

種数2のSchottky群のJørgensen数について

鷹本 大志*・雪田 友成**

On the Jørgensen Numbers of the Schottky Groups of Genus 2

Hiroshi TAKAMOTO*, Tomoshige YUKITA**

1 序文

リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の互いに交わらない4つの単純閉曲線 C_A^+, C_B^+ について, C_A^+ の内部を C_A^- の外部に写す Möbius 変換 A , C_B^+ の内部を C_B^- の外部に写す Möbius 変換 B で生成される群 $G = \langle A, B \rangle$ を種数2の Schottky 群という. Möbius 変換群の部分群 G が2元生成であるとき, 生成系 $\{A, B\}$ から定まる量として Jørgensen 数 $J(A, B)$ がある. さらに, G の2元生成系を全て走らせて得られる下界として G の Jørgensen 数 $J(G)$ が定義される. 本論文では, Yamashita-Yamzaki による論文 [7, 8] における手法を用いることで, 2つのパラメータ s, t で定まる (s, t) -Schottky 群 $G_{s,t}$ の Jørgensen 数を決定した.

2 Jørgensen の不等式

本章では, 本論文を通して議論される Jørgensen 数とは何かを説明する.

定義 2.1 (リーマン球面, Möbius 変換群). (1) 複素平面 \mathbb{C} の1点コンパクト化を $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と表し, リーマン球面という.

(2) 次の形で表される $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の同相写像 f を Möbius 変換という.

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C}).$$

Möbius 変換の全体に写像の合成を積とした群を Möbius 変換群といい, Möb と表す.

2次複素特殊線形群 $SL(2, \mathbb{C}) = \{A \mid \det A = 1\}$ に対して, 次の写像 π は全射群準同型である.

*数学科 助教

**教育学研究科数学教育専攻

$$\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Möb}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に 2 次複素正方行列の全体 $M(2, \mathbb{C})$ からの相対位相を定め、 $\mathrm{Möb}$ には π による商位相を定めるものとする。

定義 2.2 (離散部分群). $\mathrm{Möb}$ の部分群 Γ が離散部分群であるとは、 $\mathrm{Möb}$ の離散集合であることとする。すなわち、 Γ の任意の元 $\gamma \in \Gamma$ に対し、ある γ の開近傍 $V \subset \mathrm{Möb}$ が存在し、 $V \cap \Gamma = \{\gamma\}$ となることである。

Möbius 変換 f に対して、 f の Poincaré 拡張と呼ばれる上半空間 \mathbb{U}^3 上の同相写像 \tilde{f} が対応する (詳しくは [1, pp.33, 34] 参照)。 $\partial\mathbb{U}^3$ を \mathbb{U}^3 の \mathbb{R}^3 の 1 点コンパクト化 $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ における境界とすると $\partial\mathbb{U}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$ である。

定義 2.3 (初等的部分群). $\mathrm{Möb}$ の部分群 Γ が初等的であるとは、ある点 $\alpha \in \overline{\mathbb{U}^3}$ の Γ -軌道 $\Gamma(\alpha)$ が有限集合となることである。ここで、 α の Γ -軌道 $\Gamma(\alpha)$ は次で定義される。

$$\Gamma(\alpha) = \left\{ \tilde{f}(\alpha) \in \overline{\mathbb{U}^3} \mid f \in \Gamma \right\}.$$

初等的部分群の分類を述べるために Möbius 変換の型について説明する。

定義 2.4 (楕円型, 放物型, 斜航型元). 恒等写像でない $f \in \mathrm{Möb}$ について、

- (1) f が楕円型であるとは、 \tilde{f} が \mathbb{U}^3 内に固定点を持つことである。
- (2) f が放物型であるとは、 \tilde{f} が \mathbb{U}^3 に固定点を持たず、 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上に唯一つの固定点を持つことである。
- (3) f が斜航型であるとは、 \tilde{f} が \mathbb{U}^3 に固定点を持たず、 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上に丁度 2 つの固定点を持つことである。

楕円型, 放物型, 斜航型元はそれぞれ Möb-共役により、次のいずれかの標準形に直すことができる ([1, pp.65–67] 参照)。

(楕円型元の標準形) $f(z) \in \mathrm{Möb}$ が楕円型ならば、ある $g \in \mathrm{Möb}$ により $gfg^{-1} = kz$ ($|k| = 1, k \in \mathbb{C}$)。

(放物型元の標準形) $f(z) \in \mathrm{Möb}$ が放物型ならば、ある $g \in \mathrm{Möb}$ により $gfg^{-1} = z + 1$ 。

(斜航型元の標準形) $f(z) \in \mathrm{Möb}$ が斜航型ならば、ある $g \in \mathrm{Möb}$ により $gfg^{-1} = kz$ ($|k| \neq 1, k \in \mathbb{C}$)。

初等的部分群は次のように分類される。

定理 2.1. [1, p.84] $\mathrm{Möb}$ の初等的部分群 Γ は次のいずれかである。

- (1) Γ の元は楕円型元のみからなる。
- (2) ある $g \in \mathrm{Möb}$ が存在して、 $g\Gamma g^{-1} \subset \{f(z) = az + b \in \mathrm{Möb} \mid a \neq 0, a, b \in \mathbb{C}\}$ 。
- (3) ある $g \in \mathrm{Möb}$ が存在して、 $g\Gamma g^{-1} \subset \{f(z) = az^s \in \mathrm{Möb} \mid a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, s^2 = 1\}$ 。

定義 2.5. (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, 複素数 $\text{Tr}(A)$ を次で定める.

$$\text{Tr}(A) = a + d.$$

$\text{Tr} A$ を行列 A のトレースという.

(2) 行列 A, B に対して, A と B の交換子 $[A, B]$ は次で定義される.

$$[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}.$$

これまでの準備の下で, Jørgensen の不等式と Jørgensen 数の定義を述べる.

定理 2.2. [1, Theorem 5.4.1., p.105] $f, g \in \text{Möb}$ に対し, $G = \langle f, g \rangle$ が非初等的離散部分群であるとす. このとき, 次の不等式が成り立ち, これを Jørgensen の不等式という.

$$|\text{Tr}(A)^2 - 4| + |\text{Tr}[A, B] - 2| \geq 1$$

ここで, $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ は $\pi(A) = f, \pi(B) = g$ となる行列である.

Jørgensen の不等式において, f, g から定まる行列 A, B には正負の不定性があるが, $\text{Tr}(A)^2, \text{Tr}[A, B]$ は正負の取り方に依らずに定まることを注意する. Jørgensen の不等式の左辺は Möb の 2 元生成群の離散性を測るための一つの指標と見ることができる.

定義 2.6 (Jørgensen 数). $f, g \in \text{Möb}$ に対して, $J(f, g) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を Jørgensen の不等式の左辺とする. すなわち, $\pi(A) = f, \pi(B) = g$ を満たす $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して,

$$J(f, g) = |\text{Tr}(A)^2 - 4| + |\text{Tr}[A, B] - 2|.$$

また, Möb の 2 元生成部分群 G について $J(G)$ を次で定義し, G の Jørgensen 数という.

$$J(G) = \inf \{ J(f, g) \mid G = \langle f, g \rangle \}.$$

Jørgensen の不等式から, G が非初等的な 2 元生成離散部分群ならば $J(G) \geq 1$ である.

3 種数2のSchottky群

本論文では, 非初等的な 2 元生成離散部分群として種数2のSchottky群と呼ばれるものについて Jørgensen 数を考える.

定義 3.1 (種数2のSchottky群). Möb の部分群 G が種数2のSchottky群であるとは, 次を満たす 2 元生成系 $\{f_1, f_2\}$ が存在することである: リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の互いに交わらない 4 つの単純閉曲線 C_1, C_{-1}, C_2, C_{-2} が存在し, Möbius 変換 f_1, f_2 はそれぞれ C_1, C_2 の外部を C_{-1}, C_{-2} の内部に写

す. このような生成系 $\{f_1, f_2\}$ を G の Schottky 生成系という. 特に, $C_{\pm 1}, C_{\pm 2}$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ の円周として取れるとき, 種数 2 の古典的 Schottky 群といい, $\{f_1, f_2\}$ を古典的 Schottky 生成系という.

本論文で扱う 2 つの種数 2 の古典的 Schottky 群の例を挙げる. 以下では, 記号を簡単にするため, $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の定める Möbius 変換 f_A と A 自身を区別することなく用いる.

例 3.1 (θ -Schottky 群). $0 < \theta < \pi/4$ を満たす θ に対し, 次の行列 $A_\theta, B_\theta \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ で生成される 2 元生成群 G を考える.

$$A_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & i \cos \theta \\ -i \cos \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix}$$

図 1 において, A_θ は円周 C_1 の外部を C_{-1} の内部に写し, B_θ は円周 C_2 の外部を C_{-2} の内部に写していることが計算によりわかる. すなわち, G は種数 2 の古典的 Schottky 群である.

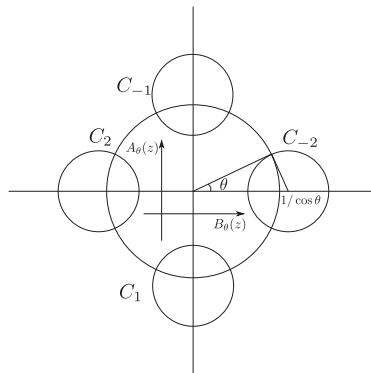


図 1 $G = \langle A_\theta, B_\theta \rangle$ が写し合う円周.

例 3.2 ((s, t) -Schottky 群). $0 < s < t < 1$ を満たす s, t に対し, 次の行列 $A_{s,t}, B_{s,t} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ で生成される 2 元生成群 G を考える.

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} \frac{t+s}{t-s} & -\frac{2ts}{t-s} \\ \frac{t-s}{2} & \frac{t-s}{t+s} \end{pmatrix}, \quad B_{s,t} = \begin{pmatrix} \frac{t+s}{t-s} & \frac{2}{t-s} \\ \frac{2ts}{t-s} & \frac{t-s}{t+s} \end{pmatrix}.$$

図 2 において, $A_{s,t}$ は円周 C_1 の外部を C_{-1} の内部に写し, $B_{s,t}$ は円周 C_2 の外部を C_{-2} の内部に写していることが計算によりわかる. すなわち, G は種数 2 の古典的 Schottky 群である.

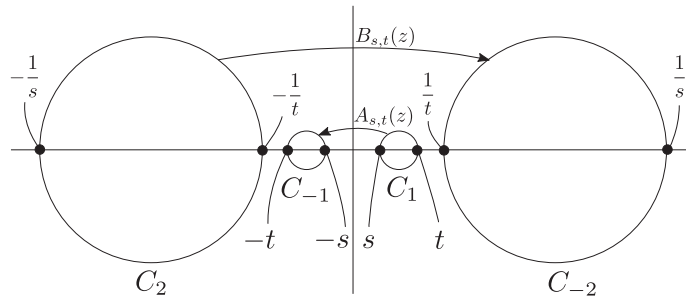


図2 $G = \langle A_{s,t}, B_{s,t} \rangle$ が写し合う円周.

種数2の Schottky 群は次の定理から Möb の離散部分群であることがしたがう.

定理 3.1. [5, Theorem 12.2.18., p.614] G を種数2の Schottky 群として, $\{f_1, f_2\}$ を G の Schottky 生成系とする. このとき, Schottky 生成系に対応する互いに交わらない単純閉曲線 $C_{\pm 1}, C_{\pm 2}$ について, それらの外部の共通部分は G の基本領域となる. 特に G は離散部分群である.

また, 次の Ping-Pong 補題を用いることで種数2の古典的 Schottky 群は階数2の自由群と同型になることがわかる.

補題 3.1. [3, Lemma 3.10., p.64] $S = \{a, b\}, G = \langle a, b \rangle$ とする. G が集合 X に作用するとし, $S = S \cup S^{-1}$ とする. このとき, 任意の $s \in S$ に対して, ある $X_s \subset X$ が存在し, ある $p \in X \setminus \bigcup_{s \in S} X_s$ に対し, 以下が成り立つならば, G は S で生成される自由群である.

- (1) 任意の $s \in S$ に対し, $s(p) \in X_s$.
- (2) 任意の $t \in S \setminus \{s^{-1}\}$ に対し, $s(X_t) \subset X_s$.

初等的な群の分類により, Möb の部分群 G が F_2 と同型ならば非初等的である. したがって, 本論文で扱う θ -Schottky 群および (s, t) -Schottky 群は共に非初等的な離散部分群となり, Jørgensen の不等式を適用することができる. 本論文では, まず Yamashita-Yamazaki[7, 8] による θ -Schottky 群の Jørgensen 数を求める手法を紹介する. その後, 同様の手法により (s, t) -Schottky 群の Jørgensen 数も求めることができることを示す. 以下, 必要となる自由群の自己同型について説明する.

定義 3.2. 階数2の自由群 F_2 の自己同型群を $\text{Aut}(F_2)$ と表す. つまり,

$$\text{Aut}(F_2) = \{\sigma \mid \sigma : F_2 \rightarrow F_2 \text{ は同型}\}.$$

定理 3.2. [2, Theorem N1., p. 163] $F_2 = \langle a, b \rangle$ とし, $\sigma, P, U \in \text{Aut}(F_2)$ を次で定まる写像とする.

$$\begin{aligned} \sigma : F_2 &\rightarrow F_2; \sigma(a) = a^{-1}, \sigma(b) = b \\ P : F_2 &\rightarrow F_2; P(a) = b, P(b) = a \\ U : F_2 &\rightarrow F_2; U(a) = ab, U(b) = b \end{aligned}$$

このとき, $\text{Aut}(F_2)$ は σ, P, U で生成される. すなわち,

$$\text{Aut}(F_2) = \langle \sigma, P, U \rangle.$$

定理 3.3. $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ とする. $\sigma, P, U \in \text{Aut}(F_2)$ により $G = \langle A, B \rangle (\simeq F_2)$ の生成元を取り替えたとき, $\text{Tr}[A, B]$ の値は不変であり, 一定である.

証明. $\sigma \in \text{Aut}(F_2)$ により G の生成元を取り替えた場合のみ示す.

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\sigma(A), \sigma(B)] &= \text{Tr}(\sigma(A)\sigma(B)\sigma(A)^{-1}\sigma(B)^{-1}) = \text{Tr}(A^{-1}BAB^{-1}) \\ &= \text{Tr}(A^{-1}[A, B]^{-1}A) = \text{Tr}[A, B]^{-1} = \text{Tr}[A, B]. \end{aligned}$$

$P, U \in \text{Aut}(F_2)$ により G の生成元を取り替えた場合も同様に示せる. □

4 Markoff 写像

定義 4.1. $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ に計量 $|dz|/y$ を入れた距離空間を, 2次元双曲幾何の上半空間モデルという.

定理 4.1. [1, p.35] \mathbb{H}^2 の相異なる2点 z_1, z_2 に対し, z_1, z_2 を通り, 実軸 \mathbb{R} に直交する Euclid 半直線または Euclid 半円がただ1つ存在する. このような Euclid 半直線または Euclid 半円の z_1 から z_2 までの線分または円弧 $[z_1, z_2]$ の弧長は, z_1 と z_2 の双曲距離を実現する. $[z_1, z_2]$ を測地線という (図3参照).

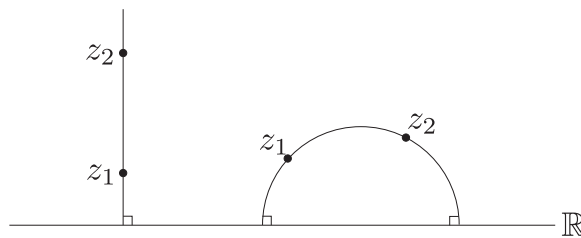


図3 上半空間モデル \mathbb{H}^2 の測地線

定義 4.2. [6, The Farey triangulation \mathcal{F} and the dual binary tree Σ , p.769] $1/0 = \infty$ に対し, $\hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ とする. $\hat{\mathbb{Q}} \subset \partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の2点 $p/q, r/s$ に対し, $ps - qr = \pm 1$ となるとき, \mathbb{H}^2 内の測地線で結ぶ. このようにして得られる \mathbb{H}^2 の三角形分割 \mathcal{F} を Farey 三角形分割という. Farey 三角形分割の双対グラフの辺を Σ とする (図4参照).

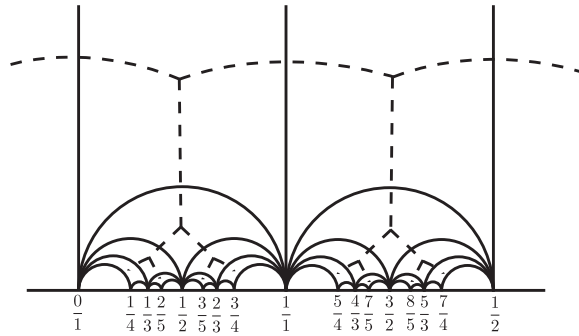


図4 実線による分割がFarey 三角形分割 \mathcal{F} であり, 点線は Σ である.

定義 4.3. [6, Complementary regions., Action of $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$., pp.769–770] $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$ における連結成分の閉包を Σ の補領域という. Σ の補領域全体の集合を Ω で表す. Σ の補領域 X は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上にただ1つの頂点 v を持つことが示せる. $v = p/q$ であるとき, この補領域を $X_{p/q}$ と表す. 二つの補領域 $X_{p/q}, X_{r/s}$ が隣接するとは, 共通部分 $X_{p/q} \cap X_{r/s}$ が Σ の辺になることである. 補領域 $X_{p/q}$ に隣接する補領域の全体を $\mathcal{N}_{p/q}$ と表す.

二つの補領域 $X_{p/q}, X_{r/s}$ が隣接するための必要十分条件は $ps - qr = \pm 1$ となることである [6, p.772]. これより次を得る.

補題 4.1. $\mathcal{N}_{p/q} = \{ X_{r/s} \in \Omega \mid ps - qr = \pm 1 \}$. 特に, $p/q = 1/0, 0/1, 1/1$ について次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{1/0} &= \{ X_{\frac{n}{1}} \in \Omega \mid n \in \mathbb{Z} \}. \\ \mathcal{N}_{0/1} &= \{ X_{\frac{1}{n}} \in \Omega \mid n \in \mathbb{Z} \}. \\ \mathcal{N}_{1/1} &= \{ X_{\frac{n}{n+1}} \in \Omega \mid n \geq 0 \} \sqcup \{ X_{\frac{n+1}{n}} \in \Omega \mid n \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Σ は Farey 三角形分割の双対グラフなので, 全ての頂点の価数は3である. したがって, e を頂点 u, v を端点にもつ Σ の辺とすると, $e = X \cap Y, u = X \cap Y \cap U, v = X \cap Y \cap V$ を満たす $X, Y, U, V \in \Omega$ が存在する. このとき, $e = (X, Y; U, V)$ と表す.

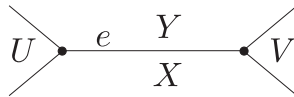


図5 $e = (X, Y; U, V)$ の図.

定義 4.4. $\psi : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ が Markoff 写像であるとは、任意の辺 $e = (X, Y; U, V) \in \Sigma$ に対し、

$$\psi(U) + \psi(V) = \psi(X)\psi(Y)$$

が成り立つこととする。この条件は辺の関係式と呼ばれる。

定義 4.5. 任意の $k \geq 0$ と Markoff 写像 ψ に対して、集合 $\Omega_\psi(k)$ を次で定義する。

$$\Omega_\psi(k) = \{X \in \Omega \mid |\psi(X)| \leq k\}.$$

定理 4.2. [6, Theorem 3.1., p.773] ψ を Markoff 写像とする。任意の $k \geq 2$ に対し、 $\bigcup_{X \in \Omega_\psi(k)} X$ は \mathbb{H}^2 の連結部分集合である。

定義 4.6. $F_2 = \langle A, B \rangle$ を自由群とする。 $W \in F_2$ は、ある $V \in F_2$ が存在し、 $F_2 = \langle W, V \rangle$ となるとき、原始的という。

$\alpha : F_2 \rightarrow F_2/[F_2, F_2] (\simeq \mathbb{Z}^2)$ を標準全射とする。

定理 4.3. [4, 3.3 Corollary, p.21] $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し、次を満たす原始的な元 $W_{n/m} \in F_2$ が存在する。

$$\alpha(W_{n/m}) = A^m B^n.$$

さらに、 $W_{n/m}$ は共役を除き一意である。

行列 $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が生成する群 $G = \langle A, B \rangle$ が自由群 F_2 に同型であるとき、写像 $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める。

$$\psi(X_{n/m}) = \mathrm{Tr}(W_{n/m}).$$

定理 4.4. [8, Lemma4.2., p.27] ψ_ρ は Markoff 写像である。

5 θ -Schottky 群の Jørgensen 数

以上の準備のもと、 θ -Schottky 群の Jørgensen 数を [7] の手法に沿って求める。 θ -Schottky 群は次の行列 A_θ, B_θ で生成される群である。 $0 < \theta < \pi/4$ に対し、

$$A_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & i \cos \theta \\ -i \cos \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix}$$

次の補題が Jørgensen 数を決定する際に重要である。ここで、記号を簡単にするために $\mathcal{N}_{p/q}$ の部分集合 $\mathcal{N}_{p/q}(k)$ ($k \geq 0$) を次で定める。

$$\mathcal{N}_{p/q}(k) = \{X_{r/s} \in \mathcal{N}_{p/q} \mid |\psi(X_{r/s})| \leq k\}.$$

補題 5.1. [7, Lemma 3.7., p.8] $\Omega_\psi(2/\sin\theta) = \{X_{0/1}, X_{1/0}\}$.

証明. $G_\theta = \langle A_\theta, B_\theta \rangle$ より A_θ, B_θ は共に G_θ の原始的元である. したがって, $W_{0/1}, W_{1/0}$ はそれぞれ A_θ, B_θ と G_θ において共役である. これより,

$$\psi(X_{0/1}) = \text{Tr } W_{0/1} = \text{Tr } A_\theta = \frac{2}{\sin\theta}, \quad \psi(X_{1/0}) = \text{Tr } B_\theta = \frac{2}{\sin\theta}.$$

よって, $\{X_{0/1}, X_{1/0}\} \subset \Omega_\psi(2/\sin\theta)$. $2/\sin\theta \geq 2$ ($0 < \theta < \pi/4$) より, 定理 4.2 から $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ は連結である (図 6 参照). 次に $\mathcal{N}_{1/0}(2/\sin\theta) = \{X_{0/1}\}$ かつ $\mathcal{N}_{0/1}(2/\sin\theta) = \{X_{1/0}\}$ となること

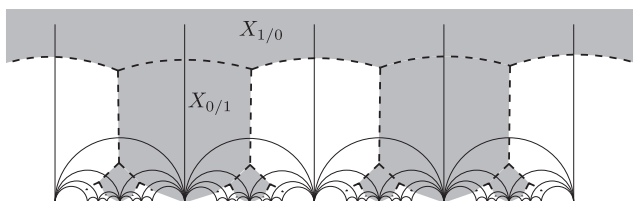


図 6 $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ の模式図: 色が塗られたタイル達が $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ に含まれる補領域を意味する.

を示す. 補題 4.1 から, $\mathcal{N}_{1/0} = \{X_{n/1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ である. $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $x_n = \psi(X_{n/1})$ とおき, $|x_n| > \frac{2}{\sin\theta}$ ($n \neq 0$) を示す. $\sigma, P, U \in \text{Aut}(F_2)$ を用いれば, $A_\theta B_\theta, A_\theta B_\theta^{-1}$ が G_θ の原始的元となることが示される. すなわち, $W_{1/1}, W_{-1/1}$ は G_θ において $A_\theta B_\theta, A_\theta B_\theta^{-1}$ とそれぞれ共役である. したがって,

$$x_1 = \psi(X_{1/1}) = \text{Tr } A_\theta B_\theta = \frac{2}{\sin^2\theta}, \quad x_{-1} = \text{Tr } A_\theta B_\theta^{-1} = \frac{2}{\sin^2\theta}.$$

ここで, 辺の関係式により, 次の3項間漸化式を得る.

$$x_{n+1} = \frac{2}{\sin\theta} x_n - x_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$n \geq 0$ に対し, $|x_{n+1}| > |x_n|$ であることを示す. $|x_1| > |x_0|$ は明らかである. $2/\sin\theta > 2$ と3項間漸化式より $|x_{n+1}| - |x_n| > |x_n| - |x_{n-1}|$ であるから, $|x_{n+1}| - |x_n| > 0$. 同様にして, $n \leq 0$ に対し, $|x_{n-1}| > |x_n|$ であることもわかる. よって, $X_{0/1}$ は $X_{1/0}$ とつながる $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ のただ1つの補領域である. すなわち, $\mathcal{N}_{1/0}(2/\sin\theta) = \{X_{0/1}\}$. これより, $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ は図7のようになる. 補題 4.1 から, $\mathcal{N}_{0/1} = \{X_{1/n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ である. このとき, $\psi(X_{1/0}) = \psi(X_{0/1})$ と3項間漸化式により, $\psi(X_{1/n}) = \psi(X_{n/1})$ を得る. したがって, $X_{1/0}$ は $X_{0/1}$ とつながる $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ のただ1つの補領域である. すなわち, $\mathcal{N}_{0/1}(2/\sin\theta) = \{X_{1/0}\}$. これより, $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ は図8のようになる. したがって, $\Omega_\psi(2/\sin\theta) = \{X_{0/1}, X_{1/0}\}$. □

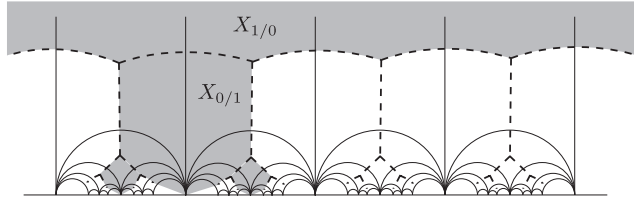


図7 $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ の模式図: 図6から $X_{1/0}$ に隣接する $X_{0/1}$ 以外の補領域が取り除かれている。

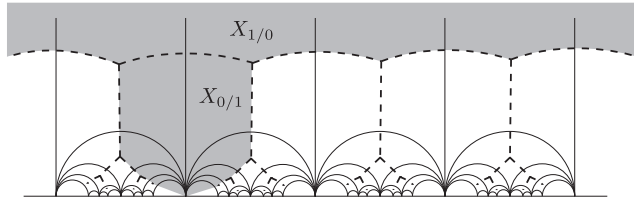


図8 $\Omega_\psi(2/\sin\theta)$ の図

定理 5.1. [7, Proposition 3.8., p.8] θ -Schottky 群 $G_\theta = \langle A_\theta, B_\theta \rangle$ に対して,

$$J(G_\theta) = J(A_\theta, B_\theta) = \frac{4 \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta}.$$

証明. 任意の原始的な元 $C \in G_\theta$ に対し, $|\text{Tr } C| \geq |\text{Tr } A_\theta|$. $\text{Tr } A_\theta \in \mathbb{R}$ かつ $\text{Tr } A_\theta > 2$ より,
 $|(\text{Tr } C)^2 - 4| \geq |(\text{Tr } A_\theta)^2 - 4|$. □

6 (s, t) -Schottky 群の Jørgensen 数

\mathbb{R}^2 の領域 D を次で定める.

$$D = \{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < s < t < 1 \}. \quad (1)$$

(s, t) -Schottky 群は次の行列 $A_{s,t}, B_{s,t}$ で生成される群 $G_{s,t}$ である.

$$A_{s,t} = \frac{1}{t-s} \begin{pmatrix} s+t & -2st \\ -2 & s+t \end{pmatrix}, \quad B_{s,t} = \frac{1}{t-s} \begin{pmatrix} s+t & 2 \\ 2st & s+t \end{pmatrix}.$$

(s, t) -Schottky 群の Jørgensen 数 $J(G_{s,t})$ を θ -Schottky 群における Jørgensen 数の計算を踏襲することで決定する. 行列 C, D が $G_{s,t}$ において共役であるとき $C \sim D$ と表すこととする.

補題 6.1. $m \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ について次が成り立つ.

$$W_{\frac{m}{1}} \sim A_{s,t} B_{s,t}^m, \quad W_{\frac{1}{m}} \sim A_{s,t}^m B_{s,t}, \quad W_{\frac{n+1}{n}} \sim B_{s,t} (A_{s,t} B_{s,t})^n, \quad W_{\frac{n}{n+1}} \sim (A_{s,t} B_{s,t})^n A_{s,t}. \quad (2)$$

証明. $W_{\frac{m}{1}} \sim A_{s,t}B_{s,t}^m$ を示す. $G_{s,t} = \langle A_{s,t}, B_{s,t} \rangle$ に対して, $U^m \in \text{Aut}(F_2)$ ($m \in \mathbb{Z}$) を作用させることで次が得られる.

$$G_{s,t} = \langle A_{s,t}B_{s,t}^m, B_{s,t} \rangle.$$

したがって, $A_{s,t}B_{s,t}^m$ は $G_{s,t}$ の原始的元である. ここで, 標準全射 $\alpha : F_2 \rightarrow F_2/[F_2, F_2]$ で $A_{s,t}B_{s,t}^m$ を写すと,

$$\alpha(A_{s,t}B_{s,t}^m) = A_{s,t}B_{s,t}^m.$$

よって, 定理 4.3 から $W_{\frac{m}{1}}$ と $A_{s,t}B_{s,t}^m$ は共役である. $W_{\frac{1}{m}} \sim A_{s,t}^m B_{s,t}$ も同様に示される.

次に $W_{\frac{n+1}{n}} \sim B_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})^n$ を示す. $G_{s,t} = \langle A_{s,t}, B_{s,t} \rangle$ に $U \in \text{Aut}(F_2)$ を作用させて次を得る.

$$G_{s,t} = \langle U(A_{s,t}), U(B_{s,t}) \rangle = \langle (A_{s,t}B_{s,t}), B_{s,t} \rangle.$$

上式において生成系の順番を変えてから U を作用させることで,

$$G_{s,t} = \langle B_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t}), A_{s,t}B_{s,t} \rangle.$$

これに対して, U を繰り返し作用させることで次が得られる.

$$G_{s,t} = \langle B_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})^n, A_{s,t}B_{s,t} \rangle \quad (n \geq 0).$$

したがって, $B_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})^n$ は原始的元である. ここで, 標準全射 $\alpha : F_2 \rightarrow F_2/[F_2, F_2]$ で $B_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})^n$ を写すと,

$$\alpha(B_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})^n) = A_{s,t}^n B_{s,t}^{n+1}.$$

よって, 定理 4.3 から $W_{\frac{n+1}{n}}$ と $B_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})^n$ は共役である. $W_{\frac{n}{n+1}}$ と $(A_{s,t}B_{s,t})^n A_{s,t}$ についても同様に示される. □

領域 D 上の関数 x_n, y_n, u_n, v_n を次で定める.

$$\begin{aligned} x_n(s, t) &= \psi(X_{n/1}), & y_n(s, t) &= \psi(X_{1/n}) \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ u_n(s, t) &= \psi(X_{\frac{n}{n+1}}), & v_n(s, t) &= \psi(X_{\frac{n+1}{n}}) \quad (n \geq 0). \end{aligned}$$

補題 6.1 から次を得る.

系 6.1. x_n, y_n, u_n, v_n は次のように表される.

$$\begin{aligned} x_n(s, t) &= \text{Tr}(A_{s,t}B_{s,t}^n), & y_n(s, t) &= \text{Tr}(A_{s,t}^n B_{s,t}), \\ u_n(s, t) &= \text{Tr}(A_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})^n), & v_n(s, t) &= \text{Tr}((A_{s,t}B_{s,t})^n B_{s,t}). \end{aligned}$$

補題 6.2. 任意の $(s, t) \in D$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して $x_n(s, t) = y_n(s, t)$.

証明. まず $n = 0$ について, $\text{Tr} A_{s,t} = \text{Tr} B_{s,t}$ より, $x_0 = y_0$. $x_n(t, s), y_n(t, s)$ それぞれに対して辺の関係式より次の3項間漸化式を得る (図9 参照).

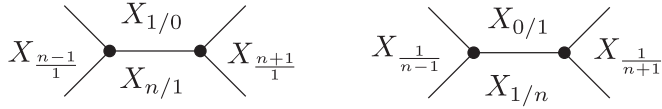


図9 左: x_n に関する edge relation. 右: y_n に関する edge relation.

$$x_{n+1} = \psi(X_{1/0})x_n - x_{n-1} = y_0x_n - x_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (3)$$

$$y_{n+1} = \psi(X_{0/1})y_n - y_{n-1} = x_0y_n - y_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (4)$$

ここで, $x_0 = \psi(X_{0/1}) = \psi(X_{1/0}) = y_0$ かつ $x_1 = \text{Tr}(w_{1/1}) = y_1$ である. $n \geq 0$ に対して帰納法により $x_n = y_n$ を示す. 3 項間漸化式と $x_0 = y_0$ から,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_0y_n - y_{n-1} \\ &= y_0x_n - x_{n-1} = x_{n+1}. \end{aligned}$$

$n \leq -1$ の場合には,

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= x_0y_n - y_{n+1} \\ &= y_0x_n - x_{n+1} = x_{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

定理 6.1. 任意の $(s, t) \in D$ に対して, $x_n(s, t)$ は次の単調性をもつ.

$$\cdots < x_2(s, t) < x_1(s, t) < 0 < x_0(s, t) < x_{-1}(s, t) < x_{-2}(s, t) < \cdots. \quad (5)$$

証明. $(s, t) \in D$ に対して, 正則行列 $P_{s,t} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ を次で定める.

$$P_{s,t} = \begin{pmatrix} \sqrt{ts}/2 & 1/2 \\ -\sqrt{ts}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

このとき, $B_{s,t}$ の $P_{s,t}$ による共役は次の対角行列となる.

$$P_{s,t}B_{s,t}P_{s,t}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(s, t) & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}(s, t) \end{pmatrix}, \quad \lambda(s, t) = \frac{\sqrt{t} + \sqrt{s}}{\sqrt{t} - \sqrt{s}} \quad (7)$$

これより, トレースは共役不変であるから次を得る.

$$\begin{aligned} x_n(s, t) &= \text{Tr}((P_{s,t}A_{s,t}P_{s,t}^{-1})(P_{s,t}B_{s,t}P_{s,t}^{-1})^n) \\ &= \frac{1}{t-s} \left\{ (\lambda(s, t)^n + \lambda(s, t)^{-n})(t+s) - (\lambda(s, t)^n - \lambda(s, t)^{-n}) \frac{1+t^2s^2}{\sqrt{ts}} \right\}. \end{aligned}$$

記号を簡単にするため, 上式における最右辺の $\{\cdot\}$ の中身を $f_n(s, t)$ する. すなわち,

$$f_n(s, t) = (\lambda(s, t)^n + \lambda(s, t)^{-n})(t+s) - (\lambda(s, t)^n - \lambda(s, t)^{-n}) \frac{1+t^2s^2}{\sqrt{ts}}. \quad (8)$$

任意の $(s, t) \in D$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f_{n+1}(t, s) < f_n(t, s)$ を示す. 以下 $\lambda(s, t)$ を λ と略記する.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(s, t) - f_n(s, t) &= \left\{ (\lambda^{n+1} + \lambda^{-(n+1)}) - (\lambda^n + \lambda^{-n}) \right\} (t + s) \\ &\quad - \left\{ (\lambda^{n+1} - \lambda^{-(n+1)}) - (\lambda^n - \lambda^{-n}) \right\} \frac{1 + t^2 s^2}{\sqrt{ts}} \\ &= (\lambda^{n+1} - \lambda^n) \left\{ (t + s) - \frac{1 + t^2 s^2}{\sqrt{ts}} \right\} \\ &\quad + (\lambda^{-(n+1)} - \lambda^{-n}) \left\{ (t + s) + \frac{1 + t^2 s^2}{\sqrt{ts}} \right\}. \end{aligned}$$

上式における最右辺1項目について,

$$(t + s) - \frac{1 + t^2 s^2}{\sqrt{ts}} = -\frac{1}{\sqrt{ts}} \left(t^{\frac{3}{2}} s^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(t^{\frac{1}{2}} s^{\frac{3}{2}} - 1 \right) < 0. \quad ((s, t) \in D). \tag{9}$$

D 上で $\lambda(s, t) > 1$ と合わせれば右辺1項目は D 上で負であることがわかる. 右辺2項目は明らかに D 上で負である. 以上より主張を得る. □

定理 6.1 から次が得られる. $(s, t) \in D$ に対して,

$$\min \{ |x_n(s, t)| \mid n \in \mathbb{Z} \} = \min \{ |x_0(s, t)|, |x_1(s, t)| \}. \tag{10}$$

式 (10) より次を得る.

$$\mathcal{N}_{0/1}(x_0(s, t)) = \begin{cases} \{X_{1/0}\} & x_0(s, t) < |x_1(s, t)| \\ \{X_{1/0}, X_{1/1}\} & x_0(s, t) \geq |x_1(s, t)| \end{cases}. \tag{11}$$

また, 補題 6.2 から, $\mathcal{N}_{1/0}(x_0(s, t))$ についても同様に表される. すなわち,

$$\mathcal{N}_{1/0}(x_0(s, t)) = \begin{cases} \{X_{1/0}\} & x_0(s, t) < |x_1(s, t)| \\ \{X_{1/0}, X_{1/1}\} & x_0(s, t) \geq |x_1(s, t)| \end{cases}. \tag{12}$$

したがって, $\Omega_\psi(x_0(s, t))$ は $x_0, |x_1|$ の大小に応じて図 10 のようになる.

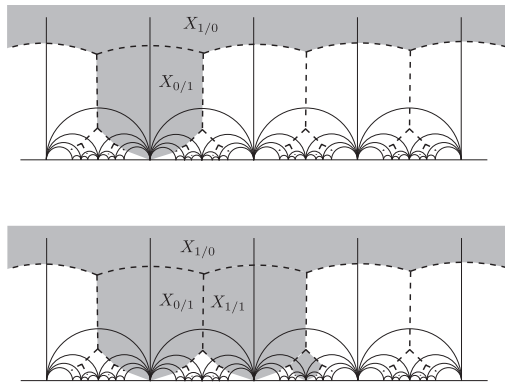


図 10 上図: $x_0(s, t) < |x_1(s, t)|$ のときの $\Omega_\psi(s_0(s, t))$ の図. 下図: $x_0(s, t) \geq |x_1(s, t)|$ のときの $\Omega_\psi(s_0(s, t))$ の図

次に $\mathcal{N}_{1/1}(|x_1(s,t)|)$ を決定する。補題 4.1 から、

$$\mathcal{N}_{1/1} = \left\{ X_{\frac{n+1}{n}} \in \Omega \mid n \geq 0 \right\} \sqcup \left\{ X_{\frac{n}{n+1}} \in \Omega \mid n \geq 0 \right\}.$$

補題 6.3. 任意の $(s,t) \in D$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して $u_n(s,t) = v_n(s,t)$.

証明. $u_n(t,s), v_n(t,s)$ それぞれに対して、辺の関係式より次の3項間漸化式を得る (図 11 参照).

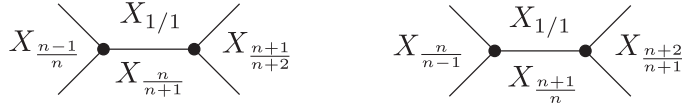


図 11 左: u_n に関する edge relation. 右: v_n に関する edge relation.

$$u_{n+1} = \psi(X_{1/1})u_n - u_{n-1} \quad (n \geq 1). \quad (13)$$

$$v_{n+1} = \psi(X_{1/1})v_n - v_{n-1} \quad (n \geq 1). \quad (14)$$

n に関する帰納法を用いるために、 D 上で $u_0 = v_0$ かつ $u_1 = v_1$ となることを確認する。

$$u_0(s,t) = \text{Tr}(A_{s,t}) = \text{Tr}(B_{s,t}) = v_0(s,t). \quad (15)$$

計算から、 $\text{Tr}(A_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})) = \text{Tr}((A_{s,t}B_{s,t})B_{s,t})$ である。すなわち、 $u_1(s,t) = v_1(s,t)$ 。 $n \geq 1$ まで一致しているとして、 $n+1$ について帰納法を用いて示す。

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \psi(X_{1/1})v_n - v_{n-1} \\ &= \psi(X_{1/1})u_n - u_{n-1} = u_{n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

定理 6.2. 任意の $(s,t) \in D$ に対して、 $u_n(s,t)$ は次の単調性をもつ。

$$\cdots < u_5(t,s) < u_3(t,s) < u_1(t,s) < 0 < u_0(t,s) < u_2(t,s) < u_4(t,s) < \cdots. \quad (16)$$

証明. $(s,t) \in D$ に対して、正則行列 $Q_{s,t} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ を次で定める。

$$Q_{s,t} = \begin{pmatrix} -\frac{(s+t)(st-1)}{2\varphi(s,t)} & \frac{1-s^2t^2+\varphi(t,s)}{2\varphi(s,t)} \\ \frac{(s+t)(st-1)}{2\varphi(s,t)} & \frac{s^2t^2-1+\varphi(s,t)}{2\varphi(s,t)} \end{pmatrix}, \quad \varphi(s,t) = \sqrt{(t^2-1)(s^2-1)(ts-1)^2}. \quad (17)$$

このとき、 $A_{s,t}B_{s,t}$ の $Q_{s,t}$ による共役は次の対角行列となる。

$$Q_{s,t}(A_{s,t}B_{s,t})Q_{s,t}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu(s,t) & 0 \\ 0 & \mu^{-1}(s,t) \end{pmatrix}, \quad \mu(s,t) = \frac{(t+s)^2 - 2(1+t^2s^2) - 2\varphi(t,s)}{(t-s)^2}. \quad (18)$$

これより, 行列 $A_{s,t}B_{s,t}$ に対応する Möbius 変換は Möb における共役により, $f(z) = \mu^2(s,t)z$ と表される. Möb の元の型の分類から $|\mu(s,t)| \neq 1$ ($(s,t) \in D$) である. したがって, $\mu(s,t)$ の連続性から, $\mu(s,t) > 1$ ($(s,t) \in D$) または $\mu(s,t) < -1$ ($(s,t) \in D$) である. $(s,t) = (1/4, 1/2) \in D$ について, $\mu(1/4, 1/2) < -1$ より次が得られる.

$$\mu(s,t) < -1 \quad ((s,t) \in D).$$

トレースが共役不変であるから $u_n(s,t)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} u_n(s,t) &= \text{Tr}((Q_{s,t}A_{s,t}Q_{s,t}^{-1})(Q_{s,t}A_{s,t}B_{s,t}Q_{s,t}^{-1})^n) \\ &= \frac{(t+s)(st-1)^2}{(t-s)\varphi(s,t)}(\mu(s,t)^n - \mu(s,t)^{-n}) + \frac{t+s}{t-s}(\mu(s,t)^n + \mu(s,t)^{-n}). \end{aligned}$$

$\mu(s,t) < -1$ ($(s,t) \in D$) であるから,

$$n \text{ が偶数} \Rightarrow \mu^n \pm \mu^{-n} > 0, \quad n \text{ が奇数} \Rightarrow \mu^n \pm \mu^{-n} < 0. \tag{19}$$

$u_n(t,s)$ の表示において, μ が関わらない係数の部分は常に正であるから, n が偶数ならば $u_n(s,t) > 0$ であり, n が奇数ならば $u_n(s,t) < 0$ である. 以下では, 記号を簡単にするために μ^2 を ν と表し, 変数 s, t はし省略する.

$m \geq 0$ について,

$$u_{2(m+1)} - u_{2m} = \frac{t+s}{t-s} \left\{ \frac{(ts-1)^2}{\varphi} + 1 \right\} (\nu^{m+1} - \nu^m) + \frac{t+s}{t-s} \left\{ 1 - \frac{(ts-1)^2}{\varphi} \right\} (\nu^{-(m+1)} - \nu^{-m}). \tag{20}$$

ここで, D 上で $g := \frac{(ts-1)^2}{\varphi} > 1$ となることを示そう. φ の定義と D 上で $1-ts > 0$ となることに注意すれば,

$$g = \frac{1-ts}{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}}.$$

したがって,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{(1-s^2)(t-s)}{\{(1-s^2)(1-t^2)\}^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

したがって, s を固定する毎に t の関数として g は単調増加である. ここで, s を固定すると t の範囲は $s < t < 1$ であることから,

$$g > g(s,s) = \frac{1-s^2}{\sqrt{(1-s^2)^2}} = 1.$$

これより, D 上で $\nu > 1$ であることと合わせれば, $u_{2(m+1)} - u_{2m} > 0$ が得られる.

$m \geq 1$ について,

$$u_{2m+1} - u_{2m-1} = \frac{t+s}{t-s} \left\{ \frac{(ts-1)^2}{\varphi} + 1 \right\} (\mu - \mu^{-1}) \nu^m - \frac{t+s}{t-s} \left\{ 1 - \frac{(ts-1)^2}{\varphi} \right\} (\mu - \mu^{-1}) \nu^{-m}. \quad (21)$$

D 上で $\mu < -1$ より $\mu - \mu^{-1} < 0$ である. 再度 $\frac{(ts-1)^2}{\varphi(t,s)} > 1$ と $\nu > 1$ と合わせれば $u_{2m+1} - u_{2m-1} < 0$ が得られる. 以上より主張が得られた. \square

補題 6.4. 任意の $(s, t) \in D$ について, $u_0(s, t) < |u_1(s, t)|$.

証明. $u_0 > 0$ かつ $u_1 < 0$ に注意して計算すれば,

$$|u_1(s, t)| - |u_0(s, t)| = \frac{4(t+s) \{2(1+t^2s^2) - (t+s)^2\}}{(t-s)^3}. \quad (22)$$

\mathbb{R}^2 上の関数 $F(s, t) = 2(1+t^2s^2) - (t+s)^2$ とすると,

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 4st^2 - 2(s+t), \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 4s^2t - 2(s+t).$$

したがって, $F(s, t)$ がコンパクト集合 \bar{D} 上で最小値または最大値を (s_0, t_0) で持つならば $s_0 = t_0$ である. よって, $F(s, s) = (s^2 - 1)^2s$ から $F(s, t)$ は \bar{D} 上での最小値は 0 である. 特に, D 上では $F(s, t) > 0$. すなわち, 任意の $(s, t) \in D$ に対して,

$$|u_1(s, t)| - |u_0(s, t)| = \frac{4(t+s)F(s, t)}{(t-s)^3} > 0. \quad \square \quad (23)$$

補題 6.3, 6.4 と定理 6.2 から, $x_0(s, t) = u_0(s, t) = v_0(s, t)$ と合わせて,

$$\mathcal{N}_{1/1}(x_0(s, t)) = \{X_{1/0}, X_{0/1}\}. \quad (24)$$

以上を合わせて次を得る.

定理 6.3. $(s, t) \in D$ に対して,

- (1) $x_0(s, t) < |x_1(s, t)|$ ならば, $\Omega(x_0(s, t)) = \{X_{1/0}, X_{0/1}\}$.
- (2) $x_0(s, t) = |x_1(s, t)|$ ならば, $\Omega(x_0(s, t)) = \Omega(|x_1(s, t)|) = \{X_{1/0}, X_{0/1}, X_{1/1}\}$.
- (3) $x_0(s, t) > |x_1(s, t)|$ ならば, $\Omega(|x_1(s, t)|) = \{X_{1/1}\}$.

定理における Ω_ψ を図示したものが図 12 である. これより, θ -Schottky 群の場合と同様にして Jørgensen 数が求められる.

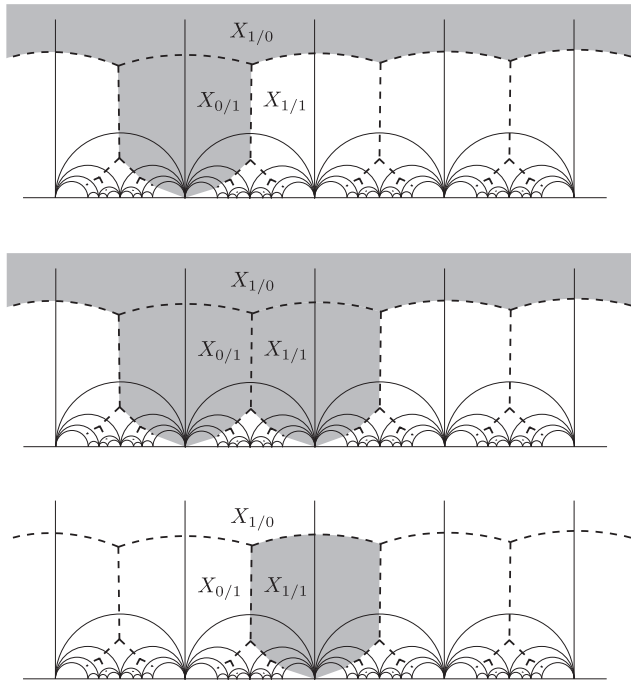


図 12 上図: $x_0(s, t) < |x_1(s, t)|$ での $\Omega_\psi(x_0(s, t))$. 中図: $x_0(s, t) = |x_1(s, t)|$ での $\Omega_\psi(x_0(s, t)) = \Omega_\psi(|x_1(s, t)|)$. 下図: $x_0(s, t) > |x_1(s, t)|$ での $\Omega_\psi(x_1(s, t))$.

定理 6.4. (s, t) -Schottky 群 $G_{s,t} = \langle A_{s,t}, B_{s,t} \rangle$ の Jørgensen 数は次である.

- (1) $\text{Tr}(A_{s,t}) \leq |\text{Tr}(A_{s,t}B_{s,t})|$ ならば, $J(G_{s,t}) = \text{Tr}(A_{s,t})^2 + \text{Tr}[A_{s,t}, B_{s,t}] - 6$.
- (2) $\text{Tr}(A_{s,t}) > |\text{Tr}(A_{s,t}B_{s,t})|$ ならば, $J(G_{s,t}) = \text{Tr}(A_{s,t}B_{s,t})^2 + \text{Tr}[A_{s,t}, B_{s,t}] - 6$.

定理 6.4 において場合分けされる領域を図示したものが図 13 であり, 曲線を境に $J(G_{s,t})$ の表示が変わることを意味している. また, $J(G_{s,t})$ を (s, t) の関数として明示すると次である.

$$J(G_{s,t}) = \begin{cases} \frac{16(st(s^3t^3 + s^2 - 4st + t^2) + 1)}{(s-t)^4} & ((1) \text{ のとき}) \\ \frac{16(st-1)^2(s^2(2t^2-1) + 2st - t^2 + 2)}{(s-t)^4} & ((2) \text{ のとき}) \end{cases}$$

謝辞

Jørgensen 数の計算について議論の時間を取って頂き, 本論文の作成に多くの助言を下さいました早稲田大学小森洋平教授に心より感謝申し上げます.

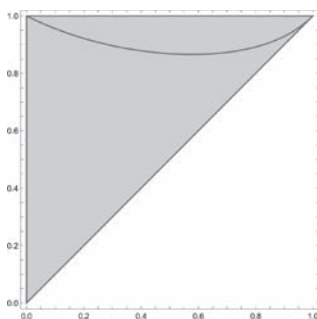


図 13 定理 6.4 における (1) が曲線から上の領域に対応し, (2) が曲線から下の領域に対応する.

参考文献

- [1] A. F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [2] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial group theory*. Dover Publications, 1976.
- [3] J. Meier. *Groups, graphs and trees: an introduction to the geometry of infinite groups*. Cambridge University Press, 2008.
- [4] R. P. Osborne and H. Zieschang. Primitives in the free group on two generators. *Inventiones mathematicae*, 63(1): 17–24, 1981.
- [5] J. G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [6] S-P. Tan, Y-LWong, and Y. Zhang. Generalized Markoff maps and McShane’s identity. *Advances in Mathematics*, 217(2): 761–813, 2008.
- [7] Y. Yamashita and R. Yamazaki. The realization problem for Jørgensen numbers. *arXiv:1703.07732*, 2017.
- [8] Y. Yamashita and R. Yamazaki. The realization problem for Jørgensen numbers. *Conform. Geom. Dyn.*, 23: 17–31, 2019.