有限加法的測度に関するある定理について

国定　亮一

1　序言

Ωを集合，$\mathcal{F}$をΩのある部分集合の族のなす有限加法族とする。$\mathcal{F}$上で定義された集合関数$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$は$A \cap B = \emptyset$を満たす任意の$A, B \in \mathcal{F}$に対して$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$を満たすとき有限加法的測度という。そして三つ組み$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$を有限加法的測度空間と呼ぶ。すなわち，通常の測度の定義で要求される可算加法性をより弱い有限加法性でおきかえ一般化したものである。有限加法的測度を体系的に記述した本としては［1］が挙げられる。この本では測度論の概念や結果の有限加法的測度への種々の一般化が論じられている。しかし有限加法性という弱い仮定の元ではL^p-空間の完備性やRadon-Nikodymの定理など測度論における主要な定理が成立しない。そこで重要になってくるのが有限加法的測度の加法性と呼ばれる性質である。これは可算加法性の自然な一般化といえ，特にこれを満たす有限加法的測度に対しては上記二つの結果が成立することが知られている。本稿では加法性に関するいくつかの結果をBasileとRaoの論文［2］に沿って紹介する。またその中にある結果の一つである有限加法的測度の有限和が加法性を持つための必要十分条件を可算和のケースへと一般化できたため，5節にてその証明を与える。

以下本稿では$\mathcal{F}$は常にσ-加法族であるとし，またμは有限，すなわち$\mu(\Omega) < \infty$とする。また特に断らない限りμは非負であるとする。まずμが可算加法的であるとは次の性質が成り立つことをいうのであった。$\mathcal{F}$の増大列$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$が与えられえたとき，$B = \cup_{i \geq 1} A_i$とおくと，

$$\mu(B) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

が成立する。次にこれよりは弱い次の主張を考える。μが加法性を満たすとは次の性質が成り立つことをいう。$\mathcal{F}$の増大列$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$が与えられたとき，次の二つの条件を満たす$B \in \mathcal{F}$が存在する。

（1）$\mu(B) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$,

(2) $\mu(A_i \setminus B) = 0 \quad for\ every\ i = 1, 2, \ldots.$

もしμが可算加法的ならば単にBとして$\cup_{i\geq 1} A_i$をとれば条件（1），（2）は満たされるから加法性は可算加法性よりは弱い主張であることが分かる。さらに可算加法的ではないが加法性を満たすような有限加法的測度が存在する。例えば［2］や［3］を参照。

2 準備

この節では次節以降で必要ないくつかの概念を導入する。特に通常の（可算加法的）測度に関して絶対連続性や特異性の概念はよく知られているが，これらを有限加法的測度に対しても定義することができる。これらの概念は有限加法的測度の加法性とも密接な関係を持っている。

まずは有限加法的測度空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$が与えられたとき，$\mu$の$\mathcal{F}$の Stone 空間上の Borel 測度への拡張について述べる。これは有限加法的測度に関する種々の概念の定式化などにおいて重要な役割を果たす手法である。

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$を有限加法的測度空間とする。Boole 代数の Stone の表現定理により，$\mathcal{F}$に対してあるコンパクト空間Fが存在して，F上の開閉集合全体のなす有限加法族を$\mathcal{C}$とおくとき Boole 代数の同型写像$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$が存在する。さらに$\mathcal{C}$上で$\hat{\mu}(\phi(A)) = \mu(A)$と定義すると，有限加法的測度空間$(F, \mathcal{C}, \hat{\mu})$を得る。すると$\hat{\mu}$は$\mathcal{C}$上で可算加法的であるから，Hopf の定理により$\mathcal{C}$の生成する$\sigma$-加法族$\sigma(\mathcal{C})$上の可算加法的測度に拡張できる。さらにこれは$F$の Borel 集合族$\mathcal{B}(F)$の上の正則な測度に一意に拡張できる。以上の方法により任意の有限加法的測度空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$に対して測度空間$(F, \mathcal{B}(F), \hat{\mu})$を対応させることが出来る。またこのとき有限加法的測度μの台を$\hat{\mu}$のFにおける台のこととしS_μとおく。

以下の定義においてμ，νは可測空間$(\Omega, \mathcal{F})$上の二つの有限加法的測度とする。

定義 2.1. νがμに対して絶対連続であるとは，任意の$\varepsilon > 0$に対して，ある$\delta > 0$が存在して任意の$A \in \mathcal{F}$に対して，$\mu(A) < \delta$ならば$\nu(A) < \varepsilon$が成立することである。このとき$\nu \ll \mu$と書くことにする。

定義 2.2. νがμに対して弱絶対連続であるとは，任意の$A \in \mathcal{F}$に対して，$\mu(A) = 0$ならば$\nu(A) = 0$が成立することである。このとき$\nu \prec \mu$と書くことにする。

定義 2.3. νとμが特異であるとは，任意の$\varepsilon > 0$に対して，ある$D \in \mathcal{F}$が存在して$\mu(D) < \varepsilon$かつ$\nu(D^c) < \varepsilon$が成立することである。このとき$\nu \perp \mu$と書くことにする。

定義 2.4. νとμが強特異であるとは，ある$D \in \mathcal{F}$が存在して，$\mu(D) = 0$かつ$\nu(D^c) = 0$が成

立することである。このとき$\nu \perp\!\!\!\perp \mu$と書くことにする。

これらの概念は上で定義したそれぞれμ, νに対応して定まる可測空間$(F, \mathcal{B}(F))$上の測度$\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$を用いて以下のよう定式化することが可能である。

定理 2.1. $\nu \ll \mu$が成立するための必要十分条件は$\hat{\nu} \ll \hat{\mu}$が成立することである。ここで後者は測度に対する通常の絶対連続性を表すとする。

定理 2.2. $\nu \prec \mu$が成立するための必要十分条件は$S_\nu \subseteq S_\mu$が成立することである。

定理 2.3. $\nu \perp \mu$が成立するための必要十分条件は$\hat{\nu} \perp \hat{\mu}$が成立することである。ここで後者は測度に対する通常の特異性を表すとする。

定理 2.4. $\nu \perp\!\!\!\perp \mu$が成立するための必要十分条件は$S_\nu \cap S_\mu = \emptyset$が成立することである。

これらの概念に関連して最後にLebesgueの分解定理の有限加法的測度に対する一般化について述べる。

定理 2.5. μ, νを$(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度とすると，次の性質を満たす$(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度ν_1, ν_2が存在する。

(*1*) $\nu = \nu_1 + \nu_2$.
(*2*) $\nu_1 \ll \mu$.
(*3*) $\nu_2 \perp \mu$.

さらに（*2*）と（*3*）を満たすνの分解は一意である。

3　加法性と同値な主張

この節では加法性と同値な言い換えをいくつか述べる。加法性は測度の可算加法性のある種の一般化と言え，これを満たす有限加法的測度に対して測度論における主要ないくつかの結果を一般化することができる。特に元々加法性は有限加法的測度空間μ上のp乗可積分関数全体のなす空間$L^p(\mu)$が完備になるための条件として考えられた。これはμが測度の時はよく知られた結果である。空間$L^p(\mu)$の具体的な構成法については［2］または［3］を参照してほしい。

定理 3.1. $(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度μに対してμが加法性を満たすための必要十分条件はμ上のL^p-空間$L^p(\mu)(p \geq 0)$が完備になることである。

次の結果は Radon-Nikodym の定理の有限加法的測度への一般化と考えられる。

定理 3.2. $(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度μに対してμが加法性を満たすための必要十分条件は任意の$(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度νで$\nu \ll \mu$なるものに対してある$f \in L^1(\mu)$が存在して任意の$A \in \mathcal{F}$に対して$\nu(A) = \int_A f d\mu$が成立することである。

次の結果は Hahn の分解定理の有限加法的測度への一般化と考えられる。

定理 3.3. $(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度μに対してμが加法性を満たすための必要十分条件は任意の非負とは限らない$(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度νで$\nu \ll \mu$なるものに対して次を満たす$A \in \mathcal{F}$が存在することである。任意の$B \subseteq A$なる$B \in \mathcal{F}$に対して$\nu(B) \geq 0$が成立し，任意の$B \subseteq A^c$なる$B \in \mathcal{F}$に対して，$\nu(B) \leq 0$が成立する。

次の Stone 空間を用いた定式化は 5 節の証明において重要な役割を果たす。

定理 3.4. μが加法性を満たすための必要十分条件はS_μの任意のBorel集合Aに対して，$\hat{\mu}(\overline{A}) = \hat{\mu}(A)$が成立することである。ここで$\overline{A}$は$A$の$S_\mu$における閉包を表す。

最後に有限加法的測度のなす空間の束構造を用いた加法性の定式化を述べる。有限加法的測度μに対して$0 \leq \tau \leq \mu$を満たす有限加法的測度τでτと$\mu - \tau$が特異なものをμの成分と呼ぶ。この概念を用いてμの加法性を定式化することが出来る。

定理 3.5. $(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度μが加法的であるための必要十分条件は，μの任意の成分τに対して，τと$\mu - \tau$が強特異なことである。

4　有限加法的測度の有限和の加法性

この節では二つまたは一般に有限個の有限加法的測度の和で表される有限加法的測度が加法性を持つための必要かつ十分な条件について述べる。一般には$(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度μとνが加法性を満たしてもその和$\mu + \nu$が加法性を満たすとは限らない。まずは次の結果が成立する。

定理 4.1. μ, νを$(\Omega, \mathcal{F})$上の有限加法的測度とし，$\nu \ll \mu$が成立するとする。このときμが加法性

を満たすならばνも加法性を満たす。

このことと2節で述べたLebesgueの分解定理により，互いに特異なペアμ，νに対してその和$\mu+\nu$が加法性を満たすための条件を考えれば十分であることが分かる。それは次の定理で与えられる。

定理 4.2. μとνは互いに特異な$(\Omega,\mathcal{F})$上の有限加法的測度とする。このとき$\mu+\nu$が加法性を満たすための必要十分条件はμとνがそれぞれ加法性を満たし，かつμとνが強特異なことである。

この結果は任意有限個の有限加法的測度の和に関する主張に容易に拡張できる。

定理 4.3. $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$を互いに特異な$(\Omega,\mathcal{F})$上の有限加法的測度とする。このとき$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n$が加法性を満たすための必要十分条件は，すべての$\mu_i, 1\leq i\leq n$が加法性を満たしかつ互いに強特異であることである。

5 有限加法的測度の可算和の加法性

この節では前節の結果の拡張を与える。前節では有限和を考えたが，本節ではその次に単純な可算和について考える。

定理 5.1. $\{\mu_i\}_{i\geq 1}$を$(\Omega,\mathcal{F})$上の有限加法的測度の可算族で互いに特異なものとし，$\mu=\sum_{i\geq 1}\mu_i$が存在するものとする。各μ_iの台をS_i，μの台をSとおく。このときμが加法性を満たすための必要十分条件は各μ_iが加法性を満たし，かつ互いに強特異であり，さらに次が成立することである。

$$\limsup_i S_i \cap (\cup_{i\geq 1} S_i) = \emptyset.$$

ここで$\limsup_i S_i = \cap_{i\geq 1}\overline{\cup_{j\geq i} S_j}$である。

証明.（十分性）定理*3.4*の条件を示す。任意の$A\in\mathcal{B}(F)$をとる。μの定義より$\hat{\mu}=\sum_{i\geq 1}\hat{\mu}_i$であるから$\hat{\mu}$は$\cup_{i\geq 1}S_i$の上に乗っている。また$\hat{\mu}_i$は互いに強特異であるから，$\hat{\mu}(A)=\hat{\mu}(A\cap\cup_{i\geq 1}S_i)=\sum_{i\geq 1}\hat{\mu}(A\cap S_i)$が成立する。

以下ではFのBorel集合Xに対して，$B\subseteq X$のXにおける閉包を$\overline{B}^X$と記す。特に$X=F$のときは添え字は省略する。仮定より$S=\cup_{i\geq 1}S_i\cup\limsup_i S_i$及び$\cup_{i\geq 1}S_i\cap\limsup_i S_i=\emptyset$であることに注意する。まず各$\mu_i$は加法性を満たすから定理*3.4*及び$\mu_i$が互いに強特異であるという仮定から，$\hat{\mu}(\overline{A\cap S_i})=\hat{\mu}_i(\overline{A\cap S_i})=\hat{\mu}_i(\overline{A\cap S_i}^{S_i})=\hat{\mu}_i(A\cap S_i)=\hat{\mu}(A\cap S_i)$が成

立している。

さて一方で $\overline{A \cap S} = \overline{A \cap (\cup_{i\geq 1} S_i \cup \limsup_i S_i)} = \overline{\cup_{i\geq 1}(A \cap S_i)} \cup \overline{A \cap \limsup_i S_i} = \cup_{i\geq 1}\overline{A \cap S_i} \cup \overline{A \cap \limsup_i S_i}$ であり，$\hat{\mu}(\limsup S_i) = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(\overline{A \cap S}^S) &= \hat{\mu}(\overline{A \cap S}) = \hat{\mu}(\cup_{i\geq 1}\overline{A \cap S_i}) + \hat{\mu}(\overline{A \cap \limsup_i S_i}) \\ &= \sum_{i\geq 1}\hat{\mu}(\overline{A \cap S_i}) = \sum_{i\geq 1}\hat{\mu}(A \cap S_i) = \hat{\mu}(A \cap S).\end{aligned}$$

以上より再び定理 *3.4* より μ が加法性を満たすことが分かる。

（必要性）$\{\mu_i\}_{i\geq 1}$ が互いに特異で $\mu = \sum_{i\geq 1}\mu_i$ が加法性を満たすとする。まず任意の相異（あいこと）なるペア μ_n と μ_m を考える。$\mu' = \sum_{i\geq 1, i\neq n}\mu_i$ を考えると，$\mu' \perp \mu_n$ であり，$\mu = \mu' + \mu_n$ であるから，μ の加法性より定理 *4.2* から μ' と μ_n はそれぞれ加法性を満たし，かつ互いに強特異である。特に $\mu_m \ll \mu'$ であるから μ_m と μ_n はまた強特異である。次に $\limsup_i S_i \cap \cup_{i\geq 1} S_i \neq \emptyset$ と仮定する。特に $\limsup_i S_i \cap S_n \neq \emptyset$ なる $n \geq 1$ を固定する。このとき同様に $\mu' = \sum_{i\geq 1, i\neq n}\mu_i$ を考える。このとき μ' の台 S' は $S' = \cup_{i\geq 1, i\neq n} S_i \cup \limsup_i S_i$ であるから，$S' \cap S_n \neq \emptyset$ となりすなわち μ' と μ_n は強特異ではない。しかしこれは上と同様の議論より定理 *4.2* と矛盾する。以上により条件の必要性が示された。

［参考文献］

［1］K. P. S. Bhaskara Rao, M. Bhaskara Rao, Theory of charges, Academic Press (1983).

［2］A. Basile, K. P. S. Bhaskara Rao, Completeness of L_p-Spaces in the Finitely Additive Setting and Related Stories, J. Math. Anal. Appl. 248, (2000), 588–624.

［3］A. Blass, R. Frankiewicz, G. Plebanek, C. Ryll-Nardzewski, A note on extensions of asymptotic density. Proc. Amer. Math. Soc. 129 (11) (2001) 3313–3320.