

# 博士論文審査報告書

## 論文題目

Studies on methods for verifying the  
accuracy of numerical solutions of  
symmetric saddle point linear systems

対称な鞍点行列を係数に持つ連立一次方程式  
の解に対する精度保証付き数値計算法  
に関する研究

申請者

|     |           |
|-----|-----------|
| Ryo | KOBAYASHI |
| 小林  | 領         |

数学応用数理専攻 数値解析研究

2018年2月

本論文では、対称な鞍点行列を係数に持つ連立一次方程式の解に対する精度保証付き数値計算法が提案されている。対称な鞍点行列を係数に持つ連立一次方程式とは次のような  $2 \times 2$  のブロック行列を係数に持つ連立一次方程式である。

$$Hu = b, \quad H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

ここで、 $A \in R^{n \times n}$ ,  $C \in R^{m \times m}$  はそれぞれ対称半正定値であり、 $B \in R^{n \times m}$  ( $n \geq m$ ) は列 full rank ( $\text{rank}(B) = m$ ) であり、 $x, f \in R^n$ ,  $y, g \in R^m$  とする。本論文では、この鞍点行列を係数に持つ連立一次方程式を鞍点問題と呼ぶ。このような鞍点問題に対して、数学的に厳密な解の存在と一意性を証明し、さらに厳密解と近似解の誤差上界を求めることを目的としている。本論文では、このような方法を精度保証付き数値計算法と呼んでいる。

数値計算は、様々な自然現象や社会現象をシミュレーションする際に用いられるが、離散化(線形化)する時の誤差や数値計算する時の数値計算誤差など様々な誤差が発生し、計算結果に重大な影響を与えることがある。精度保証付き数値計算では、数理モデル化した後の計算における全ての誤差を考慮して近似解と厳密解の誤差上限を計算する。本研究では、特に丸め誤差などを含む数値計算誤差について考慮されている。

鞍点問題は、Stokes 方程式などの偏微分方程式を弱形式化し有限要素法を用いて得られる方程式や最適化問題において KKT 条件を満たす方程式など様々な科学計算や工学の分野から現れる方程式であり、Golub など多くの研究者によって研究されてきた。この鞍点問題の解法として、Schur 補元 ( $S = B^T A^{-1} B + C$ ) と呼ばれる行列を用いた方法がある。この方法は、元の連立方程式より次元の小さい  $Sy = B^T A^{-1} f - g$ ,  $Ax = f - By$  という 2 つの連立方程式を解く方法である。

一般的な連立一次方程式に対する精度保証付き数値計算法は、係数行列の近似逆行列  $R \approx H^{-1}$  を用いる方法が良く知られている。例えば、バナッハの縮小写像原理から導かれる近似逆行列を用いた定理や成分毎に評価を行う Yamamoto の定理などがある。しかし、2000 年代になり、この鞍点問題に対して、係数行列の近似逆行列を使用せず Schur 補元を用いる方法が研究されている。Chen と Hashimoto は、2003 年に行列  $A$  が対称正定値行列、 $C$  が対称半正定値行列である問題に対する精度保証付き数値計算法を開発した。この方法は、前述した Schur 補元を用いた 2 つの連立方程式に基づいて  $x, y$  それぞれの誤差を行列のノルム評価を用いて計算する方法であり、従来方法である近似逆行列を用いた方法より高速に精度保証可能である。さらに、2009 年には Kimura と Chen により行列  $A$  が対称半正定値行列且つ  $C = 0$  (零行列) である問題に対する精度保証付き数値計算法が研究されている。この方法は  $A$  と  $S$  とを対角成分に持つブロック対角行列を前処理行列として使用する方法である。

しかし、これまでの研究では  $A$  と  $C$  とが共に対称半正定値行列であるような問題

に対して、Schur 補元を用いた従来の方法より高速な精度保証付き数値計算法は研究がされていなかった。そこで、本研究ではこのような問題を扱い従来の方法より高速な精度保証付き数値計算法を提案する。

本論文は5章から構成される。第1章では、前述した研究背景に加え、研究目的および概要を述べている。第2章では、本論文で使用する記法と共に鞍点問題に対する Schur 補元を用いた精度保証付き数値計算法の先行研究である Chen と Hashimoto の方法と Kimura と Chen の方法が紹介されている。

第3章では、鞍点問題の解に対する Schur 補元に基づく新たな精度保証付き数値計算法が提案されている。この方法は大きく3つに分けられている。1つ目は、対象の連立一次方程式に対して行列  $A$  を正則化する方法である。本問題では行列  $A$  が対称半正定値であるため、そのままでは  $A^{-1}$  を含む Schur 補元をそのまま用いることができない。 $C=0$  の場合について、正則化の方法は開発されているが、 $C \neq 0$  の場合については研究されていないため、その方法を新たに提案している。この方法では、行列  $A$  が対称半正定値行列、且つ行列  $H$  が正則という条件の元で、 $\tilde{A} = A + BWB^T$  が対称正定値行列、 $\tilde{B} = B - BWC$  が full rank、 $\tilde{C} = C - C^TWC$  が対称半正定値行列という条件を満たす対称正定値行列  $W$  が存在するという命題が示されている。さらに、この命題の行列  $W$  に基づく前処理行列を用いて、 $A$  を正則化する方法が提案されている。

次に、行列  $A$  を正則化した連立一次方程式に対して、Schur 補元に基づく前処理行列を用いて前処理付き係数行列の固有値の範囲を限定する。前処理行列として行列  $A$  と  $S$  を成分に持つブロック対角行列  $P$  を用いる。Axelsson と Neytcheva の研究により、前処理付き係数行列  $P^{-1}H$  の全ての固有値が閉区間  $[-1, -\frac{1}{2}]$  と閉区間  $[1, 2]$  との和集合に含まれることが証明されている。本論文ではこれを改善し、前処理付き係数行列  $P^{-1}H$  の全ての固有値が半开区間  $(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$  と閉区間  $[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$  との和集合に含まれるという補題が示されている。

さらに、この前処理付き係数行列の固有値を用いて、厳密解と数値計算により得られた近似解との誤差上限を求める定理が提案されている。補題より前処理付き係数行列の絶対値最少固有値は  $2/(\sqrt{5}-1)$  であることがわかる。厳密解と近似解との誤差上限が、前処理付き係数行列の絶対値最少固有値の逆数と前処理行列の逆行列  $P^{-1}$  の2ノルム、残差の2ノルムとの3つ値の積で与えられることが示されている。

本論文で提案された定理において計算が必要な成分は、 $A^{-1}$  と  $S^{-1}$  と残差の2ノルムであるが、これらは Chen と Hashimoto の方法でも計算が必要な成分と一致する。従って、一度これらの値を計算することで2つの誤差上限を得ることができ、2つの誤差上限のうち良い評価の方を採用することで誤差上限を改善できる。

本章では、さらに先行研究で提案されている前処理行列を用いた誤差上限を改

善する方法も提案されている。この方法は、例えば Stokes 方程式に対して混合有限要素法を用いて得られた連立一次方程式では、 $\|(B^T B)^{-1}\|$ の値が分割サイズ  $h$  の逆 2 乗に比例するため、分割サイズが小さくなると誤差上限が悪くなるという問題に対処した方法である。提案された誤差上限を精度保証付き数値計算するために、行列や逆行列の 2 ノルムを精度保証付き数値計算する方法なども述べられている。

第 4 章では、学術的な例と実用的な例を用いて提案方法の有効性が検証されている。まず、 $A$ が対称半正定値行列、 $C \neq 0$ である鞍点行列を係数に持つ連立一次方程式の例に対して数値実験を行い、従来の近似逆行列を用いた方法に比べて Schur 補元を用いた本提案方法が高速化に計算されることが確認されている。また、 $A$ を正則化した後の問題に対して、提案方法と先行研究である Chen と Hashimoto の方法と比べ、計算時間がほぼ同じで誤差上限がより小さい値が得られることが確認されている。

第 5 章では、本論文のまとめとして提案方法、数値実験をふまえて結論を述べる。

以上を要約すると、 $A, C$ が共に対称半正定値である鞍点問題に対して、 $A$ を正則にする方法を提案し、Schur 補元を用いた高速な精度保証付き数値計算法の適応可能な範囲を拡張した。これにより従来の近似逆行列を用いた方法でしか精度保証付き数値計算ができなかった問題をこれまでより高速に計算可能にした。さらに、 $A$ と  $S$ とを対角成分に持つブロック対角行列を前処理行列に用いて、元の連立一次方程式の係数行列の全ての固有値が包含される範囲をこれまでより小さな範囲に包含されることを証明した。そして、その前処理付き係数行列の固有値を用いて新たな誤差評価式を提案し、先行研究とほぼ同じ計算時間でより精度のよい誤差上限が得られることを示した。これらの成果は、鞍点問題の精度保証付き数値計算法の分野に大きく貢献するものである。従って、本論文は博士(工学)の学位論文として価値あるものと認められる。

2018 年 2 月

審査員

主査 早稲田大学教授 工学博士 早稲田大学 大石 進一

---

早稲田大学教授 工学博士 東京大学 高橋 大輔

---

早稲田大学教授 博士(工学) 早稲田大学 柏木 雅英

---