性を取り入れた状況では基礎方程式としての有効性を発揮するものとして知られている。また、エネルギー（ソボレフ空間 H^1 ノルム）の保存則との整合性を持ち、時間に関する積分方程式に転換した際の非斉次項（デュアメル項）において１階の滑らかさを恢復するので、数学的取扱いには有利な点を数多く持っている。

第二の方法はディラック方程式として定式化するものである。これは波動函数を多成分化（ベクトル化）し、単独方程式の代りに方程式系として考える方法である。 この定式化では L^2 ノルム（全電荷）の保存則が成立するので、粒子を対象とした相対論的量子力学の基礎方程式として広く受け入れられている。一方、ディラック方程式は、エネルギーに相当する概念を導入する事が困難であり、クライン・ゴルドンの非斉次項における滑らかさの恢復も起こらないので、数学的な研究対象として困難な点を抱えている事になる。

第三の方法が半相対論的定式化で、その線形部分を $i\partial_t \pm \sqrt{m^2 - \Delta}$ として考える方法論である。これは、クライン・ゴルドンの複素レベルでの因数分解とも、ベクトル化しないディラックとも見做す事が出来るが、空間についての作用素が最早微分作用素ではなく、擬微分作用素の一種であるフーリエ乗法作用素 $\mathcal{F}^{-1}(m^2 + |\xi|^2)^{1/2}\mathcal{F}$ として意味を持つものになる。これは非局所的作用素であり、作用する函数の影響が大域的に拡がってしまう為、線形レベルでも解析学的取扱いには様々な困難を伴う。線形レベルでの非局所性の困難の例として、ナビエ・ストークス方程式におけるストークス（ヘルムホルツ・ルレイ）射影作用素 $\mathcal{F}^{-1}(\delta_{ij} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2})\mathcal{F}$ の導入のもたらす影響が、これに相当するものであり、本質的な問題を内包していると考えられる。一方、クライン・ゴルドン方程式でもディラック方程式でも、その数学的基礎は半相対論的発展作用素 $\exp(\pm it\sqrt{m^2 - \Delta}) = \mathcal{F}^{-1}\exp(\pm it\sqrt{m^2 + |\xi|^2})\mathcal{F}$ の分散評価やストリッカーツ評価が担っているので、結局全ての根源に位置するのは半相対論的枠組と考えられる。従って、この分野における数学的問題の本質的な所は半相対論的方程式の問題に帰着される事となる。

	クライン・ゴルドン方程式	ディラック方程式	半相対論的方程式
時間微分	2 階	1 階	1 階
空間微分	2 階	1 階	1 階（擬微分）
波動函数	スカラー値	ベクトル値	スカラー値
デュアメル項に於ける滑らかさ	1 階向上	不変	不変
電荷	不定値	正定値	正定値
エネルギー	正定値	不定値	正定値

自由方程式(free equation)レベルでの立場の違いに応じた非線形モデルが自然な興味の対象として研究されている。その中でも第三の立場である半相対論的非線形偏微分方程式の研究は最近注目されるようになっている。具体的には、ハートリー型の相互作用を持つ半相対論的方程式をホゾン星の状態方程式として定式化した Fröhlich と Lenzmann の研究が先駆を成すものである。

ハートリー型の相互作用は函数の滑らかさを上げる効果を持つため、取扱いは容易であり、一般化も期待通りに行うことが可能である。一方、通常の冪型の相互作用は、一様評価をソボレフ埋蔵の枠組で行う限り、空間次元 n の半分より高い滑らかさ（ $n/2+\varepsilon$ ）を失ってしまう。一次元の場合（ $n=1$)、ソボレフ空間 $H^{1/2}=(1-\Delta)^{-1/4}L^2$ が臨界空間として位置付けられる。実際 Krieger, Lenzmann と Raphaël は $H^s(s>1/2)$ の場合をまず逐次近似の方法で論じ、$H^{1/2}$ の場合は解の存在はコンパクト性を用いる方法で示し、一意性は改めてユドビッチ・ウラジミロフの方法で証明している。

半相対論的方程式は、理論物理の研究対象としても最近活発に取り上げられているが、 その手法は主要部 $\sqrt{m^2-\Delta}$ を形式的にテーラー展開し、有限項で打ち切った形（例えば $m-\frac{1}{2m}\Delta+\frac{1}{8m^3}\Delta^2$ ）を基礎としている。この方法では、主要部は通常の偏微分作用素となり局所性は恢復するものの、数学的には全くタイプの異なる方程式を扱っている事になり、却って本質を見失ってしまう可能性を持つ。

申請者は主に二次の相互作用を持つ半相対論的方程式及びその系に対する初期値問題を一次元の場合に研究した。特に、複素共軛を通じた相互作用に対してブルガン法（フーリエ制限法）が有効に働く仕組みを解明し、有限電荷クラス（ L^2 クラス）での時間大域解の一意的存在の証明を与えた事は顕著である。更に、エネルギー構造と両立するように吉田近似を二重に施した近似方程式から出発し、臨界空間 $H^{1/2}$ に相当するエネルギークラスの一様評価を得るとともに、積分方程式を巧妙に評価して L^2 レベルで近似解がコーシー列を成していることを示し、Krieger, Lenzmann と Raphaël の方法論とは独立の見通しの良い解の構成法を考案した。この方法論はコンパクト性に基づく解の存在証明を大きく変える可能性を持っており、非線形シュレディンガー方程式の初期境界値問題やベンジャミン・オノ方程式、ゼゲー方程式等のハミルトン系の基礎理論に応用が期待されるものである。

本博士論文は、それらの成果に基づき、今迄に行われた申請者の研究を系統的に論じたものである。本論文は 4 つの章と補遺から成っている。

第一章では、半相対論的方程式の物理学的背景とその導入、数学的基礎を論じるための問題設定、基本的函数空間の纏め、先行研究の紹介とその比較検討を行った後に、主結果を３つの定理として纏めている。

第二章では、二次の自己相互作用を持つ単独方程式について、波動函数 ψ に対し $\bar{\psi}^2, \psi^2, |\psi|^2 = \psi\bar{\psi}$ の三つの場合をそれぞれ論じている。特に $\bar{\psi}^2$ の相互作用に対して、ブルガン法（フーリエ制限法）が有効に働く機構を解明している。ブルガン法とは相互作用描像（朝永描像）における場の方程式の時空フーリエ変換に基づく解析法であり、相互作用毎に適切な評価を確立する事が鍵となる。従って、二次の相互作用に応じた新たな双線形評価を証明する事が主題であり、それが第二章の中心テーマとなっている。

第三章では、コンパクト性に基づく従来の解の構成法を、吉田近似に基づく近似解の構成、その一様エネルギー評価、電荷ノルムに於いてコーシー列を成す事の証明、の三つの段階に分け、有界性と完備性に基づく解の構成法に書き換えたものである。

第四章では、解の時間大域的存在に於いてゲージ条件が果たす役割を、否定的な立場から検討したものである。具体的には、自己相互作用がゲージ条件を満たさない場合、零以外の解は時間大域的に存在し得ない事を証明したものである。

上記の研究遂行に当り、良く知られた不等式の改良や一般化の必要に迫られ、新しい不等式の考案とその証明に取り組んだ成果を纏めたものが補遺である。加藤・ポンセの交換作用素の評価（分数冪ライプニッツ評価）をはじめ、それ自身興味深く、応用上にも有用な不等式が数多く示されている。

以上を要約すると、本論文は半相対論的非線形場の数学的諸問題を初期値問題の大域解の存在・非存在の視点から論じたものであり、逐次近似の枠組の有効性とその限界をも明らかにした点に、極めて高い学術的価値を持つものである。

よって本論文は博士（理学）の学位論文として相応しいものとして認める。

2016年7月

審査委員（主査）　早稲田大学教授　理学博士（京都大学）　小澤　徹

（副査）　早稲田大学教授　理学博士（東京大学）　大谷光春

早稲田大学教授　理学博士（北海道大学）　小薗英雄

早稲田大学教授　理学博士（早稲田大学）　田中和永