

転移的ふるまいを示す確率モデルの
統計的性質に対する解析

Analysis for statistical properties
of stochastic models
exhibiting transition behaviors

2019年2月

山田 雄平

Yuhei YAMADA

転移的ふるまいを示す確率モデルの
統計的性質に対する解析

Analysis for statistical properties
of stochastic models
exhibiting transition behaviors

2019年2月

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
物理学及応用物理学専攻 非平衡系物理学研究

山田 雄平

Yuhei YAMADA

目次

第 1 章	背景 - 確率モデルの転移的ふるまい	1
1.1	相転移と確率モデル	1
1.2	パーコレーションモデル	3
1.2.1	パーコレーションモデルの概要	3
1.2.2	グラフのパーコレーション	4
1.2.3	パーコレーションモデルの爆発的ふるまい	5
1.3	ファイバーバンドルモデル	8
1.3.1	ファイバーバンドルモデルの概要	8
1.3.2	破壊の雪崩サイズ分布の解析	10
1.3.3	臨界状態における雪崩サイズ分布	13
第 2 章	パーコレーションモデルの弱く不連続な転移	15
2.1	確率的クラスター選択モデル	15
2.2	弱く不連続な転移の十分条件	16
2.3	数値計算による解析結果の確認	19
第 3 章	パーコレーションモデルの強く不連続なとび	23
3.1	cut-off モデル	23
3.2	強く不連続なとびの十分条件	24
3.3	数値計算による解析結果の確認	25
第 4 章	ファイバーバンドルモデルの擬臨界的挙動	29
4.1	ランダムな変位を持つファイバーバンドルモデル	29
4.2	生存ファイバー割合の解析	30
4.3	雪崩サイズ分布の解析	31
4.4	近似の妥当性の確認	34
4.5	擬臨界的挙動の特徴づけ	34

4.6	雪崩サイズ分布と実験結果との対応について	35
第 5 章	結論	39
5.1	各章のまとめ	39
5.2	展望	41
参考文献		41
謝辞		44
研究業績		45

第 1 章

背景 - 確率モデルの転移的ふるまい

この章では本論文で問題とする確率モデルおよび相転移についての研究背景を説明する。また、後の章で必要となる概念の定義や、先行研究の主要な解析結果についてまとめる。

1.1 相転移と確率モデル

相転移は、系を制御する変数を変化させたとき、系の定性的な状態 (相) がある値を境に変化する現象である。例として、物質の固体・液体・気体という三態の変化や、磁性体が示す磁性の変化、流体の流れる様相の変化など、様々な現象が相転移の概念を用いて理解される。系を制御するパラメータは制御変数、系の状態を特徴づけるパラメータは秩序変数と呼ばれる。相の変化が起きる制御変数の値は転移点と呼ばれ、一般に転移点においては臨界現象と呼ばれる種々の物理量のべき発散が見られる [1]。¹⁾

要素還元的な立場からは、相転移は「無数の要素による協力現象」として、統計力学を用いて理解される。相転移の理論の中でも最も成功しているものは、カノニカルアンサンブルを使った平衡相転移の理論であると言えよう。カノニカルアンサンブルでは、系のハミルトニアンが与えられたとき、そのハミルトニアンから決まるエネルギーが E となる微視的状态が $e^{-\beta E}$ に比例する確率で出現するという仮定の下、熱平衡状態にある系の巨視的な物理量を期待値として計算する。ここで β は定数で、この確率分布はカノニカル分布と呼ばれる。この枠組みの下で、系の詳細はハミルトニアンを通してのみ結果に影響を与え、相転移は熱力学関数の特異性として理解される [2]。スケーリングやくりこみ群の理論から、平衡系の相転移や臨界現象に対しては系の次元や対称性などのみが有意であり、その他の系の詳細はふるまいに有意な影響を与えないという普遍性のあることが知られている [3]。

¹⁾ 温度と圧力を変化させたときの物質の三態のように、3つ以上の相が問題となるような系では、パラメータ空間の中で相が変化する点を転移点、3つの相が交わる点を臨界点と呼び、区別する。臨界現象は、正確には臨界点で見られる現象を指す。本論文では2つの相の移り変わりのみが問題となる系に注目し、それらを区別せず単に転移点と呼ぶ。

カノニカル分布は平衡状態を記述する統計分布であるが、現実の世界はしばしば平衡状態にはない [4]。一方、非平衡な系や適切なハミルトニアンが定義できないような系においても、相転移として理解される現象は多く存在する [5, 6]。特に近年、計算機の発達とともに、多数の要素による相互作用とランダムネスの協力によって相転移を実現する簡単な確率モデルが数多く提案されている [7–10]。そしてそれらの確率モデルにおいては、平衡系の相転移の理論では見られない多様な転移的ふるまいが見られる。そういったふるまいがどのようにして簡単なモデルで実現されるかを理解することは、現実の複雑な世界で起きる様々な相転移現象を理解する上で重要である。

本論文では、パーコレーションモデルとファイバーバンドルモデルと呼ばれる2つの確率モデルに注目する。パーコレーションモデルは、“つながり”が系全体に広がるか否かの転移を議論する確率モデルである [10]。通常、パーコレーションモデルは秩序変数が転移点で連続的に変化するモデルとして知られているが、近年、爆発的パーコレーションと呼ばれる、秩序変数がある意味で不連続に変化するモデルの一群が注目を集めている [11]。爆発的パーコレーションモデルの研究は、現実の世界で見られるつながりの急激な成長メカニズムの解明などに役立つことが期待され、多くの研究が行われている [12]。本論文では、爆発的と呼ばれるふるまいが見られる先行研究のモデルを一般化・単純化したモデルにおいて、そのようなふるまいがどのような条件で見られるかについて議論を行う。

ファイバーバンドルモデル (fiber bundle model; FBM) は、ファイバーと呼ばれる繊維の束の破壊を議論する確率モデルであり、破壊の相転移と呼ばれるふるまいを示すモデルとして知られる [13, 14]。FBM は元々、fibrous material と呼ばれる材料に着想を得て作成されたモデルである [15, 16]。fibrous material とは繊維で構成された材料の総称で、紙や不織布などがその例として挙げられる。FBM はシンプルながら破壊現象の定性的な特徴を捉えた良いモデルとして知られるが、非常に単純化されたモデルであるため、実際の fibrous material の破壊現象との関係は明確ではない [17, 18]。一方で工学の分野には fibrous material の特徴を忠実に再現したモデルも多く存在するが、それらは物理的に簡単な理解を得るためにはしばしば複雑すぎるように思われる [19–21]。本論文では、fibrous material の特徴である繊維のランダムな結合の効果を「バンドル構造のランダムネス」として FBM に導入した、簡単なモデルを提案する。このモデルは通常の FBM と工学的モデルの中間に位置するようなモデルとして捉えられる。導入したランダムネスに対し、FBM の転移的ふるまいがどのように変化するかについて議論を行う。

1.2 パーコレーションモデル

1.2.1 パーコレーションモデルの概要

パーコレーションモデルの概要を説明する。簡単な例として、次のような系を考える。一辺に含まれる格子点の数が L である 2 次元正方格子を考え、各格子点を占有確率 p に従ってランダムに占有させる。²⁾ 占有された格子点のみをたどって格子を横断する経路が存在するとき、系はパーコレートしたと定義する。直感的に明らかなように、 p が小さい時にはパーコレートしにくく、 p が 1 に近い時にはパーコレートしやすい。パーコレートする確率を Π と書くとき、 $L \rightarrow \infty$ の極限ではある $0 < p_c < 1$ が存在して

$$\begin{cases} \Pi(p) = 0 & (p \leq p_c) \\ \Pi(p) = 1 & (p > p_c) \end{cases} \quad (1-1)$$

となることが知られている。今考えている 2 次元正方格子の場合、 $p_c \simeq 0.59274621$ 程度になる [22]。同様の格子点の占有過程は 2 次元正方格子以外の格子でも一般に考えることができ、それぞれの格子に対して $\Pi(p)$ を定義することができる。先行研究から、 p_c の値は格子の次元や対称性によって変化するが、そのような p_c 自体は格子の詳細にほぼ依らず普遍的に存在することが知られている [10]。このように p_c を境に $\Pi(p) = 1$ となることをパーコレーション転移と呼び、 p_c は転移点に対応する。

$\Pi(p) = 1$ 、すなわちパーコレートが起きた状態を秩序状態と捉えるとき、秩序の強さを特徴づける秩序変数は、格子を横断する経路を含むクラスターの大きさを全格子点数で割った量で与えられる。この量はパーコレーション強度と呼ばれ、ここでは P で表す。ここで、クラスターとは隣り合った占有点のみをたどって到達することのできる占有点の集まりのことを言い、クラスターの大きさとはクラスターに含まれる占有点の数のことを言う。 $L \rightarrow \infty$ のとき、 $p \leq p_c$ ではパーコレートが起きないため $P = 0$ であり、 $p > p_c$ では $P > 0$ となる。 p_c の近傍 (ただし、 $p > p_c$) では

$$P \sim (p - p_c)^\beta \quad (1-2)$$

のように、 P は $p - p_c$ に対してべき的に減衰する [10]。べき指数 β は格子に依存して変化する。これはパーコレーションモデルが示す臨界現象の一つである。この他にも p_c 近傍においては臨界現象に対応する種々の量の特異的ふるまいが見られる。 p_c 近傍でスケールング仮説が成立すると仮定すると、各指数の間に成立する関係式、すなわちスケールング則は

²⁾ ここでは格子点を占有させる過程を考えているが、格子点をつなぐ辺を占有させる過程を考えても同値な議論を展開することができる。格子点を占有させる過程はサイト過程、辺を占有させる過程はボンド過程と呼ばれる。

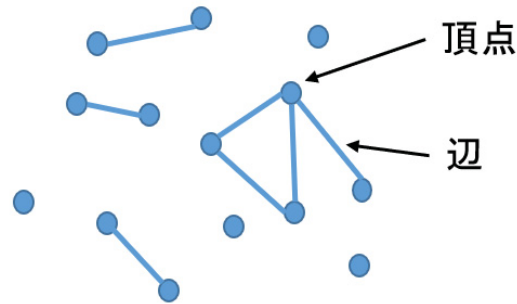


図 1.1. グラフの概念図。ここでは辺に向きが存在しない、無向グラフのイメージを表している。

格子に依らない普遍性を持つことが予想され、実際、パーコレーションモデルの数値シミュレーションやいくつかの厳密な理論計算から、スケーリング則は多くの格子で普遍的に成立することが知られている [23]。

1.2.2 グラフのパーコレーション

格子という概念はグラフ (ネットワークとも呼ばれる) という数学の概念で一般化でき、パーコレーションの問題はグラフ上でも議論できる [24]。グラフとは、もののつながりを表現する数学の概念である。数学的には、グラフ G は次のように定義できる：頂点と呼ばれる有限集合 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ と辺と呼ばれる有限集合 $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ が存在し、 $V(G)$ の 2 つの要素から $E(G)$ の 1 つの要素への写像 Φ_G があるとき、

$$G = (V(G), E(G), \Phi_G) \quad (1-3)$$

をグラフという [25]。直観的には、グラフは頂点を点、辺を線で表現したとき、点を線でつないだものとして理解することができる (図 1.1)。また、グラフは隣接行列と呼ばれる $p \times p$ 行列を用いて表現することができる。ここではその隣接行列を A と書く。 A の要素 a_{jk} は G の 2 つの頂点 v_j と v_k をつなぐ辺の個数を表現する。 $a_{jk} \geq 1$ かつ $a_{kj} \geq 1$ のとき、すなわち頂点 v_j と v_k の間に互いに 1 つ以上の辺がつながれているとき、 v_j と v_k は互いに隣接していると言われる。この隣接関係によってつながった頂点の組をクラスターと定義し、クラスターに含まれる頂点の数をクラスターサイズと定義する。

本論文では、頂点の数が N であり、辺に向きがなく ($a_{jk} = a_{kj}$)、自己ループがなく ($a_{jj} = 0$)、多重辺がないこと (a_{jk} は 0 または 1 しかとらない) を仮定した、最も基本的なグラフのパーコレーション問題について考える。 $t = 0, 1, 2, \dots$ を時間ステップとして、1 ステップに 1 つずつ辺を加えていく過程を考える。初期状態のグラフを A_0 、時刻 t における

グラフを A_t とし、また一般に加えられ得る辺に制限があるときの、全ての辺が加えられたときのグラフを A_f で表す。³⁾ $t \rightarrow t+1$ のとき、まだつながれていない辺、すなわち A_f に含まれるが A_t に含まれない辺の中から、ランダムに1つの辺を選んで加える。このようなモデルはグラフ形成の configuration model と呼ばれ、特に A_f が完全グラフ (全ての頂点が1つの辺でつながれたグラフ $\Leftrightarrow A_f$ の対角成分のみが0で他が1であるグラフ) である場合には、グラフ形成モデルの中で最も基本的なモデルとして知られる Erdős-Rényi (ER) モデルとなる [26]。以下、本論文を通して、特に言及しない限り A_f は完全グラフであるとする。ある時刻 t に存在する最も大きなクラスターを最大のクラスターと呼び、そのサイズを $C_{max}(t)$ と書く。グラフのパーコレーション問題においては、パーコレート状態は $C_{max}(t)$ がシステムサイズ N 程度の大きさになること、と定義される。秩序変数は $C_{max}(t)/N$ で与えられる。今、 $\tau \equiv t/N$ を制御変数として、 $N \rightarrow \infty$ の極限におけるふるまいに注目する。ふるまいは A_f として与える最終的なグラフの形に依存して変化するが、多くの A_f に対して、ある τ_c が存在して

$$\begin{cases} C_{max}(t)/N = 0 & (\tau \leq \tau_c) \\ C_{max}(t)/N > 0 & (\tau > \tau_c) \end{cases} \quad (1-4)$$

となることが知られている [27]。⁴⁾ 例として、ER モデルの場合の典型的な数値計算結果を図 1.2 に示す。 $C_{max}(t)/N$ は $\tau = 0.5$ 付近まで0で、そこから立ち上がるようなふるまいを見せる。実際、ER モデルでは $\tau_c = 0.5$ となることが理論的に分かっている。式 (1-4) は、系に加えられる辺の数の割合が τ_c よりも小さければ、系には $O(N)$ よりも小さな (すなわち $o(N)$ の) クラスターしか存在せず、 τ_c よりも大きければ、系には $O(N)$ のクラスターが存在するということを表している。これは、クラスターというつながりが系のサイズ N と同程度になるか否かの相転移と捉えられる。転移点 τ_c においては、格子のパーコレーションモデルと同様、種々の特異なふるまいが見られ、それらはグラフのパーコレーションが示す臨界現象として知られている [28]。

1.2.3 パーコレーションモデルの爆発的ふるまい

前節で説明した通常のグラフのパーコレーションモデルでは、各時刻における辺の追加はランダムに行われていた。追加する辺に選択性を与えたときには、選択のルールに依存し

³⁾ 辺を独立にランダムに選択して加えていく場合には、統計的に同値なグラフ形成の過程は他にもいくつか考えられる。平均的なふるまいに着目するときには、別のグラフ形成過程を用いても以降の議論の結果には影響を与えない。ただし、後で議論する爆発的パーコレーションのモデルにおいては、加える辺の選択がランダムでないことが本質的であり、ここで説明する過程 (configuration model) に則ってモデルが定義される。

⁴⁾ C_{max} を改めて τ の関数として $C_{max}(\tau)$ と定義し直した方が、ここでの表記としては自然である。しかしながら後の議論における利便性のため、本論文では全体を通じて C_{max} を t の関数として書く。

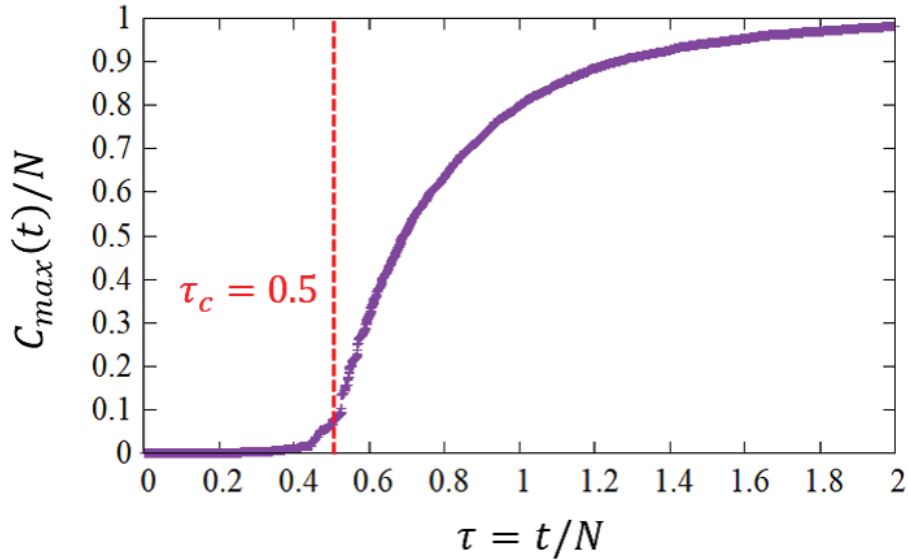


図 1.2. ER モデルの秩序変数 $C_{max}(t)/N$ の典型的な数値計算結果 ($N = 10^5$)。 $t = 0$ の初期状態には、全てのノードが孤立した状態を与えている。赤の破線は $\tau = \tau_c = 0.5$ を表す。

て、モデルは多様なふるまいを見せるようになる。特に、辺の選択ルールに、大きなサイズのクラスターの形成を避けるような効果があるとき、秩序変数は通常のパーコレーションモデルと比べて、非常に急激に変化する場合がある。そのようなふるまいを爆発的パーコレーションと呼ぶ。爆発的パーコレーションでは、通常のパーコレーションとは異なる多くの奇妙なふるまいが見られる [29]。本論文では $N \rightarrow \infty$ のとき確率 1 で実現するような典型的なふるまいに注目する。爆発的パーコレーションの研究において、多くの場合で秩序変数の急激さは、以下に示す強い不連続性・弱い不連続性と呼ばれる 2 つの性質で特徴づけられる。今、秩序変数 $C_{max}(t)/N$ の 1 ステップの変化のサイズの最大値を

$$J \equiv \frac{\max_t \{C_{max}(t+1) - C_{max}(t)\}}{N} \quad (1-5)$$

と表す。 $N \rightarrow \infty$ の極限をとったときに J が 0 に収束しないとき、すなわち

$$J \rightarrow s \neq 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (1-6)$$

であるとき、秩序変数のふるまいは強く不連続なとびを持つ、あるいは強い不連続性を持つと言われる [30]。式 (1-6) は、 $C_{max}(t)$ の 1 ステップでの変化の最大値が $O(N)$ である、ということの意味している。このとき、 t/N に対する $C_{max}(t)/N$ のグラフは、 $N \rightarrow \infty$ でも 0 に収束しないジャンプを見せる。例として、強い不連続性は通常の (全てのノードが孤立した初期条件での) ER モデルには見られず、その意味で秩序変数の急激な変化を特徴づける性質となっている。

以下、強く不連続なとびはパーコレーションが起きた後、すなわち $C_{max}(t) \sim O(N)$ となった以降の t で見られるふるまいであることを示す。 $C_{max}(t)$ が変化するのは $C_{max}(t)$ に対して別のクラスター $C_x(t)$ が合体する場合か、 $C_{max}(t)$ 以外の2つのクラスター $C_y(t), C_z(t)$ が合体して $C_{max}(t)$ より大きくなる場合の2通りがある。このときの $C_{max}(t)$ の変化は、前者では

$$C_{max}(t+1) - C_{max}(t) = C_x(t) \quad (1-7)$$

となり、後者では

$$C_{max}(t+1) - C_{max}(t) = C_y(t) + C_z(t) - C_{max}(t) \quad (1-8)$$

となる。強く不連続なとびが起きるとき、これらの右辺は $O(N)$ である必要がある。このことは、式 (1-7) では $C_x(t)$ が、式 (1-8) では $C_y(t)$ または $C_z(t)$ が、それぞれ $O(N)$ であることを要求する。いずれの場合も、定義から $C_{max}(t)$ はこれらのクラスターよりも大きいので、 $C_{max}(t) \sim O(N)$ であることが分かる。すなわち、強く不連続なとびが起きる t では、既に $C_{max}(t) \sim O(N)$ であることが分かる。

一方、パーコレーションが起きる速さに注目した爆発的ふるまいの特徴づけには、次のようなものがある。今、定数 γ, A ($0 < \gamma < 1, 0 < A < 1$) を用い、

$$t_0 \equiv \max\{t | C_{max}(t) < N^\gamma\} \quad (1-9)$$

$$t_1 \equiv \min\{t | C_{max}(t) > AN\} \quad (1-10)$$

$$\Delta(\gamma, A) \equiv t_1 - t_0 \quad (1-11)$$

とする。このとき、ある γ, A が存在して

$$\frac{\Delta(\gamma, A)}{N} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (1-12)$$

が成立するとき、秩序変数は弱く不連続な転移を示す、あるいは弱い不連続性を持つと言われる [30, 31]。 $\Delta(\gamma, A)$ は $C_{max}(t)$ が $O(N^\gamma)$ 程度から $O(N)$ になる時間の上界を評価している。式 (1-12) は、 $\tau = t/N$ の無限小の変化に対して $C_{max}(t)$ が $o(N)$ から $O(N)$ になることを意味している。このとき、 t/N に対する $C_{max}(t)/N$ のグラフは、ある値で垂直に立ち上がるふるまいを見せる。例として、弱い不連続性は通常の (全てのノードが孤立した初期条件での) ER モデルには見られず、その意味で秩序変数の急激な変化を特徴づける性質となっている。

1.3 ファイバーバンドルモデル

1.3.1 ファイバーバンドルモデルの概要

FBM の概要について説明する。標準的な FBM では、2 枚の平行な面に対して垂直になるよう端点が固定された、 N 本のファイバーを考える (図 1.3)。それぞれのファイバーはフックの法則に従うばねで、張力が f_i に達したら破壊するとする。すなわち、ばねの長さを x 、ばね定数を k とし、 $x_i = f_i/k$ としたとき、復元力 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} kx & (0 \leq x \leq x_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1-13)$$

で与えられるとする。 f_i は破壊閾値と呼ばれ、確率密度関数 $g(f)$ に従い、各ファイバーに対してランダムに与える。ファイバーが破壊したときには、そのファイバーが担っていた力は他の破壊していないファイバーに再分配されるとする。力の再分配のされ方は色々な場合を考えることができる [13]。本論文では、global load sharing 条件と呼ばれる、ファイバーの取り付けられている面が剛体的であり、外力が全てのファイバーに一様に分配される場合を考える。このような条件下で、面に対して垂直な方向に外力 F を印加したとき、どのようにファイバーが伸び、破壊していくかを考える。

ある外力 F が与えられたとき、バンドルは以下の緩和過程 (1)-(3) によってファイバーの連鎖的な破壊が起こった後、壊れるファイバーがない平衡状態に達する。

- (1) f_i を無視して、ファイバーの張力の合計が F と釣り合う位置までバンドルを伸ばす。
- (2) その位置における各ファイバーの張力を求め、 f_i を超えているファイバーを見つける。
- (3) f_i を超えたファイバーを除去して (1) に戻り、 f_i を超えるファイバーがなくなるまでこの過程を繰り返す。

平衡状態で壊れていないファイバーの本数を $n(F)$ と書き、 $n(F)$ を全ファイバー数で割った量、 $U(F) \equiv n(F)/N$ をファイバーの生存割合と呼ぶ。 $U(F)$ は F の単調減少関数であり、また $1/N$ を最小単位として不連続的に変化する。 $U(F) = 0$ 、すなわちファイバーが全て壊れることをバンドルの破断と呼ぶ。 $\sigma \equiv F/N$ と置くと、 $N \rightarrow \infty$ のとき、ある σ_c が存在して

$$\begin{cases} U(F) > 0 & (\sigma \leq \sigma_c) \\ U(F) = 0 & (\sigma > \sigma_c) \end{cases} \quad (1-14)$$

となることが知られている。⁵⁾ このふるまいは破壊の相転移と呼ばれ、 $U(F)$ は秩序変数、 σ_c

⁵⁾ グラフのパーコレーションの式 (1-4) のときと同様、 U は σ の関数として定義した方がここでの表記は自然

は転移点に対応する。 σ_c の値は $g(f)$ に依存して決まる。今、 $\sigma = \sigma_c$ であるときの F を F_c と書くと、 σ_c の近傍では、 $g(f)$ にほとんど依存せずに、

$$U(F) - U(F_c) \sim (\sigma_c - \sigma)^{1/2} \quad (1-15)$$

となることが知られている。また、平衡状態に達するまでの(1)-(3)の繰り返しの回数は緩和ステップ $t_f(F)$ と呼ばれ、 $N \rightarrow \infty$ のとき σ_c で発散する[14]。これらはFBMの臨界現象として知られるふるまいである。

緩和過程で連鎖的に起きるファイバーの破壊は破壊の雪崩現象と呼ばれる。今、 F をある平衡状態から十分ゆっくり大きくして1本のファイバーが破壊した場合について、平衡状態に達するまでに連鎖的に破壊するファイバーの本数を Δ と書く。⁶⁾ Δ は雪崩のサイズと捉えることができる。 F を十分ゆっくりと0から F_c まで大きくするとき、 $\{f_i\}$ の組で記述されるあるバンドルに対して、 Δ の組を得ることができる。この Δ の頻度分布を $D(\Delta)$ で表す。 $D(\Delta)$ は $U(F)$ の不連続な変化のサイズの頻度分布と同値であり、 $U(F)$ の平均的なふるまいからのゆらぎを特徴づける分布となっている[13]。通常のFBMでは、 $g(f)$ にはほとんど依存せず、 $D(\Delta)$ はべき乗則

$$D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2} \quad (1-16)$$

に従う[32]。一方、バンドルが破断に近い臨界状態での Δ のみに注目すると、 $D(\Delta)$ は別のべき乗則に従う。先ほどは F を0から F_c まで変化させたときに発生した雪崩に注目したが、今度は F を F_0 から F_c まで変化させたときの雪崩のみに注目する。 f', f'_0, f'_c を、それぞれ F, F_0, F_c が印加されているときの、生存している1ファイバー当たりにかかっている力とする。 $f'_0 \lesssim f'_c$ のとき、頻度分布は

$$D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}(1 - e^{-\Delta/\Delta_c}) \quad (1-17)$$

で与えられる[33]。ここで

$$\Delta_c = \frac{1}{r'(f'_c)^2(f'_c - f'_0)^2} \quad (1-18)$$

$$r(f') = 1 - \frac{f'g(f')}{1 - \int_0^{f'} g(s)ds} \quad (1-19)$$

である。式(1-17)から、臨界状態、すなわち $|f'_c - f'_0|$ が十分小さいとき、 Δ_c は十分大きくなり、

$$D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2} \quad (1-20)$$

となることが分かる。 $D(\Delta)$ のグラフ上で、 Δ_c は2つのべき乗則のクロスオーバーが起きる Δ の値と捉えることができる。

であるが、後の議論における利便性のため、本論文では全体を通じて U を F の関数として書く。

⁶⁾ 厳密には全く同じ F で2本以上のファイバーが破壊する場合も(確率0で)起き得るが、その時には同じ雪崩で破壊したと考える。

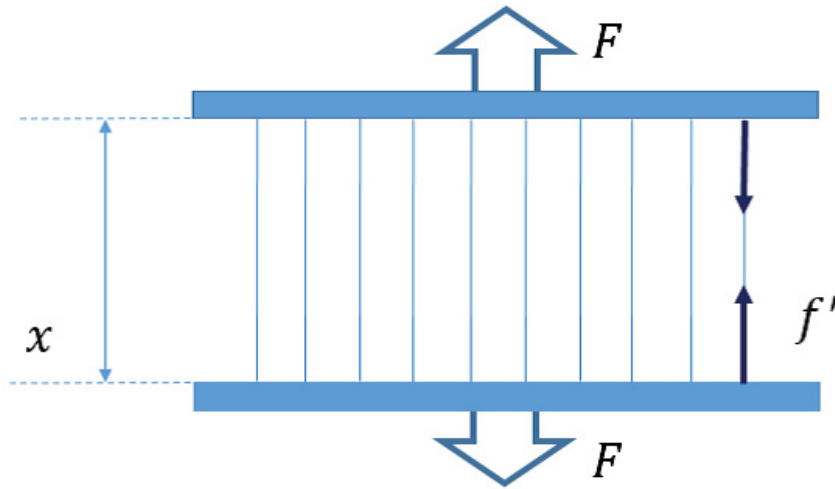


図 1.3. FBM の概略図。

1.3.2 破壊の雪崩サイズ分布の解析

FBM の雪崩サイズ分布 $D(\Delta)$ が適当な条件の下でべき乗則に従うこと (式 (1-16)) を示す。⁷⁾ $g(f)$ の累積確率分布を

$$G(f) = \int_0^f g(x) dx \quad (1-21)$$

と書く。バンドルが平衡状態にあるとき、外力 F は生存ファイバーの本数に f' を掛けた値と等しい。よって $N \rightarrow \infty$ での平均的なふるまいとして、 F と f' の関係は

$$F(f') = N(1 - G(f')) \cdot f' \quad (1-22)$$

のように書ける。今、 $\langle F \rangle(f')$ は唯一の最大値を持つ関数であると仮定する。⁸⁾ その最大値は定義から F_c と一致し、対応する f' は f'_c であることから、

$$\left. \frac{d\langle F \rangle}{df'} \right|_{f'_c} = 1 - G(f'_c) - f'_c g(f'_c) = 0 \quad (1-23)$$

が成立する。

⁷⁾ この節の議論は先行研究 [32] に基づいている。

⁸⁾ この仮定は以下の議論が成り立つための $g(f)$ に制限を与えるが、本論文で考える一様分布やガウス分布、ワイブル分布といった一山の関数で表される確率密度関数であれば、十分この仮定を満たす。この仮定を満たさない $g(f)$ も考えられるが、そのような場合の議論はここでは行わない。

今、 $\langle F \rangle(f')$ が f' の増加関数である領域の中の、ファイバー一本当たりの力が $(f', f' + df')$ であるような微小領域を考える。生存ファイバーの数の期待値は $N(1 - G(f'))$ と計算でき、またこの領域にある破壊閾値 f_i の数の期待値は $Ng(f')df'$ と計算できる。外力の無限小の増大が破壊閾値 f のファイバーを破壊する場合を考えると、このファイバーが担っていた力は、他の生存している $N(1 - G(f'))$ 本のファイバーに等分配される。このとき、各ファイバーは

$$\delta f' = \frac{f'}{N(1 - G(f'))} \quad (1-24)$$

の力の増加を受ける。この力の増加によって壊れるファイバーの数の平均は、

$$a = a(f') = Ng(f')\delta f' = \frac{f'g(f')}{1 - G(f')} \quad (1-25)$$

と計算できる。式 (1-23) から、 $a(f')$ は $f' = f'_c$ で 1 になることが分かる。 $a(f') \geq 1$ のとき、あるファイバーの破壊は必ず別のファイバーの破壊を引き起こすので、雪崩はバンドルが破断するまで続く。このことから、 $f' < f'_c$ では

$$a(f') < 1 \quad (1-26)$$

であることが分かる。さて、雪崩のサイズが Δ のとき、力の増分は式 (1-24) の Δ 倍になり、それにより壊れるファイバーの数の平均も $a(f')\Delta$ となる。 f_i の分布がランダムで十分密であるとき、 f' でのファイバーの破壊がちょうど $\Delta - 1$ 個のファイバーの破壊を引き起こす確率は、平均が $a(f')\Delta$ のポアソン分布に従う。式で表せば、この確率は

$$\frac{(a\Delta)^{\Delta-1}}{(\Delta-1)!} e^{-a\Delta} \quad (1-27)$$

となる。次に、今考えた $\Delta - 1$ 本のファイバーの破壊による力の増加が、次に大きな破壊閾値には達していない確率を考える。これは、 $1 \leq n \leq \Delta - 1$ なる n に対して、少なくとも n 個の閾値が区間 $(f', f' + n\delta f')$ に入っている確率に等しい。この確率は組み合わせの問題として計算することができ、 $1/\Delta$ に等しい [32]。以上から、最初のファイバーが f' で破壊した結果として $\Delta - 1$ 本のファイバーを巻き込み、サイズ Δ の雪崩を引き起こす確率 $\phi(\Delta, f')$ は

$$\phi(\Delta, f') = \frac{(a\Delta)^{\Delta-1}}{\Delta!} e^{-a\Delta} \quad (1-28)$$

と書ける。最後に、今考えている最初に壊れるファイバーが、別の雪崩に巻き込まれて壊れるファイバーではない確率 $P_b(f')$ を計算する。最大の破壊閾値が f' であるような $d - 1$ 本のファイバーを考える。 $(f' - \delta f')$ の区間に閾値が 0 個、かつ $(f' - 2\delta f')$ の区間に閾値がたかだか 1 個、…、かつ $(f' - d\delta f')$ の区間に閾値がたかだか $d - 1$ 個、という状態が実現される確率の、 $d \rightarrow \infty$ の極限での値が $P_b(f')$ に対応する。閾値が $(f' - d\delta f')$ の区間にラ

ンダムに分布しているとする、この区間を長さ δf の d 個の区間に等分割したときに今の条件が満たされる確率 $p_{h,d}$ は、組み合わせの問題として

$$1 - \frac{h}{d} \quad (1-29)$$

と計算できる [32]。($f' - d\delta f'$) の区間にちょうど h 個の閾値が存在する確率は、式 (1-27) のときと同様の議論から

$$\frac{(ad)^h}{h!} e^{-ad} \quad (1-30)$$

である。この確率と式 (1-29) の確率を掛け合わせ、 h の取りうる全ての場合の数について足し合わせるにより、 f' より小さな閾値を持つ d 個のファイバーによる雪崩によって閾値 f' のファイバーが壊れない確率は

$$\begin{aligned} P_b(f'|d) &= \sum_{h=0}^{d-1} \frac{(ad)^h}{h!} e^{-ad} \left(1 - \frac{h}{d}\right) \\ &= (1-a)e^{-ad} \sum_{h=0}^{d-1} \frac{(ad)^h}{h!} + \frac{(ad)^d}{d!} e^{-ad} \end{aligned} \quad (1-31)$$

と計算できる。式 (1-26) より、

$$P_b(f') = \lim_{d \rightarrow \infty} P_b(f'|d) = 1 - a(f') \quad (1-32)$$

となる。以上の結果を合わせれば、閾値が f' のファイバーが壊れることでサイズ Δ の雪崩を引き起こす確率は

$$\Phi(f') = \phi(\Delta, f') P_b(f') = \frac{\Delta^{\Delta-1}}{\Delta!} a(f')^{\Delta-1} e^{-a(f')\Delta} [1 - a(f')] \quad (1-33)$$

となる。 $\Phi(f')$ に区間 $(f', f' + \delta f')$ に閾値を持つファイバーの個数の期待値 $Ng(f')df'$ を掛け、 f' について 0 から f'_c まで積分することで、雪崩サイズ分布 (を N で割ったもの) は

$$\begin{aligned} \frac{D(\Delta)}{N} &= \int_0^{f'_c} \Phi(f') g(f') df' \\ &= \frac{\Delta^{\Delta-1}}{\Delta!} \int_0^{f'_c} a(f')^{\Delta-1} e^{-a(f')\Delta} [1 - a(f')] g(f') df' \end{aligned} \quad (1-34)$$

となる。 Δ が十分大きいとき、この被積分関数は強く局在した関数となり、積分の中でそのような関数はガウス関数で近似できるという Laplace の方法が使える [34]。変数変換により a の積分について書き直すと、被積分関数のピークの位置は明らかに $a = 1$ となる。その周りで被積分関数を展開し、ガウス積分を用いることで、

$$\frac{D(\Delta)}{N} = C\Delta^{-5/2} \quad (1-35)$$

$$C = \frac{f'_c g(f'_c)^2}{\sqrt{2\pi}[f'_c g'(f'_c) + 2g(f'_c)]} \quad (1-36)$$

が得られる。

1.3.3 臨界状態における雪崩サイズ分布

次に、バンドルが破断に近い臨界状態における Δ の頻度分布が従う式 (1-17) を導く。⁹⁾変数変換

$$r(f') = 1 - a(f') = 1 - \frac{f'g(f')}{1 - G(f')} \quad (1-37)$$

を用いて式 (1-34) を書き直すと、

$$\frac{D(\Delta)}{N} = \frac{\Delta^{\Delta-1} e^{-\Delta}}{\Delta!} \int_0^{f'_c} g(f') r(f') [1 - r(f')]^{\Delta-1} e^{\Delta r(f')} df' \quad (1-38)$$

となる。今、雪崩が $F_0 \neq 0$ から始まる場合を考える。これは、式 (1-38) で積分範囲を、0 から f'_c ではなく、 f'_0 から f'_c で取ることに対応する。 $r(f')$ は f'_c の近傍では 0 に近い値を取るため、

$$\begin{aligned} (1-r)^{\Delta} e^{\Delta r} &= \exp[\Delta(\ln(1-r) + r)] \\ &= \exp\left\{-\Delta\left[\frac{r^2}{2} + O(r^3)\right]\right\} \\ &\simeq \exp\left[-\Delta\frac{r(f')^2}{2}\right] \end{aligned} \quad (1-39)$$

となる。また、

$$r(f') \simeq r'(f'_c)(f' - f'_c) \quad (1-40)$$

である。これらを式 (1-38) に代入し、積分範囲を f'_0 から f'_c に変更することで

$$\begin{aligned} \frac{D(\Delta)}{N} &\simeq \frac{\Delta^{\Delta-1} e^{-\Delta}}{\Delta!} \int_{f'_0}^{f'_c} g(f'_c) r'(f'_c) (f' - f'_c) e^{-\Delta r'(f'_c)^2 (f' - f'_c)^2 / 2} df' \\ &= \frac{\Delta^{\Delta-2} e^{-\Delta} g(f'_c)}{|r'(f'_c)| \Delta!} \left[e^{-\Delta r'(f'_c)^2 (f' - f'_c)^2 / 2} \right]_{f'_0}^{f'_c} \\ &= \frac{\Delta^{\Delta-2} e^{-\Delta}}{\Delta!} \frac{g(f'_c)}{|r'(f'_c)|} (1 - e^{-\Delta/\Delta_c}) \end{aligned} \quad (1-41)$$

が得られる。ここで Δ_c は

$$\Delta_c = \frac{2}{r'(f'_c)^2 (f'_c - f'_0)^2} \quad (1-42)$$

⁹⁾ この節の議論は先行研究 [33] に基づいている。

である。Stirling の近似 $\Delta! \simeq \Delta^\Delta e^{-\Delta} \sqrt{2\pi\Delta}$ を用いることで、

$$\frac{D(\Delta)}{N} = C' \Delta^{-5/2} (1 - e^{-\Delta/\Delta_c}) \quad (1-43)$$

が得られる。ここで C' は

$$C' = \frac{g(f'_c)}{\sqrt{2\pi}|r'(f'_c)|} \quad (1-44)$$

で与えられる。

第2章

パーコレーションモデルの弱く不連続な転移

この章では、グラフのパーコレーションにおいて、加える辺の選択確率がクラスターサイズのみ依存して確率的に与えられるようなモデルが弱い不連続性を示す条件について考える。このようなモデルでは、あるサイズを持つ2つのクラスターが合体せずに存在している時間を評価することができ、秩序変数が弱く不連続な転移を示すための、クラスターサイズに対する条件を導くことができる。

2.1 確率的クラスター選択モデル

グラフのパーコレーション過程を考える。時刻 t のとき、未だ辺でつながれていない2つの頂点を j, k と表し、 j, k の属するクラスターのサイズをそれぞれ $C_j(t), C_k(t)$ と表す。 $t \rightarrow t+1$ で j, k がつながれる確率を

$$P(j, k; t+1) = \frac{1}{W} \cdot P_a(C_j(t), C_k(t)) \quad (2-1)$$

で与えるモデルを考える。ここで P_a は任意の関数、 W は規格化定数である。式 (2-1) は、ある辺が加えられる確率が、その辺がつながる2つの頂点が属するそれぞれのクラスターのサイズに依存して変化するモデルの、一般的な表式と言える。モデルの詳細は P_a の関数形により与えられる。ここでは、

$$P_a(C_j(t), C_k(t)) = (C_j(t)C_k(t))^{\omega-1} \quad (2-2)$$

としたモデルを考える。このモデルは先行研究 [35] のモデルと同値である。ここで ω は正の実数値を取るパラメータであり、また規格化定数 W は

$$W(t) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (C_j(t)C_k(t))^{\omega-1} (1 - a_{jk}(t)) \quad (2-3)$$

のように計算される。ここで和は $j \neq k$ である全ての j, k の組について取る。パラメータ ω は、クラスターのサイズに依存した辺のつながりやすさを制御する。 ω が小さいほど小さなクラスターに属する頂点同士がつながりやすく、 ω が大きいほど大きなクラスターに属する頂点同士がつながりやすい。 $\omega = 1$ のとき、ある辺がつながれる確率は、その辺がつながる頂点の属するクラスターのサイズに依存せず一定となり、このモデルは ER モデルと一致する。この意味で、このモデルは ER モデルの一般化となっている。

先行研究 [35] においては、このモデルの不連続性について数値シミュレーションを用いた解析を行っている。そこでは、特に全ての頂点が孤立した初期条件の下での秩序変数のふるまいについて詳細な議論を行っていたが、不連続性が実現されることに関しての理論的な考察は行われていなかった。ここでは、このモデルがある初期条件の下では厳密に弱く不連続な転移を示すことを、理論計算によって示す。¹⁾

2.2 弱く不連続な転移の十分条件

式 (2-2) で表されるモデルが弱く不連続な転移を示すための、クラスターサイズに対する十分条件を導く。今、 α', β' が別々のクラスターを表し、 $C_{\alpha'}, C_{\beta'}$ がそれぞれのクラスターのサイズを表しているとする。それら 2 つのクラスターが $t \rightarrow t+1$ で合体する、すなわちクラスター間に辺が加えられる確率 $P(\alpha', \beta'; t+1)$ は、それぞれのクラスターに属する頂点間に辺が加えられる確率 $P(j, k; t+1)$ に、そのような辺の場合の数 $C_{\alpha'} \times C_{\beta'}$ を掛けたものとして、

$$P(\alpha', \beta'; t+1) = \frac{(C_{\alpha'}(t)C_{\beta'}(t))^\omega}{W(t)} \quad (2-4)$$

で与えられる。このとき、それら 2 つのクラスターが $t \rightarrow t + \Delta t$ で合体しない確率は

$$\begin{aligned} P_s(\alpha', \beta'; t + \Delta t) &= \left[1 - \frac{(C_{\alpha'}(t)C_{\beta'}(t))^\omega}{W(t)} \right] \left[1 - \frac{(C_{\alpha'}(t+1)C_{\beta'}(t+1))^\omega}{W(t+1)} \right] \\ &\quad \dots \left[1 - \frac{(C_{\alpha'}(t+\Delta t-1)C_{\beta'}(t+\Delta t-1))^\omega}{W(t+\Delta t-1)} \right] \\ &\leq \left[1 - \frac{(C_{\alpha'}(t)C_{\beta'}(t))^\omega}{W(t)} \right] \left[1 - \frac{(C_{\alpha'}(t)C_{\beta'}(t))^\omega}{W(t+1)} \right] \\ &\quad \dots \left[1 - \frac{(C_{\alpha'}(t)C_{\beta'}(t))^\omega}{W(t+\Delta t-1)} \right] \end{aligned} \quad (2-5)$$

と計算できる。

まず、 $\omega > 1$ の場合について考える。今、パーコレーションが起きていないこと、すなわち、定数 $0 < c < 1$ を用いて、全てのクラスターが $O(N) = cN$ よりも小さいことを仮定す

¹⁾ ただし、本研究と先行研究 [35] では初期条件が異なっており、本研究の結果と先行研究の数値計算結果は直接的に比較できないことに注意する。

る。このとき、式 (2-3) より

$$W(t) < \frac{(cN)^{2(\omega-1)}}{2} \sum_{j \neq k} (1 - a_{jk}(t)) \quad (2-6)$$

を得る。ここで、明らかに

$$\sum_{j \neq k} 1 = N(N-1) \quad (2-7)$$

である。また、 $\sum_{j \neq k} a_{jk}(t)$ は時刻 t における、 a_{jk} と a_{kj} を区別した辺の数を表している
ので、 $t=0$ でのそのような辺の数を $2b$ と置くと

$$\sum_{j \neq k} a_{jk}(t) = 2(b+t) \quad (2-8)$$

と計算できる。以上から

$$\begin{aligned} W(t) &< (cN)^{2(\omega-1)} \left\{ \frac{N(N-1)}{2} - b - t \right\} \\ &\equiv W_-(t) \end{aligned} \quad (2-9)$$

と評価できる。上式より任意の時刻 t' で $W_-(t') > W(t')$ であり、 $W_-(t)$ は t についての
単調減少関数なので、 $W_-(t)$ は $W(t), W(t+1), \dots, W(t+\Delta t-1)$ の上界となっている。こ
のとき、

$$P_s(\alpha', \beta'; t + \Delta t) \leq \left[1 - \frac{(C_{\alpha'}(t)C_{\beta'}(t))^\omega}{W_-(t)} \right]^{\Delta t} \quad (2-10)$$

である。弱い不連続性は $C_{max}(t) < O(N)$ を満たす t での性質なので、今考えている問題
では

$$b+t < O(N^2) \quad (2-11)$$

が成立する ($b+t = O(N^2)$ のときには必ず $C_{max}(t) = O(N)$ になってしまう)。このとき、

$$W_-(t) = O(N^{2\omega}) \quad (2-12)$$

を得る。また、常に満たされる式として

$$\Delta t \geq O(N^\lambda) \quad (2-13)$$

$$C_{\alpha'} = O(N^{\alpha'}), \quad C_{\beta'} = O(N^{\beta'}) \quad (2-14)$$

と置き、これらを式 (2-10) に代入することで

$$P_s(\alpha', \beta'; t + \Delta t) \leq O\left(\left[1 - N^{-\{2-(\alpha'+\beta')\}\omega}\right]^{N^\lambda}\right) \quad (2-15)$$

を得る。 $\lambda > \{2 - (\alpha' + \beta')\}\omega$ のとき、この不等式の右辺は $N \rightarrow \infty$ で 0 になる。よって、クラスター α' と β' が分離して存在している時間の上界 Δt_* は

$$\Delta t_* \sim N^{\{2 - (\alpha' + \beta')\}\omega} \quad (2-16)$$

と評価できる。 $\alpha' + \beta' > 2 - 1/\omega$ のとき、クラスター α' と β' は $O(N)$ よりも小さい時間で確率 1 で合体する。これらから、式 (2-1) および式 (2-2) で表現されるモデルについて、 $\omega > 1$ のときに次のことが結論できる：

$$C_{max}(t) < O(N) \quad (2-17)$$

であり、

$$C_m(t) = O(N^{\alpha'_m}) \quad (2-18)$$

$$\min_m \alpha'_m > 1 - 1/2\omega \quad (2-19)$$

$$\sum_m C_m(t) = O(N) \quad (2-20)$$

を満たすクラスターの一群が存在すると仮定する。このとき、

$$\max_m \alpha'_m < \gamma' < 1 \quad (2-21)$$

$$0 < A' < \sum_m C_m(t) \quad (2-22)$$

であり、

$$\Delta(\gamma', A') \leq N^{\{2 - 2 \min_m \alpha'_m\}\omega - 1} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (2-23)$$

を満たすような γ', A' が存在する。すなわち、弱く不連続な転移が実現される。以上から、式 (2-17)-(2-18) は弱く不連続な転移が起きるための十分条件になっていることが分かる。

次に、 $\omega \leq 1$ の場合を考える。任意の頂点 i について $C_i(t) \geq 1$ が自明に成り立つので、式 (2-3) から

$$W(t) \leq \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (1 - a_{jk}(t)) = \frac{N(N-1)}{2} - b - t \equiv W'_-(t) \quad (2-24)$$

が成立する。上式より任意の時刻 t' で $W'_-(t') > W(t')$ であり、 $W'_-(t)$ は t についての単調減少関数なので、 $W'_-(t)$ は $W(t), W(t+1), \dots, W(t+\Delta t-1)$ の上界となっている。 $\omega > 1$ のときと同様の議論から、次の評価式が得られる。

$$P_s(\alpha', \beta'; t + \Delta t) \leq O\left(\left[1 - N^{-\{2 - (\alpha' + \beta')\}\omega}\right]^{N^\lambda}\right) \quad (2-25)$$

この式を用いることで、 $\omega \leq 1$ のとき、 $\omega > 1$ のときと同様の議論から、次のことが結論できる：

$$C_{max}(t) < O(N) \quad (2-26)$$

であり、

$$C_m(t) = O(N^{\alpha'_m}) \quad (2-27)$$

$$\min_m \alpha'_m > 1/2\omega \quad (2-28)$$

$$\sum_m C_m(t) = O(N) \quad (2-29)$$

を満たすクラスターの一群が存在するならば、弱く不連続な転移が実現される。

2.3 数値計算による解析結果の確認

以上の結果の妥当性を数値計算を用いて確認する。理論計算の結果から、全ての頂点が孤立した初期条件の下では弱い不連続性を示さない ER モデルも、適当な初期条件の下では弱い不連続性を示すことが分かる。そのような初期条件の例として、サイズ N^σ のクラスターが $aN^{1-\sigma}$ 個、サイズ 1 のクラスターが $(1-a)N$ 個の状態を考える。ここで、数値計算をする上で、サイズが 1 より大きなクラスターについてはグラフの構造を与える必要がある。どのような構造を与えても解析の結果には影響を与えないが、今回のシミュレーションにおいては、初期のクラスターは線状のグラフ (n 個の頂点と $n-1$ 個の辺で構成されるグラフ) であるとした。今回解析した式 (2-1) のモデルにおいて、ER モデルは $\omega = 1$ の場合に対応するため、先の解析結果から、 $\sigma > 1/2$ が弱い不連続性を実現する十分条件となっていることが予想される。(この十分条件は a の値には依存しない。) シミュレーションでは、 $\langle C_{max}(t) \rangle$ を $C_{max}(t)$ の 100 試行の平均として計算し、 t_0, t_1 を評価する。今の初期条件では $t = 0$ で $C_{max}(t) \geq N^\sigma$ を満たすので、弱い不連続性の判定式 (1-9), (1-10), (1-11) において $\gamma = \sigma$, $A = a$ と取ると、

$$t_0 = \max\{t | \langle C_{max}(t) \rangle < N^\sigma\} = 0 \quad (2-30)$$

$$t_1 = \min\{t | \langle C_{max}(t) \rangle > aN\} \quad (2-31)$$

となり、

$$\Delta(\sigma, a; N) = t_1 \quad (2-32)$$

となる。

図 2.1 に、弱い不連続性の十分条件 $\sigma > 1/2$ を満たすパラメータを用いた数値シミュレーションで得られた $\langle C_{max}(t) \rangle / N$ の結果を示す。 $\langle C_{max}(t) \rangle / N$ は初期に急激に立ち上がり、以降はなだらかに増加するふるまいを見せる。また、 N が大きくなるほど、初期の立

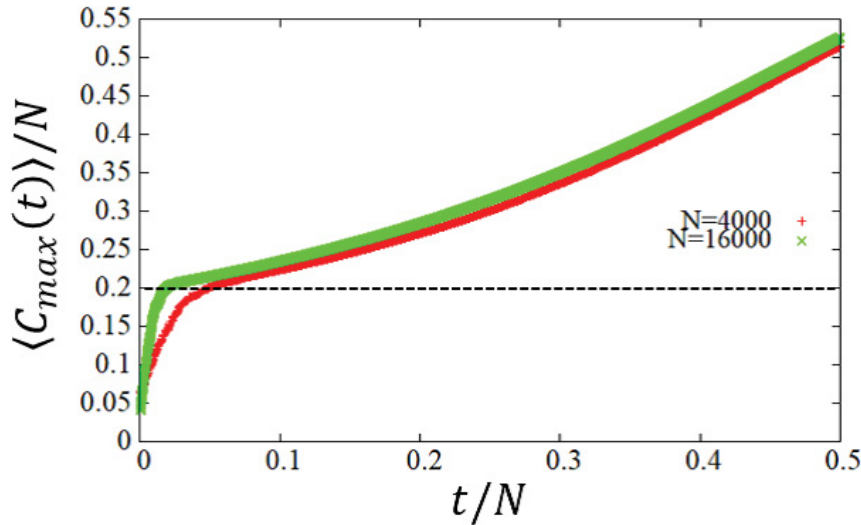


図 2.1. 秩序変数 $\langle C_{max}(t) \rangle / N$ のグラフ ($a = 0.2, \sigma = 2/3$, 100 試行平均)。赤のプロットは $N = 4 \times 10^3$ 、緑のプロットは $N = 16 \times 10^3$ のときの結果を表す。破線は $\langle C_{max}(t) \rangle / N = 0.2$ を表している。

ち上がりはより急激になることが分かる。図 2.2 に a を固定して σ を変化させたときの、 $\Delta(\sigma, a; N)$ の N 依存性のグラフを示す。いずれの場合も、 $\Delta(\sigma, a; N)$ は $\Delta(\sigma, a; N) \sim N^\beta$ のようにスケールされることが分かる。このべき的なふるまいは a の値には依存しない。図 2.3 に $\Delta - N$ の関係のフィッティングから得られる、 β の σ 依存性のグラフを示す。 $\sigma > 1/2$ のときは $\beta < 1$ であるが、これは $\Delta(\sigma, a; N)/N \sim N^{\beta-1} \rightarrow 0$ となること、すなわち弱い不連続性を持つことを表している。これは理論計算の結果と整合的な結果である。さらに、 $\sigma \leq 1/2$ のときにも β は 1 より小さな値を取る場合があり、弱い不連続性を持ち得ることが分かった。この結果についても、解析結果は弱い不連続性についての十分条件であることから、理論計算の結果とは矛盾しない。一方、 σ が十分小さく、0.2 以下のときには $\beta \simeq 1$ となり、弱い不連続性は持たないことが示唆された。今回行った数値計算結果からは、今回用いた初期条件下における弱い不連続性についての σ の閾値は、0.2 から 0.25 の間にあることが分かった。この閾値に関しては、 a の値に依存して変化する可能性がある。

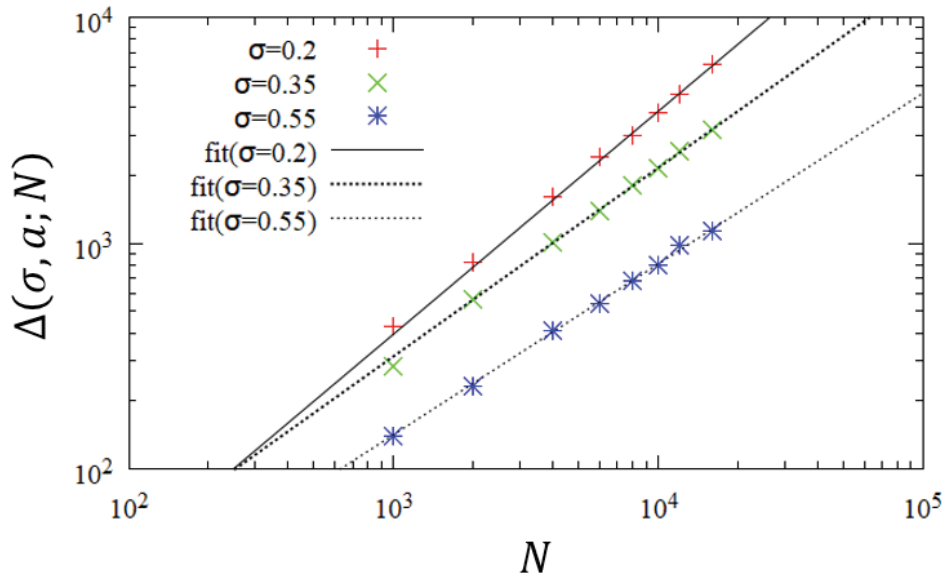


図 2.2. $a = 0.1, \sigma = 0.2, 0.35, 0.55$ のときの $\Delta(\sigma, a; N)$ の N 依存性 (両対数グラフ)。黒の直線はフィッティング曲線 $\Delta(N) = CN^{\beta(\sigma)}$ を表している。 $\beta(0.2) = 0.99 \pm 0.02, \beta(0.35) = 0.83 \pm 0.01, \beta(0.55) = 0.76 \pm 0.03$ がそれぞれ得られた。

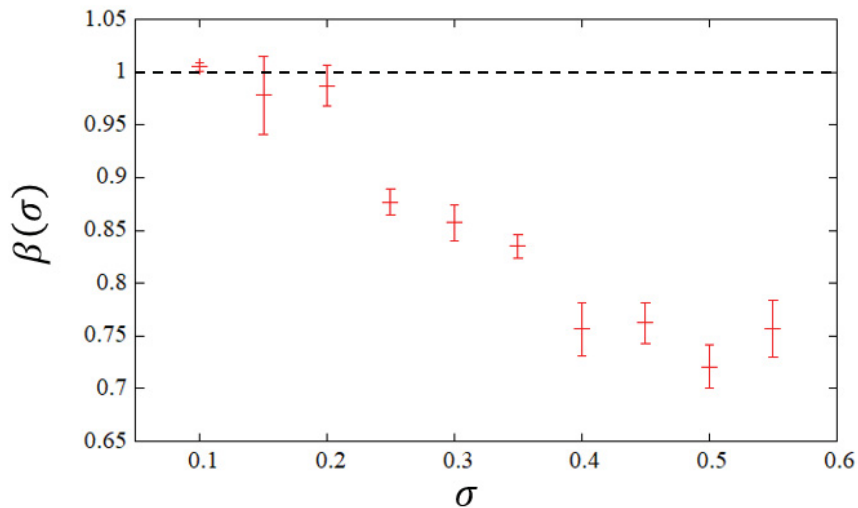


図 2.3. $\Delta - N$ の関係から $\Delta(N) = CN^{\beta(\sigma)}$ を仮定して得られた $\beta(\sigma)$ の σ 依存性 ($a = 0.1$ の場合)。エラーバーはフィッティングにおける β の標準偏差を表す。破線は $\beta = 1$ を表す。

第3章

パーコレーションモデルの強く不連続なとび

この章では、平均からずれた大きなクラスターの形成を cut-off で禁止する効果を取り入れたモデルの解析により、cut-off の効果が秩序変数の強く不連続なとびを引き起こすことを示す。

3.1 cut-off モデル

弱く不連続な転移についての議論のときと同様、ある頂点 j, k 間に辺がつながれる確率が式 (2-1) で与えられる場合のグラフのパーコレーション過程を考える。強い不連続性の実現には、平均的なクラスターサイズから外れた大きなクラスターの形成を避ける効果が重要であることが知られている [36]。しかしながら、この平均化効果が強い不連続性を実現することを数値計算的に示した研究は多いが、解析的に示した研究は少ない。本論文では、平均化効果を cut-off という形で取り入れたモデルを作成し、このようなモデルは強い不連続性を持つことを解析的に示す。次のようなモデルを考える。 $t \rightarrow t+1$ のとき、2つの頂点 j, k がつながれた場合に形成されるクラスターのサイズを $s_{jk}(t)$ と表す。¹⁾ また、 $\bar{s}_{jk}(t)$ を、 j, k がつながれた場合の平均クラスターサイズとする。²⁾ このとき、 P_a を

$$P_a(C_j(t), C_k(t)) = \begin{cases} 1 & (s_{jk}(t) \leq a\bar{s}_{jk}(t)) \\ 0 & (s_{jk}(t) > a\bar{s}_{jk}(t)) \end{cases} \quad (3-1)$$

で与える。ここで a は $a \geq 2$ を満たす定数である。 $(a$ についてのこの制限は、全ての頂点が孤立した状態においては任意の j, k で $\bar{s}_{jk} \simeq 1$ および $s_{jk} = 2$ であるため、そのような

¹⁾ j, k が属するクラスターのサイズをそれぞれ $C_j(t), C_k(t)$ と書くと、 j, k が異なるクラスターに属するとき $s_{jk}(t) = C_j(t) + C_k(t)$ 、 j, k が同じクラスターに属するとき $s_{jk}(t) = C_j(t) = C_k(t)$ である。

²⁾ t におけるクラスターの数 $n(t)$ と書くと、 j, k が異なるクラスターに属するとき $\bar{s}_{jk}(t) = N/n(t+1) = N/(n(t)-1)$ 、 j, k が同じクラスターに属するとき $\bar{s}_{jk}(t) = N/n(t+1) = N/n(t)$ である。

初期状態でこの過程を成立させるのに必要な条件である。) このモデルを cut-off モデルと呼ぶ。cut-off モデルは、先行研究 [37, 38] で提案されている、数値計算的に強い不連続性を持つことが確認されているモデルを単純化したモデルとも捉えられる。それらのモデルでは、ある辺をつなぐ確率は、その辺をつなぐことで形成されるクラスターのサイズを変数として、平均クラスターサイズを平均に持つガウシアンに従って与えられていた。cut-off モデルは、ガウシアンによって近似的に実現されていた、平均からずれたサイズのクラスター形成を cut-off で禁止する効果のみを取り入れたモデルであると言える。本論文では、この cut-off モデルが強い不連続性を持つことを解析的に示す。

3.2 強く不連続なとびの十分条件

$C_{max}(t)$ の変化は式 (1-7) または式 (1-8) で与えられていた。今、 $t' \rightarrow t' + 1$ で式 (1-8) の過程が起きたとする。 $C_{max}(t') \geq C_y(t'), C_z(t')$ より、変化のサイズは

$$C_y(t') + C_z(t') - C_{max}(t') < C_{max}(t') \quad (3-2)$$

である。サイズが $C_{max}(t')$ であったクラスターを α とし、その時刻 t におけるサイズを $C_\alpha(t)$ と書く。過程の最後には全てのクラスターは合体しているので、 α はいずれ式 (1-7) の過程で最大のクラスターと合体する。その際の秩序変数の変化のサイズは

$$C_\alpha(t) \geq C_{max}(t') > C_y(t') + C_z(t') - C_{max}(t') \quad (3-3)$$

である。以上から、 C_{max} の最大の変化は式 (1-7) の過程で引き起こされることが分かる。このことは、 C_{max} 最大の変化のサイズは、 C_{max} 以外のクラスターのサイズの最大値に等しいことを表している。すなわち、系の 2 番目に大きなクラスターを $C_{sec}(t)$ と書くとき、

$$J = \max_t \left\{ \frac{C_{sec}(t)}{N} \right\} \quad (3-4)$$

である。

さて、 $C_{sec}(t)$ が時刻 t における最小値を取るのは、 $C_{max}(t)$ 以外の全てのクラスターが同じサイズを持つときであるので、

$$C_{sec}(t) \geq \frac{N - C_{max}(t)}{n(t) - 1} \quad (3-5)$$

と評価できる。 $C_{max}(t)$ が t における最大値を取るとき、 $C_{sec}(t)$ は t における最小値を取る。 $C_{max}(t)$ の t における最大値は次のように評価できる。cut-off モデルでは形成されるクラスターサイズ s_{jk} が平均クラスターサイズ \bar{s}_{jk} の a 倍までに制限されていたため、任意の頂点 l のクラスターサイズについて、 $C_l(t) \leq aN/n(t)$ が成立する。また、明らかに $C_l(t) \leq N$ なので、

$$C_{max}(t) \leq \min \left\{ \frac{aN}{n(t)}, N \right\} \quad (3-6)$$

である。 $n(t)$ は、 $n(0) \leq N$ であり、 t が十分大きいときには $n(t) \rightarrow 1$ を満たす単調減少関数である。 a は 2 以上の有限の値であるので、 N が十分大きいとき、 $n(t) > a$ を満たすような最小の $n(t)$ が存在する。そのような $n(t)$ を n_0 と書き、 $n(t) = n_0$ を満たすある時刻を t_0 と書く。このとき、式 (3-6) より

$$C_{max}(t_0) \leq \frac{aN}{n_0} \quad (3-7)$$

である。この式を式 (3-5) に代入することにより、

$$\max_t \{C_{sec}(t)\} \geq C_{sec}(t_0) \geq \frac{N}{n_0 - 1} \left\{ 1 - \frac{a}{n_0} \right\} \quad (3-8)$$

が得られる ($n_0 > a \geq 2$ であることに注意する)。 a および n_0 は定数なので、この不等式の右辺は $O(N)$ となる。よって $J = \max_t \{C_{sec}(t)/N\} = O(1)$ となる。よって、このモデルは強い不連続性を持つことが分かる。

3.3 数値計算による解析結果の確認

有限の N での cut-off モデルのふるまいについて、数値シミュレーションを用いて考察する。初期状態として、 N 個の頂点が全て孤立している状態を考える。図 3.1 に $a = 2, N = 10^5$ のときの $C_{max}(t)/N$ の典型的なふるまいを示す。 $C_{max}(t)/N$ は $t/N = 1$ 付近で急激に立ち上がり、不連続なとびを伴って成長することが分かる。

図 3.2 に、 a を変化させたときの、 J の試行平均 $\langle J \rangle$ の N 依存性のグラフを示す。比較のため、ER モデルの場合の結果も併記している。ER モデルの場合、 $\langle J \rangle$ はべき的に減衰し、 $N \rightarrow \infty$ で 0 に漸近する。また、 J の標準偏差 $\sqrt{\langle (J - \langle J \rangle)^2 \rangle}$ もべき的に減衰することが分かる。一方、cut-off モデルの場合には、 $\langle J \rangle$ は a の値に依らず 0.4 程度の有限の値を保つことが示唆された。 $\sqrt{\langle (J - \langle J \rangle)^2 \rangle}$ については、ER モデルで見られたようなべき的な減衰傾向ははっきりとは見られない。このことは、cut-off モデルの秩序変数のふるまいが $N \rightarrow \infty$ でも収束しないことを示唆している。

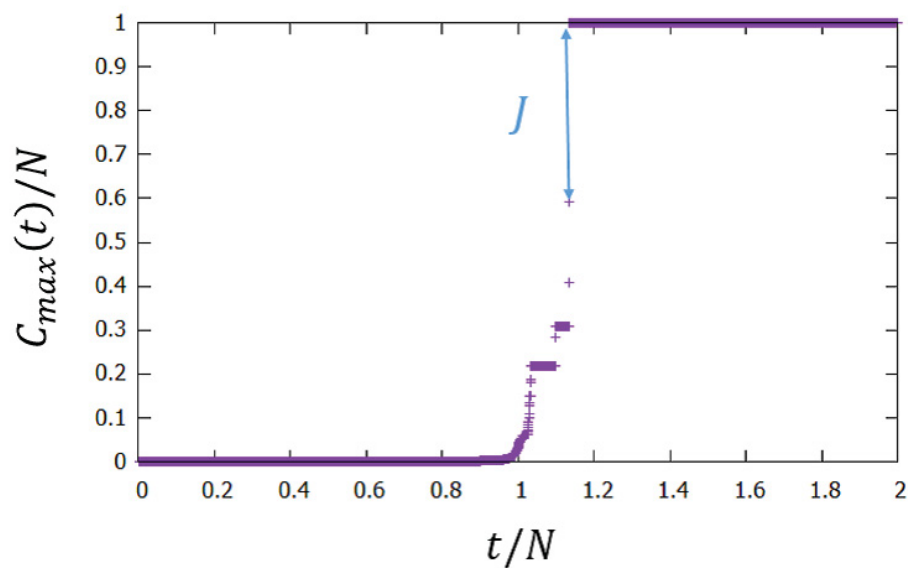


図 3.1. cut-off モデルの数値シミュレーションによって得られる秩序変数 $C_{max}(t)/N$ の典型的なふるまい ($a = 2, N = 10^5$)。 J は 1 つの辺の追加によって引き起こされる秩序変数の最大の変化のサイズを示す。

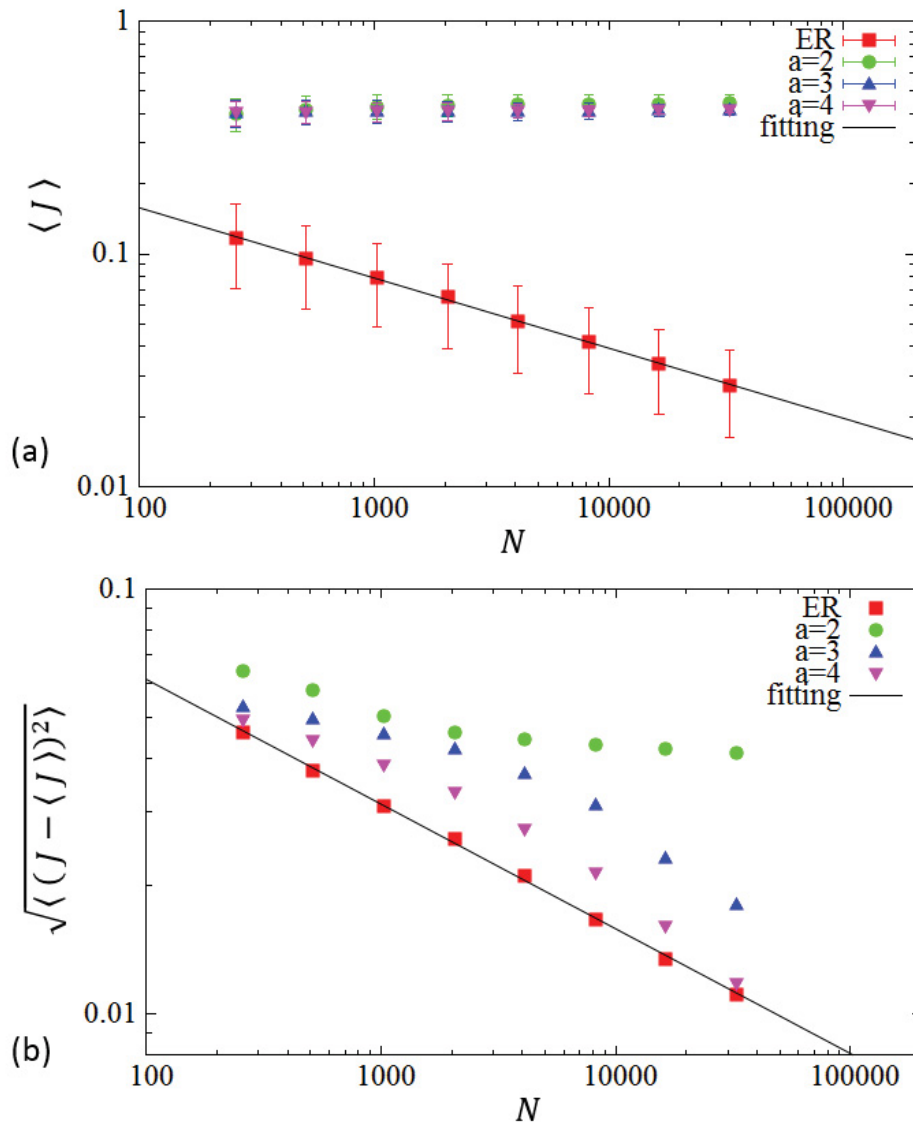


図 3.2. ER モデルおよび cut-off モデルの (a) $\langle J \rangle$ と (b) $\sqrt{\langle (J - \langle J \rangle)^2 \rangle}$ の N 依存性のグラフ。各プロット点は 10^4 回の平均を示している。(a) のエラーバーは J の標準偏差 $\sqrt{\langle (J - \langle J \rangle)^2 \rangle}$ を示す。フィッティング曲線は $\langle J \rangle \sim N^{-\beta}$ と $\sqrt{\langle (J - \langle J \rangle)^2 \rangle} \sim N^{-\sigma}$ を表す。ここで、 $\beta = 0.301 \pm 0.003$ 、 $\sigma = 0.294 \pm 0.004$ である。

第 4 章

ファイバーバンドルモデルの擬臨界的挙動

この章では、fiber bundle model に対して構造のランダムネスを導入したモデル、randomly displaced fiber bundle model を作成する。このモデルはファイバーの自然長に対応するパラメータとして l_0 を持ち、 $l_0 \ll 1$ では通常の FBM に帰着し、 $l_0 \simeq 1$ では通常の FBM とは異なった擬臨界的ふるまいを示す。 l_0 の変化に伴って転移的ふるまいがどのように変化していくかに注目し、解析を行う。

4.1 ランダムな変位を持つファイバーバンドルモデル

FBM に対してバンドル構造のランダムネスを導入したモデルとして、次のようなモデルを考える。ファイバーの本数を N とする。 i 番目のファイバーの長さを l_i としたとき、そのファイバーの復元力を、定数 l_0, l_c, k を用いて

$$f(l_i) = \begin{cases} k(l_i - l_0) & (l_0 \leq l_i \leq l_c) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4-1)$$

で与える。ここで $l_c > l_0 \geq 0, k > 0$ である。 l_0 はファイバーの自然長に対応する。物理的には、 l_0 が大きいほど、小さな張力で破壊するような弱いファイバーを考えていることになる。 $l < l_0$ のとき、 $f(l_i)$ はファイバーが破壊していなくても 0 になる。そのような状態は、直感的にはファイバーがたるんだ状態に対応し、このモデルにおいて重要な役割を果たす。バンドル構造のランダムネスとして、各ファイバーは面に対して平行な方向にランダムな変位 y_i を持つとする (図 4.1)。図 4.1 には 2 次元的なモデルを示しているが、以下の議論は 2 次元以上の場合にも同様に成立する。 y_i は確率密度関数 $p(y)$ に従って与える。一般性を失わず、以下では $k = 1$ と $l_c = 1$ を仮定する。また、 $y_i > 1$ であるファイバーは自明に壊れているため、 $p(y)$ の定義域は $[0, 1]$ に制限する。 x が 2 つの面の距離を表すとき、 $f(l_i)$ の面

に対し垂直な方向の成分を $f_i^X(x)$ と書くと、

$$\begin{aligned} f_i^X(x) &= f(l_i) \cdot \frac{x}{l_i} \\ &= \begin{cases} x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y_i^2}} \right) & (l_0 \leq \sqrt{x^2 + y_i^2} \leq 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4-2)$$

と表すことができる。全てのファイバーについての合計の力 $F^X(x)$ は、

$$F^X(x) = \sum_i f_i^X(x) \quad (4-3)$$

で与えられる。 $F^X(x)$ は位置 x におけるバンドル全体の張力と捉えることができ、平衡状態においては外力 F と釣り合う。このモデルにおいて、ランダムネスは各ファイバーの破壊閾値としてではなく、ファイバーの変位として与えられている。このモデルを randomly displaced fiber bundle model (RDFBM) と呼ぶ。global load sharing 条件の下で、RDFBM においても通常の FBM におけるものと同様な破壊の緩和過程を考えることができる。ただし、このモデルでは式 (4-2) で与えられる各ファイバーの復元力が各々で異なるために、FBM と異なり外力の再分配は各ファイバーで一様にはならない点に注意が必要である。

不織布の引っ張り破壊についての先行研究 [19, 20] においては、不織布の小さな要素を 2 つの弾性的な板とそれらをつなぐ粘弾性的なひもによって表現したモデルが提案されている。RDFBM は、その要素の板を剛体、ひもを弾性体に置き換えることで単純化したモデルと捉えることもできる。

4.2 生存ファイバー割合の解析

秩序変数に対応する生存ファイバー割合 $U(F)$ の平均的なふるまいについて考える。 N が十分大きいとき、式 (4-3) は

$$F^X(x) = Nx \int_{l_0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 1} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) p(y) dy. \quad (4-4)$$

のように書ける。外力 F を制御変数とするとき、物理的に実現される F と x の関係は、 $F^X(x)$ に対する least monotonic function [32] を用いて

$$F_{ph}(x) = \text{LMF}[F^X(x)] \quad (4-5)$$

と書ける。ここで $\text{LMF}[A(x)]$ は、関数 $A(x')$ に対して $x' \leq x$ の範囲における最大値を返す関数である。このとき、この逆関数

$$x(F) = F_{ph}^{-1}(F) \quad (4-6)$$

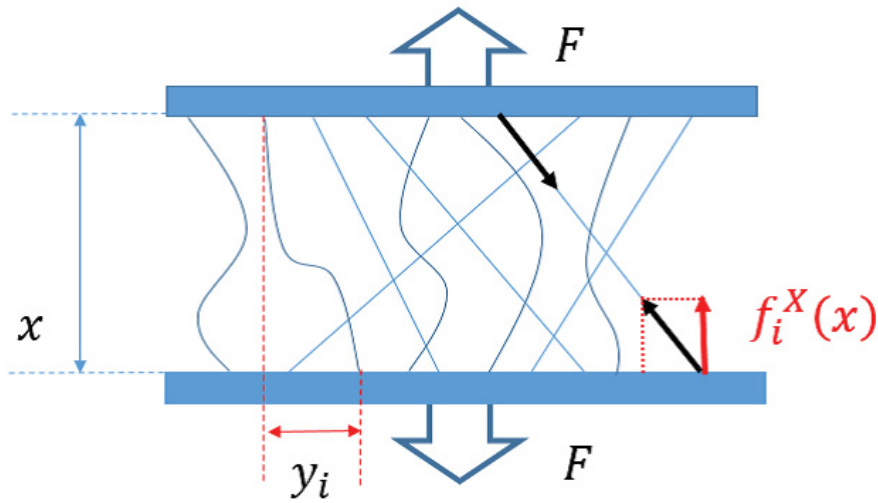


図 4.1. RDFBM の概略図。たるんだファイバーは曲線で表されている。

は、 F のときのバンドルの伸び x を与える。一方、位置 x における生存ファイバー割合は、 x の関数としては

$$U(x) = \int_{\sqrt{x^2+y^2}<1} p(y)dy \quad (4-7)$$

と計算できる。以上を用いて、 F に対する生存ファイバー割合は

$$U(F) \equiv U(F_{ph}^{-1}(F)) \quad (4-8)$$

と得られる。

図 4.2 に l_0 を変化させたときの $U(F)$ の典型的な数値シミュレーション結果を示す。曲線は式 (4-4) と式 (4-7) から得られる $F-U$ 関係を表している。ここで、 $U(F)$ は $F^X(x)$ と $U(x)$ の媒介変数表示によってプロットしている。これらの理論曲線は数値計算結果と整合的である。 l_0 が大きくなるほど、バンドルは小さな F で破断するようになる。同時に、 $U(F)$ の大きなジャンプも増えるように見える。これは、以下で計算する $D(\Delta)$ のふるまいの、 l_0 が大きくなるほど大きな Δ の頻度が増えるという結果と整合的な結果である。

4.3 雪崩サイズ分布の解析

秩序変数 $U(F)$ の不連続なとびのサイズの頻度分布に対応する、雪崩サイズ分布 $D(\Delta)$ について考える。以下では、 $l_0 \ll 1$ と $l_0 \simeq 1$ の 2 つの極限で、 $D(\Delta)$ がそれぞれ別のべき乗則に従うことを示す。まずは、 $l_0 \ll 1$ の場合について考える。 l_0 が十分小さいとき、式

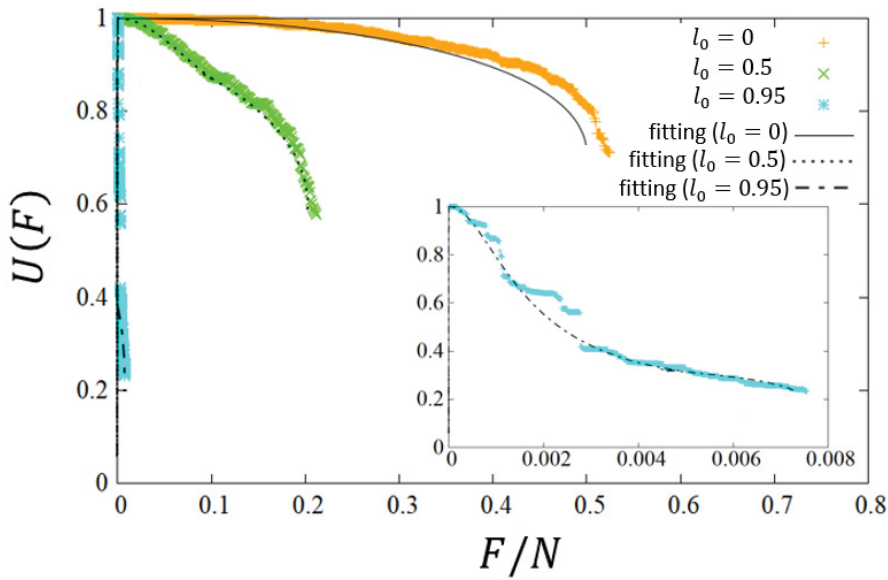


図 4.2. 数値計算によって得られる $U(F)$ の典型的な結果 ($p(y) : [0, 1]$ の一様分布、 $N = 10^3$, $l_0 = 0, 0.5, 0.95$)。曲線は式 (4-4), (4-7) から得られる $F - U$ 関係。内部の小さなグラフは $l_0 = 0.95$ の結果の拡大図を表す。

(4-2) は

$$f_i^X(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq x_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4-9)$$

と表せる。ここで $x_i = \sqrt{1 - y_i^2}$ は確率変数である。式 (4-9) と式 (1-13) を比較すると、このモデルは通常の FBM と同一視できることが分かる。 $f_i = \sqrt{1 - y_i^2}$ より、この場合の破壊閾値の確率密度関数は

$$g(f) = p(y) \left| \frac{dy}{df} \right| = p(\sqrt{1 - f^2}) \frac{f}{\sqrt{1 - f^2}} \quad (4-10)$$

で与えられる。 f' を生存しているファイバー 1 本当たりにかかる力としたとき、通常の FBM と同様、破壊の雪崩サイズ分布は $Nf'(1 - G(f'))$ が唯一の最大値を持つ関数である場合に、べき乗則 $D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}$ に従うことが結論できる。

次に、 $l_0 = 1 - \epsilon$ ($0 < \epsilon \ll 1$) の場合について考える。 $\epsilon \ll 1$ のとき、雪崩のほとんどは $x < 1 - \epsilon$ で起きると考えられるので、 $D(\Delta)$ は $x < 1 - \epsilon$ で起きる雪崩イベントによるものだけで近似できると仮定する。外力 F' で起きる雪崩に注目するときには、たるんだファイバーは力を担わないため、たるんでいないファイバーのみが雪崩のダイナミクスに寄与する。 $x' = x(F')$ とすると、外力 F' のときにたるみのないファイバーは、 $1 - \epsilon < \sqrt{x'^2 + y_i^2} < 1$ 、すなわち $\sqrt{(1 - \epsilon)^2 - x'^2} < y_i < \sqrt{1 - x'^2}$ を満たす必要がある。そのようなファイバーの

数は

$$\begin{aligned}
 n(x') &= N \int_{1-\epsilon < \sqrt{x'^2 + y^2} < 1} p(y) dy \\
 &= N \int_{1-\epsilon}^1 \frac{l \cdot p(\sqrt{l^2 - x'^2})}{\sqrt{l^2 - x'^2}} dl \\
 &\simeq N \epsilon \frac{p(\sqrt{1 - x'^2})}{\sqrt{1 - x'^2}}
 \end{aligned} \tag{4-11}$$

と計算できる。計算中では変数変換 $l = \sqrt{x'^2 + y^2}$ を用いた。今、この $n(x')$ 本のファイバーで構成される、全体の内の一部分のバンドルに注目する。また、そのバンドルには F' の外力が初期条件として印加されているとする。このバンドルの Δ の頻度分布を $D'(\Delta)$ と書く。 ϵ が十分小さいが 0 でない値であるとすれば、 $n(x') = O(N)$ である。張力の合計の垂直成分 $F^X(x') = \sum_i f_i^X(x')$ は、式 (4-4) から

$$\begin{aligned}
 F^X(x') &= Nx' \int_{1-\epsilon < \sqrt{x'^2 + y^2} < 1} \left(1 - \frac{1-\epsilon}{\sqrt{x'^2 + y^2}}\right) p(y) dy \\
 &= Nx' \int_{1-\epsilon}^1 l \left(1 - \frac{1-\epsilon}{l}\right) \frac{p(\sqrt{l^2 - x'^2})}{\sqrt{l^2 - x'^2}} dl \\
 &\simeq Nx' \epsilon^2 \frac{p(\sqrt{1 - x'^2})}{\sqrt{1 - x'^2}}
 \end{aligned} \tag{4-12}$$

と計算できる。式 (4-11) と式 (4-12) より、ファイバー 1 本当当たりの平均の張力は

$$\langle f^X(x') \rangle = F^X(x')/n(x') = \epsilon x' \tag{4-13}$$

と計算できる。一方、式 (4-2) より、 $f_i^X(x')$ は最大値が $\epsilon x'$ である確率変数である。このことは、 $f_i^X(x')$ がファイバーに依らず $\epsilon x'$ で近似できることを意味している。すなわち、今考えているバンドルの一部分は、通常の FBM と同値であると考えられる。そのように考えたときの破壊閾値の確率密度関数は、 $\sqrt{(1-\epsilon)^2 - x'^2} < y < \sqrt{1 - x'^2}$ の範囲の $p(y)$ を $\tilde{p}(y)$ と書くとき、 $f_i \simeq \epsilon x' = \epsilon \sqrt{1 - y_i^2}$ より、

$$\tilde{g}(f) = \tilde{p}(\sqrt{1 - f^2/\epsilon^2}) \frac{f}{\epsilon \sqrt{1 - f^2/\epsilon^2}} \tag{4-14}$$

で与えられる。このバンドルの雪崩は F' から始まるので、このバンドルの F_0 に対応する初期の外力は F' となり、 $F' \neq 0$ であれば f'_0 は 0 でない値を取る。 $x' < 1$ より、このバンドルの f'_c の上限は ϵ で与えられ、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき、 f'_c は限りなく小さくなる。このとき、 $|f'_c - f'_0|$ は十分小さくなるため、 $D'(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ が期待される。このバンドルの外側にいるファイバーの寄与が十分小さく無視できると仮定すれば、全体のバンドルの雪崩で作られる $D(\Delta)$ は $D'(\Delta)$ の和で表現できる。以上より、 $l_0 \simeq 1$ では $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ となることが分かる。このことは、今考えているモデルが擬臨界的な状態にあることを示している。

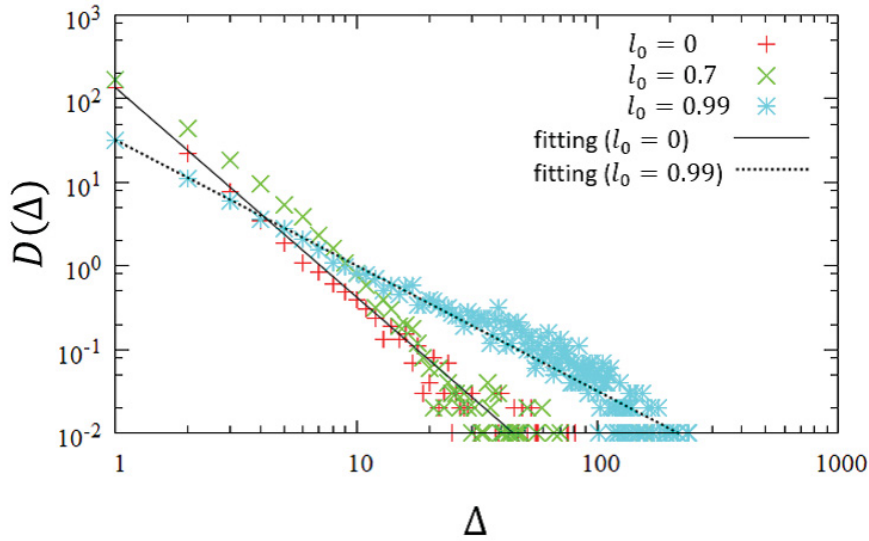


図 4.3. $D(\Delta)$ の数値計算結果 ($p(y) : [0, 1]$ の一様分布、 $N = 10^3$ 、 $l_0 = 0, 0.7, 0.99, 100$ サンプル平均、両対数グラフ)。直線は $D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}$ 、点線は $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ を表す。

図 4.3 に l_0 を変化させたときの $D(\Delta)$ の数値計算結果を示す。図から、 $l_0 \ll 1$ のとき $D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}$ となり、 $l_0 \simeq 1$ のとき $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ となることが確認できる。この結果は理論計算の結果と整合的である。

4.4 近似の妥当性の確認

雪崩サイズ分布 $D(\Delta)$ についての $l_0 \simeq 1$ のときの議論においては、 $D(\Delta)$ は $x < 1 - \epsilon = l_0$ で起きる雪崩イベントによるものだけで近似できると仮定していた。この仮定の妥当性の確認のため、数値シミュレーションを用いて $x < l_0$ と $x > l_0$ のそれぞれの場合での $D(\Delta)$ を求め、比較を行う。図 4.4 に $x < l_0, x > l_0$ それぞれの場合の $D(\Delta)$ を示す。 $x < l_0$ での $D(\Delta)$ はべき乗則 $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ に従っており、仮定が妥当であることを支持している。

4.5 擬臨界的挙動の特徴づけ

式 (1-17) は通常の FBM の $D(\Delta)$ についてのみ成り立つことが確認されている式であったが、ここではこの式を RDFBM の任意の l_0 における $D(\Delta)$ のフィッティング関数として使い、RDFBM が通常の FBM の状態と擬臨界状態のどちらに近いかを評価することを考える。図 4.5 に l_0 を変えたときの $D(\Delta)$ と式 (1-17) を用いたフィッティング曲線を示す。式 (1-17) は $D(\Delta)$ をよくフィットできることが分かる。フィッティングパラメータの Δ_c

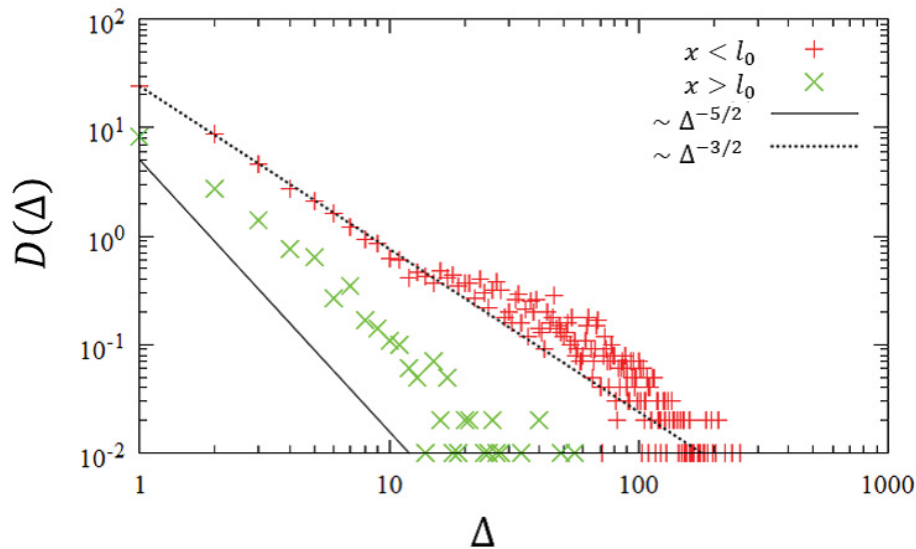


図 4.4. $x < l_0$ と $x > l_0$ それぞれの場合の $D(\Delta)(p(y) : [0, 1]$ の一様分布、 $N = 10^3$ 、 $l_0 = 0.99$ 、100 サンプル平均、両対数グラフ。直線は $D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}$ 、点線は $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ を表す。

は $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ と $D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}$ 境界を表しており、系がどの程度擬臨界的の状態に近いかを特徴づけるパラメータとして用いることができる。図 4.6 に Δ_c の l_0 依存性のグラフを示す。 l_0 が小さいときには $\Delta_c \ll 1$ であり、 $D(\Delta)$ の全体が $D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}$ に従うことを表している。一方、 l_0 が 1 に近づくほど Δ_c は大きくなり、 $l_0 \rightarrow 1$ で発散するようふるまいが見られる。これは、 $l_0 \rightarrow 1$ のとき $D(\Delta)$ の全体が $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ に従うことを表している。

最後に、緩和ステップ $t_f(F)$ に注目する。図 4.7 に (a) $l_0 \ll 1$ 、(b) $l_0 \simeq 1$ の場合の、 $t_f(F)$ の典型的な数値計算結果を示す。 l_0 が小さいとき、 $t_f(F)$ は F_c で大きなピークを持ち、他のピークはそれと比較して十分小さいという、通常の FBM と同様の結果を示す。一方、 l_0 が大きいとき、 $t_f(F)$ はやはり F_c でピークを持つが、それよりも大きなピークが他にも多く見られる。これは、通常の FBM とは異なり、 F_c 以外の F においても破断と同じようなダイナミクスが局所的に起こっていることを示唆する結果である。

4.6 雪崩サイズ分布と実験結果との対応について

雪崩サイズ分布 $D(\Delta)$ は、実験的にはアコースティック・エミッションと呼ばれる量の分布と対応させることができる。アコースティック・エミッションとは、破壊が起きるときに放出されるエネルギーのことで、典型的には音や熱として測定される。今、ある間欠的に起きる破壊の過程に注目したとき、一つの破壊イベントで放出されるエネルギーを E と書く

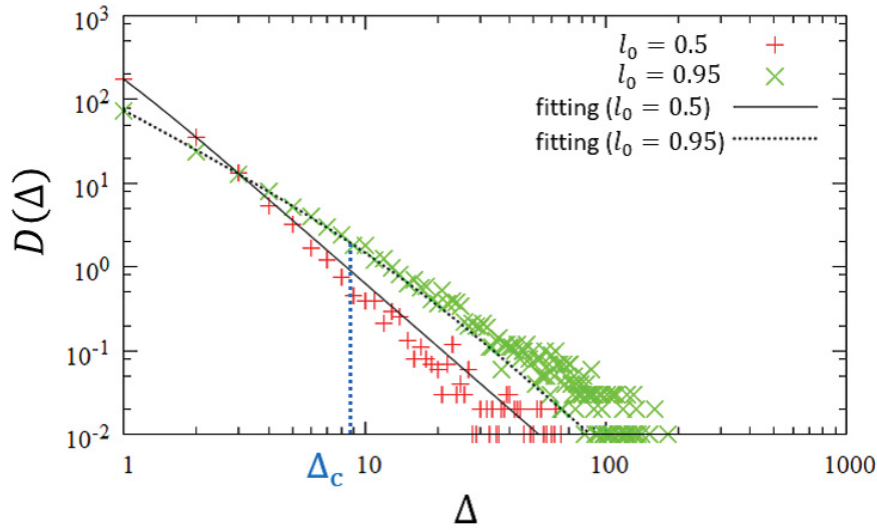


図 4.5. Eq. (1-17) を用いた $D(\Delta)$ のフィッティング結果 ($p(y) : [0, 1]$ の一様分布、 $N = 10^3$, $l_0 = 0.5, 0.95$ 、100 サンプル平均、両対数グラフ)。黒の曲線はフィッティング曲線を表す。 $l_0 = 0.95$ のとき $\Delta_c = 8.90$ が得られ (グラフには青の点線で示している)、 $l_0 = 0.5$ のとき $\Delta_c = 0.52$ が得られた。

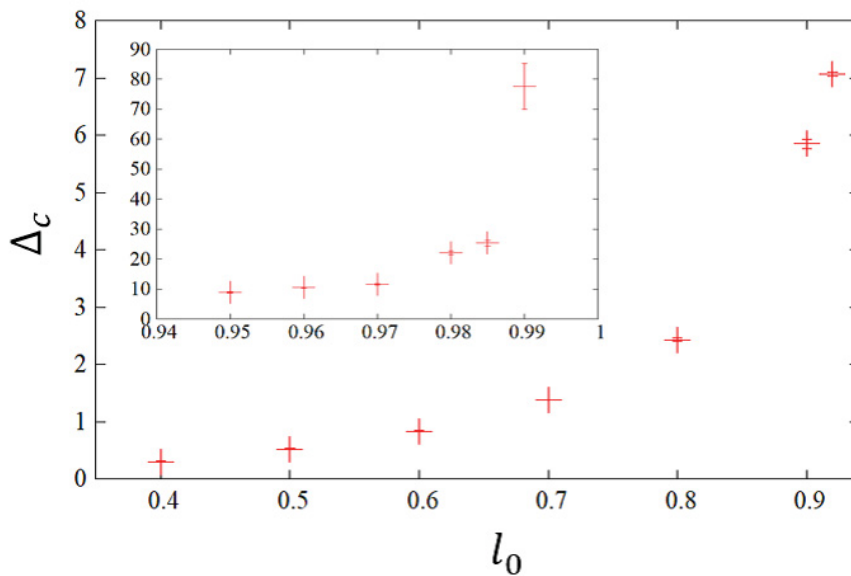


図 4.6. $D(\Delta)$ のフィッティングにより得られた Δ_c の l_0 依存性のグラフ (パラメータは図 4.5) のものと同様。エラーバーはフィッティングにおける最小二乗誤差を表す。大きいグラフは l_0 が $[0.3, 0.94]$ の範囲のグラフ、内部の小さいグラフは $[0.94, 1]$ の範囲のグラフを表す。

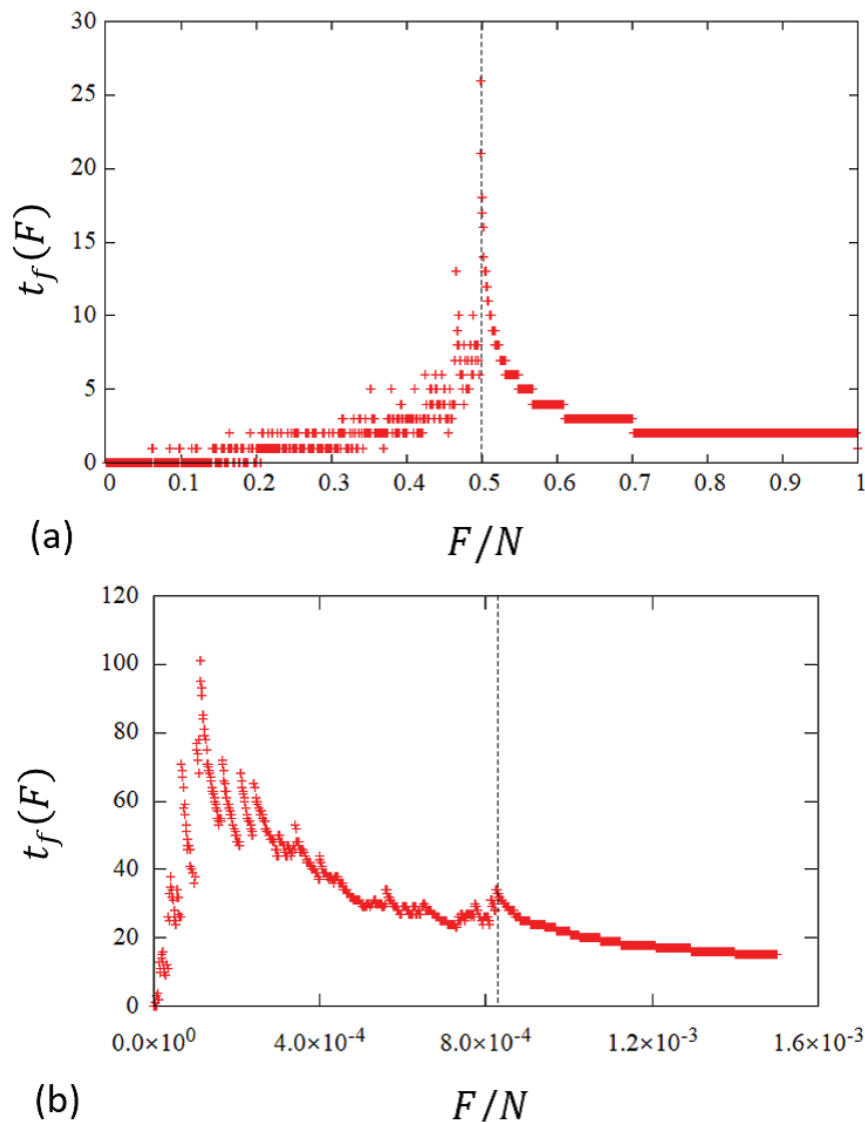


図 4.7. $p(y)$ が $[0, 1]$ の一様分布、 $N = 10^3$ 、(a) $l_0 = 0$ 、(b) $l_0 = 0.99$ の場合の $t_f(F)$ の典型的な数値計算結果。黒の破線はそれぞれの場合の破断外力 F_c を表す。

ことにすると、多くの破壊イベントの統計データとして E の頻度分布 $D(E)$ を得ることができる。レンガやコンクリートの破壊など、多くの破壊実験で $D(E)$ はべき乗則に従うことが知られ、特に地震の場合には、この法則は Gutenberg-Richter 則として知られる結果に対応する [17]。RDFBM の場合、あるファイバーが破壊したときに解放されるエネルギーは、破壊が起きるときにファイバーが持っている弾性エネルギーに対応し、ファイバー一本に対して $(1 - l_0)^2/2$ で与えられる。このとき、ある雪崩イベントで開放されるエネルギーの合計は破壊したファイバーの本数に比例するので、 $D(E) \sim D(\Delta)$ となる。実験結果の例として、ある紙の剥がし実験において、 $D(E) \sim E^{-1.7 \pm 0.2}$ となることが報告されている [39]。

このべき指数は RDFBM の $l_0 \simeq 1$ のときの結果のべき指数、 $-3/2$ と近い値であり、実験とモデルの対応についてより詳細に検討すべき結果であると考えられる。

第 5 章

結論

5.1 各章のまとめ

第 1 章

相転移と確率モデルの概要および本研究の動機について述べた。現実の複雑な世界で見られる多様な相転移現象を理解する上で、多数の要素の相互作用とランダムネスによって転移的ふるまいを実現する簡単な確率モデルの解析は重要である。本論文では、パーコレーションモデルとファイバーバンドルモデル (FBM) と呼ばれる 2 つの確率モデルに注目し、それらに見られる特殊な転移的ふるまいが起きる条件について議論した。後の章を理解するために必要となる前提知識として、グラフ上のパーコレーションの定式化を行い、秩序変数の爆発的ふるまいを特徴づける弱い不連続性と強い不連続性の定義について述べた。さらに、破壊のシンプルなモデルの一つとして知られる FBM の概要を説明し、このモデルの平衡状態への緩和や転移的ふるまいについて説明した。また、FBM の秩序変数 $U(F)$ のゆらぎを特徴づける雪崩サイズ分布 $D(\Delta)$ についての解析結果を示した。

第 2 章

グラフのパーコレーションモデルにおいて、加えた辺の数 t の $O(N^\beta)$ ($0 < \beta < 1$) 程度の変化に対し、最大クラスターサイズ $C_{max}(t)$ が $o(N)$ から $O(N)$ となる転移を示すことを、秩序変数 $C_{max}(t)/N$ の弱く不連続な転移と呼ぶ。ここでは、ある 2 つの頂点の間に辺が加えられる確率が、それらの属するクラスターサイズのべき乗の掛け算に比例する確率で与えられるようなモデル [35] について、秩序変数の弱く不連続な転移が起きる条件を議論した。このモデルはグラフのパーコレーションのモデルとして最も基本的な ER モデルを一般化したモデルとして捉えられる。このモデルでは、2 つのクラスターが分かれたままでいられる時間 Δt を、 N に対する order estimation により評価することができる。この評価を用

いることで、クラスターサイズの初期条件に対し、弱く不連続な転移が起きるための十分条件が導ける。この結果を用いると、全ての頂点が孤立した初期条件からは弱く不連続な転移を示さない ER モデルも、適当な初期条件の下では弱く不連続な転移を示すことが分かる。

第3章

グラフのパーコレーションモデルにおいて、 t の $O(1)$ 程度の変化に対して、 $C_{max}(t)$ が $O(N)$ 程度の変化を示すとき、秩序変数は強く不連続なとびを持つと言われる。ここでは、平均からずれた大きなクラスターの形成を cut-off で禁止するモデルである cut-off モデルを用い、秩序変数が強く不連続なとびを持つ条件について議論した。このモデルは、強く不連続なとびを持つことが数値計算的に示されていたモデル [37, 38] を単純化したモデルと捉えることができる。cut-off モデルは cut-off の範囲を制御するパラメータとして a を持つ。解析により、このモデルは時刻 t における $C_{max}(t)$ について a に依存した上限を持つことが示せる。このことを用いると、時刻 t における $\max_t \{C_{sec}(t)\}$ の下限を評価することができ、適切に選んだ t に対して、この量が a に依らずに $O(N)$ となることが分かる。それにより、cut-off モデルは a に依らず強く不連続なとびを持つことが示せる。

第4章

FBM は、ファイバーと呼ばれる糸の束に外力を印加したときの破壊について考える確率モデルであり、破壊の相転移を示すモデルとして知られる。本論文では、fibrous material と呼ばれる材料に特有な「構造のランダムネス」を FBM に導入したモデルとして、randomly displaced fiber bundle model (RDFBM) と呼ぶモデルを作成し、FBM と比較して転移的ふるまいがどのように変わるかを議論した。RDFBM はファイバーのたるみという顕著な効果があり、この効果のために通常の FBM とは異なるふるまいが実現される。このモデルは、たるみの度合いを制御するパラメータとしてファイバーの自然長に対応する量、 l_0 を持ち、 l_0 の大きさに依存してふるまいを大きく変える。 $l_0 \ll 1$ のとき、このモデルは通常の FBM と一致する。理論計算および数値計算から、FBM の秩序変数に対応する量である生存ファイバー割合 $U(F)$ は、 $l_0 \ll 1$ では通常の FBM と同様のふるまいを示す一方、 l_0 が 1 に近づくほど、平均的なふるまいから大きくゆらぐような挙動を示すことが分かった。 $U(F)$ のゆらぎを特徴づける破壊の雪崩サイズ分布 $D(\Delta)$ は、 $l_0 \ll 1$ では通常の FBM と同様の $D(\Delta) \sim \Delta^{-5/2}$ というべき乗則に従う一方、 $l_0 \simeq 1$ では、 $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ というべき乗則に従うことが分かった。 $D(\Delta) \sim \Delta^{-3/2}$ というふるまいは FBM の転移点近傍でのふるまいと一致し、これは RDFBM が $l_0 \simeq 1$ では擬臨界的と呼ぶべき状態にあることを表している。実際、RDFBM は $l_0 \simeq 1$ のとき、印加する外力の微小な変化の区間では、臨界状態にある FBM と同一視できることを解析的に示すことができる。 $l_0 \ll 1$ や $l_0 \simeq 1$ の近

似ができない領域については、数値的に得られる $D(\Delta)$ のフィッティングによって、系がどの程度擬臨界性を持つかを特徴づけるパラメータ Δ_c を得、 l_0 との関係について考察を行った。また、 l_0 を変化させたときの緩和ステップ $t_f(F)$ の数値シミュレーションから、擬臨界的ふるまいの特徴について議論した。

5.2 展望

本論文では、確率モデルに見られる特殊な転移的ふるまいの統計的性質や、それらが起きる条件について議論した。今後は得られた結果をより一般化することと、現実の系との対応について考えたい。まず、パーコレーションモデルの弱い不連続性や強い不連続性の研究については、完全グラフ上のパーコレーションとしては比較的一般性を持った議論ではあるが、グラフの形状が変化したときには本研究の結果は頑健ではない。より一般に通用する議論とするため、まずは同じ枠組みの下、グラフの形状を変化させた場合におけるそれら不連続性の条件について考える必要がある。例えば、本研究で得られた結果を格子におけるパーコレーション問題の場合に拡張することは重要な問題である。さらには、パーコレーションモデルという枠組みを超えて、別の確率モデルにおいて弱い不連続性や強い不連続性が現れる条件についても明らかにしたい。具体的には、例えば格子スピン系では、どのような相互作用があるときにこのようなふるまいが現れるかを明らかにすることは、重要な問題であると考えている。

RDFBM の研究については、秩序変数に対応する生存ファイバー割合 $U(F)$ の平均的なふるまいや、 $U(F)$ のゆらぎを特徴づける $D(\Delta)$ に関しては、ある程度解析ができた。しかしながら $U(F)$ の臨界点近傍におけるふるまいや緩和ステップ $t_f(F)$ に関して、特に変位の確率密度関数 $p(y)$ への依存性については、未だ十分な議論ができていない。例えば、通常の FBM におけるのと同様の、 $t_f(F)$ の転移点におけるべき発散が見られるかは興味深い問題であり、より詳細に検討したい。また、RDFBM がどの程度現実の fibrous material の破壊を再現できているかは、他のモデルの数値シミュレーションや、実験との比較により検証する必要がある。特に、RDFBM をより現実の材料に近づけたモデルと捉えられる不織布の工学モデル [19, 20] や、紙の剥がし実験 [39] などとの比較を行うことは、興味深い問題であると考えている。

参考文献

- [1] 田崎晴明, 『統計力学 II』, 培風館, 2008 年.
- [2] 西森秀稔, 『相転移・臨界現象の統計力学』, 培風館, 2005 年.
- [3] 江沢洋, 渡辺敬二, 鈴木増雄, 田崎晴明, 『くりこみ群の方法』, 岩波書店, 1994 年.
- [4] R. Badii and A. Politi, *Complexity: Hierarchical Structures and Scaling in Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [5] 川崎恭治, 『非平衡と相転移』, 朝倉書店, 2000 年.
- [6] 蔵本由紀, 『非線形科学』, 集英社, 2007 年.
- [7] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier, *J. Phys. A* 26, 1493 (1993).
- [8] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, *Phys. Rev. Lett.* 75, 1226 (1995).
- [9] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* 77, 137 (2005).
- [10] D. スタウファー, A. アハロニー著, 小田垣孝訳, 『パーコレーションの基本原理 (第 2 版)』, 吉岡書店, 2001 年.
- [11] P. Grassberger, C. Christensen, G. Bizhani, S. W. Son, and M. Paczuski, *Phys. Rev. Lett.* 106, 225701 (2011).
- [12] N. Bastas, P. Giazitzidis, M. Maragakis, K. Kosmidis, *Physica A* 407, 54 (2014).
- [13] S. Pradhan, A. Hansen, and B. K. Chakrabarti, *Rev. Mod. Phys.* 82, 499 (2010).
- [14] A. Hansen, P. C. Hemmer, and S. Pradhan, *The Fiber Bundle Model* (Wiley-VCH, Verlagsgesellschaft, 2015).
- [15] F. T. Peirce, *J. Text. Inst.* 17, T355 (1926).
- [16] H. E. Daniels and H. Jeffreys, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 183, 405 (1945).
- [17] M. J. Alava, P. K. V. V. Nukara, and S. Zapperi, *Adv. Phys.* 55, 349 (2006).
- [18] M. Alava and K. Niskanen, *Rep. Prog. Phys.* 69, 669 (2006).
- [19] F. Farukh, E. Demirci, M. Acar, B. Pourdeyhimi, V.V. Silberschmidt, *J. Mater. Sci.* 48, 2334 (2013).
- [20] E. Sozumert, F. Farukh, E. Demirci, M. Acar, B. Pourdeyhimi, and V. V. Silber-

- schmidt, J. Phys. Conf. Ser. 628, 012093 (2015).
- [21] A. Ridruejo, C. González, and J. LLorca, Int. J. Solid. Struct. 49, 2215 (2012).
- [22] M. E. J. Newman and R. M. Ziff, Phys. Rev. Lett. 85, 4104 (2000).
- [23] 樋口保成, 『パーコレーション理論講義』 (SGC ライブラリ), サイエンス社, 2014 年.
- [24] 矢久保孝介, 『複雑ネットワークとその構造』, 共立出版, 2013 年.
- [25] 浜田隆資, 秋山仁, 『グラフ論要説』, 槇書店, 1982 年.
- [26] P. Erdős and P. Rényi, Publ. Math. 5, 17 (1960).
- [27] R. Albert and A. L. Barabási, Rev. Mod. Phys. 74, 47 (2002).
- [28] R. Durrett, *Random Graph Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [29] R. M. D'Souza and J. Nagler, Nature Phys. 11, 531 (2015).
- [30] J. Nagler, A. Levina, and M. Timme, Nature Phys. 7, 265 (2011).
- [31] D. Achlioptas, R. M. D'Souza, and J. Spencer, Science 323, 1453 (2009).
- [32] M. Kloster, A. Hansen, and P. C. Hemmer, Phys. Rev. E 56, 2615 (1997).
- [33] S. Pradhan, A. Hansen, and P. C. Hemmer, Phys. Rev. E 74, 016122 (2006).
- [34] N. G. De Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis* (Amsterdam, NorthHolland, 1961).
- [35] S.S. Manna and A. Chatterjee, Physica A 390, 177 (2011).
- [36] A. A. Moreira, E. A. Oliveira, S. D. S. Reis, H. J. Herrmann, and J. S. Andrade Jr., Phys. Rev. E 81, 040101 (R) (2010).
- [37] N. A. M. Araújo and H. J. Herrmann, Phys. Rev. Lett. 105, 035701 (2010).
- [38] K. J. Schrenk, N. A. M. Araújo, and H. J. Herrmann, Phys. Rev. E 84, 041136 (2011).
- [39] L. I. Salminen, J. M. Pulakka, J. Rosti, M. J. Alava, and K. J. Niskanen, Europhys. Lett. 73, 55 (2006).

謝辞

本学位論文の執筆にあたり、指導教官である山崎義弘先生には大変お世話になりました。また、お忙しい中で副査を引き受けていただき、本研究への多くのアドバイスを頂けた香取眞理教授、湯浅一哉教授、原山卓久教授、望月維人教授にも心より感謝いたします。山崎研究室の皆様との議論は非常に有意義でした。最後に、直接、間接的に研究生活を支えてくれた家族と友人、その他諸々の人と物への、感謝を申し上げます。

研究業績

論文 (査読あり)

1. Yuhei Yamada and Yoshihiro Yamazaki, Avalanche distribution of fiber bundle model with random displacement, *J. Phys. Soc. Jpn.* 88, 023002 (2019).
2. Yuhei Yamada and Yoshihiro Yamazaki, Condition of weak discontinuity for percolation models with edge selection rule depending on cluster sizes, *J. Phys. Soc. Jpn.* 87, 085002 (2018).
3. Yuhei Yamada and Yoshihiro Yamazaki, Transient properties of probability distribution for a Markov process with size-dependent additive noise, *J. Phys. Soc. Jpn.* 87, 043001 (2018).
4. Yuhei Yamada and Yoshihiro Yamazaki, A cluster-size averaging model for strongly discontinuous percolation, *J. Phys. Soc. Jpn.* 85, 055001 (2016).

学会発表 (査読なし)

1. Yuhei Yamada, Yoshihiro Yamazaki, Duration time of mesoscopic clusters in percolation with an edge selection rule depending on cluster sizes, APEF 2018, Tokyo Univ. (November 2018).
2. 山田雄平, 山崎義弘, 「スタンプラリー型待ち行列モデルにおける応答時間と戦略」, 日本物理学会, 9aM203-4, 同志社大学, 2018年9月.
3. 山田雄平, 山崎義弘, 「繊維で構成された物体が示す破壊の統計的性質」, 粘着技術研究会産学交流ポスターセッション, 3PA11-B, すみだ産業会館, 2017年11月.
4. 山田雄平, 山崎義弘, 「抑制効果を導入したパーコレーションモデルの臨界領域幅の解析」, 日本物理学会, 23pJ16-3, 岩手大学, 2017年9月.
5. 山田雄平, 山崎義弘, 「印加する力に対し垂直な方向に変位を持った Fiber bundle model が示す破壊の相転移」, 日本物理学会, 20pB14-4, 大阪大学, 2017年3月.
6. Yuhei Yamada, Yoshihiro Yamazaki, Analysis of fiber bundle model with displace-

- ment which is vertical to applied load, Nara Workshop on Nonlinear Dynamics, Nara Women's Univ. (December 2016).
7. 山田雄平, 山崎義弘, 「サイズに依存した加算ノイズによる分布の発展」, 日本物理学会, 14pA-8, 金澤大学, 2016 年 9 月.
 8. 山田雄平, 山崎義弘, 「ランダムな変位を持ったファイバーバンドルモデルの破壊の雪崩現象の解析」, 粘着技術研究会産学交流ポスターセッション, 4PA05-A, 大阪科学技術センター, 2016 年 7 月.
 9. 山田雄平, 山崎義弘, 「印加する力に対し垂直な方向に変位を持ったファイバーバンドルモデルの解析」, 日本物理学会, 21aAP-1, 東北学院大学, 2016 年 3 月.
 10. 山田雄平, 山崎義弘, 「Erdős-Rényi モデルの秩序変数に見られる対数正規性について」, 日本物理学会, 24pAJ-1, 早稲田大学, 2015 年 3 月.
 11. 山田雄平, 山崎義弘, 「確率的とびを伴ったネットワークのパーコレーションモデルについて」, 日本物理学会, 7aAY-2, 中部大学, 2014 年 9 月.