早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

On a class number problem of the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$の円分的$\mathbb{Z}_2$-拡大の類数問題について

申　請　者

Takuya	AOKI
青木	琢哉

数学応用数理専攻 整数論研究

2020 年 2 月

代数的整数論と呼ばれる分野の主要な研究対象として, 代数体 ($\mathbb{Q}$ の有限次拡大体) の類数というものがある. これは代数体の整数環のイデアルの成す群を単項イデアル全体の成す部分群で割った剰余群として定義されるが, これは素因子分解の一意性からのずれを測る量である. この類数についての理解を深めることは整数論研究の重要な基礎と言えるが, 膨大な研究の蓄積があるにも関わらず, 依然として神秘的で謎の多い対象と言えるであろう. 実際, 類数についての様々な数値例を見ると一見でたらめに分布しているように見えて, それに美しい数学的法則性を見出すのは直ちには想像できない. また個々の代数体の類数を決定するのも一般に大きな困難が伴うことがある.

代数体の類数に関する整数論的研究の中でも, 現代の大きな流れとして岩澤理論がある. 岩澤理論が注目するのは, 代数体 K の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K_∞ ($\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環) と呼ばれる次の K の拡大体の系列である.

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_\infty = \cup K_n, \quad \mathrm{Gal}(K_n/K) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

岩澤理論は K_n (n-th layer) の類数 $h_{p,n}(K)$ の p 冪因子を「岩澤不変量」の観点から統一的に説明したものである.

青木氏の研究対象はこの $h_{p,n}(K)$ の p で割れない因子である. もっと言えば「Weber の類数問題 (ないしはその拡張)」ということで語られる以下の問題が研究の動機になっている.

問題 . p と異なる素数 l に対して $h_{p,n}(K)$ は l で割れないか*?*

この問題は, 例えば Washington の結果等から肯定的に信じられているようである. $p=2$, $K=\mathbb{Q}$ の場合が本来の Weber の類数問題で「すべての n で $h_{2,n}(\mathbb{Q})=1$ となっているか?」と問うものであるが, これを肯定的に裏付ける結果として Cohn, Bauer, Masley, Miller, Horie, Horie-Horie, Komatsu-Fukuda, Morisawa, Morisawa-Okazaki 等による結果がある.

青木氏の研究は, K が実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の場合で, $p=2$ の時に上記の類数問題を考察し以下の 2 つの結果を与えている.

定理 1. *(1)* 奇素数 l に対して. $\delta_l := \begin{cases} 1 & (l \equiv 1 \mod 4), \\ 0 & (l \not\equiv 1 \mod 4) \end{cases}$ とおき, 0 以上の整数 c_l を 2^{c_l} が $l^{\delta_l+1}-1$ を割る最大の 2 べき因子となるものとして定義する. そして

$$m_l := \begin{cases} 2c_l + [\log_2(5l-1)] - \delta_l - 2 & (l \neq 5), \\ 4 & (l = 5), \end{cases}$$

とおく. このとき $n \geq m_l$ ならば $l \nmid \dfrac{h_{2,n}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))}{h_{2,m_l}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))}$ が成り立つ.

(2) 60000 以下の奇素数 l に対し, すべての n について $l \nmid h_{2,n}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ が成り立つ.

これは Weber の類数問題を有理数体以外の代数体の場合で試みた最初の例と考えられる. 証明は Mazur-Wiles が証明した岩澤主予想という類数とゼータ関数の特殊値を関係させる解析的類数公式を p 進解析的な観点からとらえた深く高度な定理を使っている. 証明は計算量の膨大さや技術的な工夫だけでは安直に語れない, 理論的な深みも多分に含んでいる.

定理 2. $h_{2,4}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) = h_{2,5}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) = 1$ が成り立つ.

類数 1 の代数体をなるべく沢山発見することは, 整数論研究をスムーズに進める舞台を豊富に与えることになりその意義は説明を待たない. しかし, 類数 1 の代数体の例を見つけることは容易ではなく, 青木氏が扱ったような総実な体の場合はとりわけ難しくなることが多い. これは類数 1 の実 2 次体の無限存在性という古典的な問いがいまだに解決されていないことからも窺い知ることができる. 青木氏が見つけた類数 1 の体は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の拡大次数が $2^4 = 16,\ 2^5 = 32$ というかなり大きな拡大次数を持つもので, このような大きな拡大次数を持つ場合で意味のある代数体の例を見つけるのは全く容易なことではない. 証明は定理 1 の応用という側面もさることながら, 類数の代数体の判別式を使った Miller による上からの評価という解析的な色彩の強い公式を使い, 代数学に限定しない高度な数学的素養を要する議論をしている.

本博士論文は 6 つの章からなる. 第 1 章ではこの論文で必要となる代数体の整数論の基本的事実や用語の定義などがまとめられている. 1.1 節でイデアル類群の概念が導入され 1.2 節では代数体の整数環の整数底と判別式が導入されている. そこでは判別式の下からの評価が与えられている. 1.3 節で根判別式の概念が与えられ代数体の類数のそれを用いた評価が説明されている. 1.2 節の判別式の評価がどのようにして類数の評価に繋がるか説明されている. 1.4 節で円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の概念が導入され, $n \leq 3$ で $h_{2,n}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) = 1$ を証明した Linden による先行研究や岩澤, Washington などによる一般的な定理が与えられている.

第 2 章では, まずその序文で, $h_{2,n}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ の奇素数 l による非可除性に関する一般的評価に関する結果である Theorem 2.1 が述べられている (**定理 1 の (1).**). 証明の一つの要として Mazer-Wiles によって証明された岩澤主予想を使うことがある. 2.1 節では一般化 Bernoulli 数の概念が導入される. この一般化 Bernoulli 数の奇素数 l に関する l 進位数の評価が Theorem 2.1 の証明の重要な基礎である. 2.2 節辺りから証明が本格的に始まり, ある Kummer 拡大の Galois 群に関する補助的な命題 (Proposition 2.8) が与えられる. これは K_n(n-th layer) のイデアル類群の l-Sylow 部分群 A_n の重要な考察につながる. それを受けて証明は $l \neq 5$ の場合 (2.3 節) と $l = 5$(2.4 節) の場合で分けられる. 証明では Fukuda-Komatsu のある一般化 Bernoulli 数の l 非可除性に関する結果が大事な役割を果たす. $l = 5$ の場合は Proposition 2.8 の適用がうまくいかない部分があり, それに応じた議論の修正が与えられている.

第 3 章では, $h_{2,n}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ の奇素数 l による非可除性に関する数値的評価の結果 (**定理 1 の (2).**) の証明が与えられる. 3.1 節では証明を進めるための一般的設定が与えられる. キーワードとしては K_n の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群の群環に属する, べき等元 $\mathbf{e}_\chi$ (Dirichlet 指標 χ に依存して決まる) に関する A_n の直和分解とそのある種の 1 のべき根への作用が挙げられる. そして証明が以下の 4 つの場合に分けて議論が展開される.

1. $l \equiv 1 \mod 4,\ 2 \leq n \leq s,$
2. $l \equiv 1 \mod 4,\ s+1 \leq n,$
3. $l \equiv 3 \mod 4,\ 2 \leq n \leq s,$
4. $l \equiv 3 \mod 4,\ s+1 \leq n.$

ここに s は $l-1$ ($l \equiv 1 \mod 4$), $l+1(l \equiv 3 \mod 4)$ の 2 べき因子の指数を表す．最後の 3.6 節は対数の概念を使った数値計算の工夫について述べられている．

第 4 章からは $h_{2,n}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ の評価に関する議論が始まる．この章からが**定理 2** の研究内容であるが，3 章までの議論とは別の種類のものである．この第 4 章では大きな根判別式を持つ総実代数体の類数の Miller の評価に関する 2 つの結果が与えられている．4.1 節でその評価に関する 1 つ目の主張が述べられている．この評価を直接使うだけでは $h_{2,4}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) = h_{2,5}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) = 1$ という結果にはつながらず，4.2 節の Proposition 4.6 で Miller の 1 つ目の評価の改良ないしは一般化を与えている．こちらの方が類数 1 という研究結果に応用される．

第 5 章では $h_{2,4}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) = h_{2,5}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) = 1$ の証明が与えられる．5.1 節では K_n の整数底の具体的な記述が与えられる．これは K_n の判別式の具体的記述に必要である．証明にはさらに K_n において単項素イデアルに完全分解する素数の集合 $S(K_n)$ についてのある詳細な情報が必要となる．5.2 節では $S(K_4)$ の場合，5.3 節では $S(K_5)$ の場合が取り上げられている．正確には $S(K_4)$, $S(K_5)$ の T_0 と記されるそのうまい有限部分集合を選んで証明につなげる．実際これは一般化された方の Miller の評価の適用に必要である．証明の最初のステップとしてはまず，

$$h_{2,4}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) \leq 518, \ h_{2,5}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})) \leq 133$$

という評価を与える．これが 5.4 節の内容である．この結果と非可除性を満たす奇素数の数値的な評価 (**定理 1 の (2).**) を使って類数 1 という結果を得る．5.5 節では T_0 の具体例が与えられている．

第 6 章は研究の今後の展望についての概説である．6.1 節では $h_{p,n}(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ の下からの評価について，6.2 節では $\mathbb{Z}_p$ のいくつかの直積を Galois 群とする拡大体の部分体に対する類数の素数に関する可除，非可除の問題が，関連する先行研究を踏まえて，提起されている．

最後に，円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤理論による研究は K_n の類数の p 冪の部分を見るもので，青木氏は岩澤理論で語られるストーリーには乗らない研究をしており，研究の新規性という点でも注目に値し今後の更なる発展が待たれる．類数 1 の総実体の新しい例を与える青木氏の手法は難攻不落の予想になりつつある Greenberg 予想の研究に一石を投じるものといっても過言ではない．以上により，本論文は博士 (理学) にふさわしいことを認める．

２０２０年１月

審査員

主査：早稲田大学　教授　博士 (数理科学)　東京大学　成田宏秋

副査：早稲田大学　名誉教授　理学博士　東京工業大学　小松啓一

副査：早稲田大学　教授　理学博士　東京大学　橋本喜一朗

副査：早稲田大学　教授　博士 (理学)　早稲田大学　尾崎学