Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

博 士 論 文 概 要
Doctoral Thesis Synopsis

論 文 題 目
Thesis Theme

Invariant Hilbert schemes and resolutions of singularities of GIT quotients
不変 Hilbert スキーム及び GIT 商の特異点解消

申 請 者
(Applicant Name)

Ayako	KUBOTA
久保田	絢子

Department of Pure and Applied Mathematics,
Research on Algebraic Geometry

December, 2019

本論文の研究対象である不変 Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}_h^G(X)$ は, 簡約代数群 G の作用付きスキームのモジュライ空間である. Alexeev と Brion (2005) によって最初に連結な G に対して導入され, その後 Brion (2013) によって G が連結とは限らない場合にもその存在の証明が拡張された. したがって, 不変 Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}_h^G(X)$ は有限群 G に対して定まる G-Hilbert スキーム $G\text{-}\mathrm{Hilb}(X)$ の一般化であるということができ, 付随する Hilbert–Chow 射によって商多様体 $X/\!/G$ の特異点解消の候補となる. 伊藤と中村 (1996) によって導入された G-Hilbert スキーム $G\text{-}\mathrm{Hilb}(X)$ は, X の次元が 3 以下で G の作用が Gorenstein である場合には商多様体 X/G のクレパントな特異点解消を与えることが知られている (伊藤–中村 1996, 中村 2001, Bridgeland–King–Reid 2001). また, McKay 対応に新たな説明を与えるものとして, 表現論との関連においても盛んに研究されている. 一方無限群の場合には, 古典群 G とその有理線型表現 X に対するいくつかの結果 (Jansou–Ressayre 2009, Becker 2011, Terpereau 2014) の他には, $\mathrm{Hilb}_h^G(X)$ が具体的に計算されている例はあまり知られていない. 本研究では, 3 次元準等質 $SL(2)$-多様体が GIT 商としての記述を持つことに着目し, 対応する不変 Hilbert スキームの幾何学的構造を完全に決定することで, 付随する Hilbert–Chow 射が準等質 $SL(2)$-多様体の特異点解消を与えることを証明した. これは, 無限群の作用による商多様体の特異点解消が不変 Hilbert スキームによって与えられる新たな具体例となる. 本研究ではまた, それが極小特異点解消となるための必要十分条件を与えた. ここで, 特異点解消 $f : W \longrightarrow Y$ が**極小**であるとは, f で 1 点に潰れる任意の曲線 $C \subset W$ に対して, W の標準因子 K_W との交点数 $K_W \cdot C$ が非負であることとする.

本論文は 6 章から成る. 以下, 各章の概略を述べる.

導入にあたる第 1 章では, 本論文の研究の背景及び問題設定を述べる. G を簡約代数群, X を G-作用をもつアファイン多様体, $h : \mathrm{Irr}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を **Hilbert 関数**とする. ここで, $\mathrm{Irr}(G)$ は G の既約表現の同型類からなる集合を表す. 組 (G, X, h) に対応する**不変 Hilbert スキーム** $\mathrm{Hilb}_h^G(X)$ は, X の G-安定閉部分スキーム Z であって座標環 $\mathbb{C}[Z]$ の Hilbert 関数が h であるものを閉点の集合とするモジュライ空間である. 特に, Hilbert 関数として商射 $\pi : X \longrightarrow X/\!/G$ の一般ファイバーの Hilbert 関数 h_X を取ると, 以下の射を得る

$$\gamma : \mathrm{Hilb}_{h_X}^G(X) \longrightarrow X/\!/G := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G), \qquad [Z] \mapsto Z/\!/G.$$

この射 γ は **Hilbert–Chow 射**と呼ばれる. Hilbert 関数 h_X の選び方から, γ は $X/\!/G$ のある稠密開集合 Y_0 上で同型を与える. したがって, Zariski 閉包 $\overline{\gamma^{-1}(Y_0)}$ に被約スキームの構造を入れたものは $\mathrm{Hilb}_{h_X}^G(X)$ の既約成分となる. この既約成分は $\mathrm{Hilb}_{h_X}^G(X)$ の**主成分**

と呼ばれ, $\mathscr{H}^{main}$ で表す. Hilbert–Chow 射 γ の $\mathscr{H}^{main}$ への制限は射影的双有理射になるため, 次の問いが考えられる.

問題. $\gamma|_{\mathscr{H}^{main}}$ は商多様体 $X/\!/G$ の特異点解消を与えるか. また, $\mathrm{Hilb}^G_{h_X}(X)$ は $\mathscr{H}^{main}$ に一致するか, すなわち, $\mathrm{Hilb}^G_{h_X}(X)$ は既約か.

第 2 章では, 不変 Hilbert スキーム及びスフェリカル多様体の一般的性質を復習した後, 準等質 $SL(2)$-多様体に関して既知の結果を概観する. G-作用付き多様体は, 稠密な開軌道を持つとき**準等質**であるという. Popov (1973) は, 3 次元アファイン正規準等質 $SL(2)$-多様体が数の組 $(l,m) \in \{\mathbb{Q}\cap(0,1]\}\times\mathbb{N}$ によってパラメータ付けされることを証明し, それらに完全な分類を与えた. 組 (l,m) に対応する準等質 $SL(2)$-多様体 $E_{l,m}$ は $l=1$ のときに限って滑らかであり, $l<1$ のときは原点 O を唯一の特異点にもつ. 以下, $l=p/q$ と既約分数の形で表す. Popov の後, Kraft (1984), Panyushev (1988, 1991), Gaifullin (2008), Batyrev-Haddad (2008) らによって関連した研究がされている. Batyrev と Haddad は, 準等質 $SL(2)$-多様体 $E_{l,m}$ を $\mathbb{C}^5$ のある超曲面 H_{q-p} の擬トーラス $\mathbb{C}^*\times\mu_m$ による GIT 商として記述し, これを用いて VGIT (variation of GIT) による $SL(2)$-同変フリップ

$$\begin{tikzcd} E^-_{l,m} \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & E^+_{l,m} \arrow[dl] \\ & E_{l,m} & \end{tikzcd}$$

の存在, 及び, 上の図式に現れる $SL(2)$-多様体 $E^-_{l,m}, E^+_{l,m}$ が $E_{l,m}$ の原点 O での重み ω 付き爆発 $E'_{l,m} := Bl^{\omega}_O(E_{l,m})$ によって支配されることを証明した. 後に述べるように, 本論文の研究対象である不変 Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^{\mathbb{C}^*\times\mu_m}_{h_{H_{q-p}}}(H_{q-p})$ は, 重み付き爆発 $E'_{l,m}$ を支配するものとして構成される. Batyrev と Haddad はさらに, $E_{l,m}$ への付加的な $\mathbb{C}^*$-作用を定め, $E_{l,m}$ が Borel 部分群 $B\times\mathbb{C}^*$ に関してスフェリカル $SL(2)\times\mathbb{C}^*$-多様体になることを示した.

第 3 章, 第 4 章, 第 5 章では, $E_{l,m}$ の特異点解消が組 $(\mathbb{C}^*\times\mu_m, H_{q-p}, h_{H_{q-p}})$ に付随する不変 Hilbert スキーム $\mathscr{H} := \mathrm{Hilb}^{\mathbb{C}^*\times\mu_m}_{h_{H_{q-p}}}(H_{q-p})$ として与えられることを証明する (定理 1). また, 付随する Hilbert–Chow 射 $\gamma : \mathscr{H} \longrightarrow H_{q-p}/\!/(\mathbb{C}^*\times\mu_m) \cong E_{l,m}$ が極小特異点解消となるための必要十分条件をパラメータ l,m を用いて与える (定理 2).

定理 1. 全ての組 (l,m) に対して, 不変 Hilbert スキーム $\mathscr{H}$ は既約であり (したがって, $\mathscr{H}$ は主成分 $\mathscr{H}^{main}$ と一致する), Hilbert–Chow 射 γ は $E_{l,m}$ の $SL(2)$-同変な特異点解消を与える. さらに, $\mathscr{H}$ は以下のように決定される.

(i) $l=1$ の時, $\mathscr{H}$ は $E_{1,m}$ と同型.

(ii) $l < 1$ かつ $q-p$ が m を割り切るとき, $\mathscr{H}$ は $E'_{l,m}$ と同型.

(iii) $l < 1$ かつ $q-p$ が m を割り切らないとき, $\mathscr{H}$ は $E'_{l,m}$ の極小特異点解消 $\widetilde{E'_{l,m}}$ と同型.

定理 2. $k = g.c.d.(m, q-p)$, $a = m/k$, $b = (q-p)/k$ とおく. このとき, 以下は同値である.

(i) Hilbert–Chow 射 γ が極小特異点解消.

(ii) $1 + b \leq ap$.

第 3 章では, 重み付き爆発 $E'_{l,m}$ の極小特異点解消 $\widetilde{E'_{l,m}}$ の具体的な記述を与える. より正確には, Batyrev と Haddad によって与えられた $E'_{l,m}$ のスフェリカル $SL(2)\times\mathbb{C}^*$-多様体としての記述をもとに, $\widetilde{E'_{l,m}}$ の色付き扇を計算する. 第 4 章では, 不変 Hilbert スキーム $\mathscr{H}$ の各 $SL(2)$-軌道に対し, 代表的な点のイデアルの具体的な記述を与える. 第 5 章ではまず, 第 3 章, 第 4 章で得られた結果を踏まえて γ が $\widetilde{E'_{l,m}}$ を経由することを示した後, $\mathscr{H}$ の各 Borel 固定点における Zariski 接空間の計算等を用いて定理 1 の証明を与える. そして最後に, 定理 2 を示す.

第 6 章では, それまでの章で考察した問題の枠組みを一般化し, 以下の問題提起を行う.

問題. 特異点を, その Cox 環の擬トーラスによる GIT 商として記述した場合に, 付随する不変 Hilbert スキームはその特異点解消を与えるか.

本論文では, この問題を $\mathfrak{sl}_n$ の冪零軌道閉包の特異点の場合に考察し, $n = 2, 3$ のときには付随する Hilbert–Chow 射が Springer 解消と一致することを述べる.

早稲田大学　博士（理学）　　学位申請　研究業績書

氏 名　　久保田　絢子　　　印

（2019　年　12　月　現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
1. 論文	
○ [1]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov’s SL(2)-varieties、 Transformation Groups、 掲載決定、 Ayako KUBOTA
2. 総説	
[1]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov’s SL(2)-varieties、「第 11 回数論女性の集まり」報告集、pp. 44-53、2018 年 10 月、久保田絢子
[2]	On minimality of the invariant Hilbert scheme associated to Popov’s SL(2)-variety、「第 12 回数論女性の集まり」報告集、pp. 32-41、2019 年 10 月、久保田絢子

早稲田大学　博士（理学）　　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
3. 研究発表 研究集会における口頭発表(国内)	
[1]	Minimal generating set of a ring of invariants for vectors, linear forms, and matrices、 代数幾何ミニ研究集会、埼玉大学、2016年3月、久保田絢子、永井保成
[2]	不変Hilbertスキームとアファイン準等質SL(2)-多様体、第14回城崎新人セミナー、城崎総合支所　城崎市民センター大会議室、2017年2月、久保田絢子
[3]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、代数幾何ミニ研究集会、埼玉大学、2018年2月、久保田絢子
[4]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、第23回代数学若手研究会、大阪大学　吹田キャンパス　情報科学研究科、2018年3月、久保田絢子
[5]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、日本数学会2018年度年会、東京大学　駒場キャンパス、2018年3月、久保田絢子
[6]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、第11回数論女性の集まり、立教大学　池袋キャンパス、2018年6月、久保田絢子
[7]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、Younger Generations in Algebraic and Complex Geometry V、函館コミュニティプラザGスクエア　多目的ホール、2018年8月、Ayako KUBOTA
[8]	準等質SL(2)-多様体について、第1回宇都宮大学代数幾何研究集会、宇都宮大学　峰キャンパス、2018年8月、久保田絢子
[9]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、McKay Correspondence and Noncommutative Algebra、名古屋大学　多元数理科学研究科、2018年11月、Ayako KUBOTA
[10]	PopovのSL(2)-多様体に付随する不変Hilbertスキームの極小性について、第12回数論女性の集まり、東京理科大学　神楽坂キャンパス、2019年5月、久保田絢子
[11]	On minimality of the invariant Hilbert scheme associated with Popov's SL(2)-variety、第2回宇都宮大学代数幾何研究集会、宇都宮大学　峰キャンパス、2019年9月、久保田絢子

[12]	On minimality of the invariant Hilbert scheme associated with Popov’s SL(2)-variety、日本数学会 2019 年秋季総合分科会、金沢大学　角間キャンパス、2019 年 9 月、久保田絢子
研究集会における口頭発表(海外)	
[13]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov’s SL(2)-varieties、Varieties and Group Actions、Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences、Warsaw, Poland、2018 年 9 月、Ayako KUBOTA
セミナーにおける口頭発表	
[14]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov’s toric SL(2)-varieties、特異点論月曜セミナー、日本大学　文理学部、2018 年 4 月、久保田絢子
[15]	不変 Hilbert スキームによる 3 次元アファイン正規準等質 SL(2)-多様体の特異点解消、小山高専数学セミナー、小山工業高等専門学校、2018 年 6 月、久保田絢子
ポスター発表	
[16]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov’s SL(2)-varieties、代数幾何学城崎シンポジウム、城崎国際アートセンター、2017 年 10 月、Ayako KUBOTA
[17]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov’s SL(2)-varieties、第 17 回名古屋国際数学コンファレンス　K3 Surfaces and Related Topics、名古屋大学　坂田・平田ホール、2017 年 12 月、Ayako KUBOTA

早稲田大学　博士（理学）　　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
[12]	On minimality of the invariant Hilbert scheme associated with Popov's SL(2)-variety、日本数学会 2019 年秋季総合分科会、金沢大学　角間キャンパス、2019 年 9 月、久保田絢子
研究集会における口頭発表(海外)	
[13]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、Varieties and Group Actions、Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences、Warsaw, Poland、2018 年 9 月、Ayako KUBOTA
セミナーにおける口頭発表	
[14]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's toric SL(2)-varieties、特異点論月曜セミナー、日本大学　文理学部、2018 年 4 月、久保田絢子
[15]	不変 Hilbert スキームによる 3 次元アファイン正規準等質 SL(2)-多様体の特異点解消、小山高専数学セミナー、小山工業高等専門学校、2018 年 6 月、久保田絢子
ポスター発表	
[16]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、代数幾何学城崎シンポジウム、城崎国際アートセンター、2017 年 10 月、Ayako KUBOTA
[17]	Invariant Hilbert scheme resolution of Popov's SL(2)-varieties、第 17 回名古屋国際数学コンファレンス　K3 Surfaces and Related Topics、名古屋大学　坂田・平田ホール、2017 年 12 月、Ayako KUBOTA