早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論 文 題 目

定常 Navier-Stokes 方程式のスケール不変な
Besov 空間における適切性および非適切性

Well-posedness and ill-posedness
of the stationary Navier-Stokes equations
in scaling invariant Besov spaces

申 請 者

鶴見	裕之
Hiroyuki	TSURUMI

数学応用数理専攻

2019 年 12 月

本論文の構成

第 1 章では，先行研究の紹介と問題の動機付けを述べている．第 2 章では，種々の関数空間と調和解析の手法による重要な不等式を列挙している．特に，Navier-Stokes 方程式の適切性及び非適切性を考察する基礎の関数空間として，斉次 Besov 空間，斉次 Triebel-Lizorkin 空間を詳述している．第 3 章では，斉次 Besov 空間，斉次 Triebel-Lizorkin 空間における定常 Navier-Stokes 方程式の適切性についての定理の主張とその証明を展開している．第 4 章では，Bourgain-Pavlovic の手法による定常 Navier-Stokes 方程式の非適切性についての定理の主張とその証明を述べている．第 5 章では，トーラス空間上での斉次 Besov 空間を導入し，同空間における定常 Navier-Stokes 方程式の適切性および非適切性考察している．第 6 章では，Bejenaru-Tao の手法による定常 Navier-Stokes 方程式の非適切性についての定理の主張とその証明を述べている．第 7 章では，負の微分階数を有する斉次 Besov 空間において，関数積に対する Leibniz の公式が成立しない反例を与えている．第 8 章では，既存の不等式の確認を行っている．

（１）背景と研究の動機について

本論文のテーマは，水などの流体の運動を記述する流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式に関するものである．同方程式は境界や流体の状態によりその形式が異なるが，ここでは特に全空間（境界なのない Euclid 空間）$\mathbb{R}^n$ における非圧縮な定常流（時間が十分に経過した後の流体）を 3 次元以上のベクトル空間で取り扱っている．この定常方程式においては外力が既知なデータとしてし与えられ，それに対応する解である未知の速度場を求めることが課題である．これまでに定常 Navier-Stokes 方程式の与えられた外力に対する解の一意的な存在性および連続依存性（“適切性”という）については幾つかの研究がある．実際，ある関数空間上に属する任意の外力に対してただ一つの解が存在して，かつ外力の変化に対して解が連続的に変化する様な“適切”な状態を求めることは，定常 Navier-Stokes 方程式が実在する流体現象を記述するモデルであることを検証するために，数学的にも物理学的にも自然な問題設定であろう．本論文では，この適切性が成り立つ様な外力および解が属する関数空間の限界値について深い考察を与えている．先行研究として，金子・小薗・清水（2019）によって定常 Navier-Stokes 方程式が“適切”となるような関数空間を，Lebesgue 空間や Sobolev 空間といった標準的な関数空間を包含する斉次 Besov 空間の枠組みで与えることに成功していた．しかし，彼らによって見出されたその関数空間が果たして“適切性”を保証するもっとも一般的な集合か否かは未解決であった．実際，彼らは斉次 Besov 空間上における関数の積のノルム評価に関する不等式を導出して適切性を示したが，より広い斉次 Besov 空間においては不等式の成立が保証されないため，適切性からのアプローチで彼らの研究を改良することは困難であった．そこで本論文では，彼らの空間こそ最良でありそれよりも広い Besov 空間では適切性が破綻するとの予想の下に，“非適切性”に基づくアプローチで研究に臨んでいる．

（２）関連する先行研究と研究手法について

本研究の課題である定常問題の非適切性を取り扱う為に，まず時間的に変化する非定常 Navier-Stokes 方程式の非適切性を示した最初の論文 Bourgain-Pavlovic （2008）によって提案された手法を参照している．非定常 Navier-Stokes 方程式においてはデータとして初期値が与えられるが，彼らは不用意に広く斉次 Besov 空間を選ぶと，初期値に対して連続的に依存しないような解が存在しうることを，ある特殊な初期値の列を構成して証明した．実際その非適切性を引き起こす初期値の例は，空間周期的である三角関数を用いて構成されており，その波の重ねあわせによって解のノルムが飛躍的に大きくなってしまうことが示されている．そこで本論文ではこの初期値の例を改造して，定常 Navier-Stokes 方程式における外力への応用を試み，あまり位相の弱い斉次

Besov 空間を選ぶと非適切性が生じるとの考察の下に，推論が展開されている．ただし Bourgain-Pavlovic の手法の応用のみでは，定常 Navier-Stokes 方程式の適切性および非適切性の臨界値を得るには至らない．何故ならば，彼らの初期値の例で用いられる三角関数は全空間においては積分不可能であり，積分可能性を要請する斉次 Besov 空間には適用できないからである．実際，可積分な適当な関数を乗じるという切り落とし関数による手法は，非圧縮性を崩壊させ，解の構成には困難を生じる．そこで本論文では，量子力学で用いられる非線形 Schrodinger 方程式の非適切性を示した Bejenaru-Tao（2006）の論文に用いられている手法に新に改良を加えた．彼らの手法は Bourgain-Pavlovic の手法とは若干異なり，既に適切性が保証されている関数空間を用いて，そこに導入される位相を弱めて非適切性を証明するものである．この手法では近似解のノルムの不連続性のみに着目すればよく，解の構成に関する要件を少なからず省略できるという利点があり，三角関数に可積分関数を乗じた外力の例を与えることが可能となった．以上のように，本論文では金子・小薗・清水による定常 Navier-Stokes 方程式の適切性を保証する斉次 Besov 空間よりも広く関数空間をとると，外力に対する定常流速場の連続依存性が失われる非適切性が発生することを示すために，異なる方程式の非適切性を研究した Bourgain-Pavlovic，および Bejenaru-Tao の論文の手法を拡張し，非適切性を引き起こす外力の例を，三角関数を用いて構成すればよいことに着想を得た．

（３）研究成果と新に得られた知見

本論文では，全空間 $\mathbb{R}^n$ における定常 Navier-Stokes 方程式に対して，外力 f をデータとして与え，速度場 u を解として捉えることで，適切性，非適切性の問題に対して顕著な業績を挙げた．適切性に関しては，これまで $D = \dot{B}^{-3+n/p}_{p,q}$, $S = \dot{B}^{-1+n/p}_{p,q}$, $1 \leqq p < n$, $1 \leqq q \leqq \infty$ であれば肯定的であることが得られていた．ここで,$\dot{B}^s_{p,q}$ は斉次 Besov 空間である．本論分では斉次 Besov 空間の対をなす空間ともいえる斉次 Triebel-Lizorkin 空間 $\dot{F}^s_{p,q}$ についても，同様な指数 s, p, q に対して適切性が成り立つことを証明した．斉次 Triebel-Lizorkin 空間は，$q = 2$ の場合に通常の斉次 Sobolev 空間 H^s_p との同値性が知られており，既存の Sobolev 空間における一意存在定理を含む形で再定式化を行い，更にはデータ f の微分可能性が解 u のより高階の微分可能性を保証するという正則性の問題を見通しよく論じることに成功した．本論文の著しい研究成果は，非適切性の問題を考察することにり，斉次 Besov 空間における適切性および非適切性の問題を完全に分類し，完全解決したことである．実際，これまでは除外されていた $n < p \leqq \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$，$D = \dot{B}^{-3+n/p}_{p,q}$, $S = \dot{B}^{-1+n/p}_{p,q}$ に対して一意存在性は保証されるものの，解写像は連続とはならないことを証明した．より詳しくは，$\dot{B}^{-3+n/p}_{p,q}$ においてゼロに収束する外力の列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ であって，それに対応する解の列 $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ の $\dot{B}^{-1+n/p}_{p,q}$ における m に関する下限 (infimum) が，真に正となる例を構成した．手法は，非定常 Navier-Stokes 方程式の非適切性を論じた Bourgain-Pavlovic による初期データの列を巧に応用している．また $p = n$, $2 \leqq q \leqq \infty$ に対しても，非線形 Schroediner 方程式の非適切性を証明した Bejenaru-Tao による逐次近似列の第 2 次近似がノルムインフレーションを生じる事実を応用すれば，定常 Navier-Stokes 方程式についても非適切性が得られることを明らかにした．

（４） 研究の独創性と他への波及効果

一般に偏微分方程式において, 与えられた外力に対する解を考察する際，その解の存在性のみならず，外力に対する解の連続的な依存性を追究することは，より自然的かつ合理的な解を追い求めるために必要不可欠な問題意識である．また偏微分方程式の非適切性の研究は，逆に言えばその方程式の適切性を保つ様なより一般的な外力や解の空間を探求する上での上界・上限を与えるものであり，適切性の研究と対を成すものとして重要なアプローチである．元来，外力や解の属す

る空間としては，Lebesgue 空間や Sobolev 空間などにおいて議論がなされてきているが，本論文のように斉次 Besov 空間で偏微分方程式の適切性・非適切性を論じることは，近年の発展が著しい調和解析学の理論とも相まって，従来の偏微分方程式の研究を包括することのみならず，より壮大な統一理論の構築に貢献し得る．また，本論文は金子・小薗・清水による適切性の研究で用いられてきた斉次 Besov 空間上における関数の積のノルム評価が, $n \leqq p < \infty$ の場合において保証されないことに端を発し，実際に構成に成功した非適切性を引き起こす外力の例が，そのノルム評価を示す不等式の反例にもなっていることをも明らかにした．従って，本論文は斉次 Besov 空間における関数の積の構造に対しても，実関数論的な新しい知見を与えるものであると見なせる．これまでにも，様々な非線形偏微分方程式において，Bourgain-Pavlovic や，Bejenaru-Tao による手法を応用した非適切性に関する研究がなされてきたが，両者を組み合わせて適切性・非適切性の場合分けに成功したのは本論文が最初である．他の定常方程式や，楕円形の偏微分方程式に関しては，その適切性・非適切性の研究はいまだ途上段階であり，本論文による手法がそれらの方程式に対しても応用されることが期待される．

（５）結語

上記のように本論文は定常 Navier-Stokes 方程式の適切・非適切性に関して，顕著な研究成果をあげたといえる．以上の理由により，本論文は学位論文に十分に値すると言える．

2019 年 7 月

審査員

主査　早稲田大学教授　理学博士　早稲田大学　小薗英雄

早稲田大学教授　理学博士　早稲田大学　柴田良弘

早稲田大学教授　理学博士　早稲田大学　田中和永

早稲田大学教授　理学博士　早稲田大学　小澤徹