

リスク下における  
確率加重関数の研究

村上始

## 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	はじめに	1
1.2	意思決定理論における研究対象とアプローチ	2
1.3	リスク下の意思決定の代表的な理論	3
1.4	確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズム	6
1.5	本論文の構成	8
1.6	ベイズ推定に関する説明	11
<b>第2章</b>	<b>研究1 確率加重関数の理論的な前提に関する研究</b>	<b>18</b>
2.1	目的	18
2.2	方法	20
2.3	ランク双対称性の検証結果と考察	27
2.4	確率加重関数の理論的な前提に関する検討結果のまとめ	33
<b>第3章</b>	<b>研究2 確率加重関数の経験的な前提に関する研究</b>	<b>35</b>
3.1	目的	35
3.2	Wu & Gonzalez (1996, 1998) による確率加重関数の形状の推測方法	35
3.3	研究1のデータを用いた命題3による個人とグループレベルにおける確率加重関数の形状の推測	39
3.4	Wu & Gonzalez (1996, 1998) の命題1と2による個人とグループレベルにおける確率加重関数の形状の推測	43
3.5	確率加重関数の経験的な前提に関する検討結果のまとめ	53
<b>第4章</b>	<b>研究3 確率加重関数の形状を生み出すメカニズムに関する研究</b>	<b>55</b>
4.1	目的	55
4.2	確率加重関数の心理的なメカニズム	56
4.3	確率加重関数のモデルとそれに対応する遅延割引関数のモデルの紹介	62
4.4	方法	84
4.5	結果	92
4.6	確率加重関数と遅延割引関数の関係に関する考察	112

第 5 章	総合考察	117
5.1	本研究の知見のまとめ	117
5.2	今後の展望	120
引用文献		122
脚注		126
付録 A	stan code と R の実行関数	127
A.1	2.3.2 項のランク双対称性の検証で用いたモデルの推定	127
A.2	3.4.2 項の確率加重関数の形状の推測で用いたモデルの推定	128
A.3	効用値と確率加重値の推定	129
A.4	確率加重関数のモデルに関するフリーパラメータの推定	132
A.4.1	恒等 – 双曲線型	132
A.4.2	ベキ – 双曲線型	135
A.4.3	ベキ – 一般化双曲線型	138
A.5	遅延割引関数のモデルに関するフリーパラメータの推定	142
A.5.1	恒等 – 双曲線型	142
A.5.2	ベキ – 双曲線型	144
A.5.3	ベキ – 一般化双曲線型	147
付録 B	確率加重関数の推定結果	152
B.1	実験参加者 45 名の確率加重値と, 12 個のモデルのプロット	152
B.2	実験参加者レベルにおける各モデルの推定値のヒストグラム	161
B.3	確率加重関数の各モデルのグループレベルにおける推定値	169
付録 C	遅延割引関数の推定結果	170
C.1	先行研究 25 件の主観的等価点と, 12 個のモデルのプロット	170
C.2	先行研究の各データレベルにおける各モデルの推定値のヒストグラム	180
C.3	遅延割引関数の各モデルのグループレベルにおける推定値	195

## 第1章 序論

本論文では、確率加重関数の理論的・経験的な前提に関する研究を行い(それぞれ研究1, 研究2), その上で確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて検討すること(研究3)を目的とする。本章では、本研究全体の枠組みについて述べる。以下では、まず、リスク下の意思決定の理論と確率加重関数について概説する。そして、確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて検討する本研究の位置づけを説明する。次に本研究全体の構成を述べる。最後に本研究の分析で用いるベイズ推定について概説する。

### 1.1 はじめに

人は、当選確率が非常に低い宝くじを少しでもたくさん購入し、少しでも当選確率を上げようとする。また、末期がんを患っていたとしても、死亡する確率を少しでも下げようとするだろう。一方で、天気予報の降水確率が20%から30%に変わったとしても、あまり気にしない。このように人は確率に対して客観的な数値とは異なった見方やインパクトを感じているように思われる。本研究では、選択肢を選択する際に結果の生じる確率が既知な状況であるリスク下の意思決定において、確率に対する人の認知傾向について検討を行った。ここでの意思決定とは、複数の選択肢の中から、一つ以上の選択肢を採択することを指す(竹村, 2009)。リスク下の意思決定に関する代表的な理論としてプロスペクト理論(Kahneman & Tversky, 1972; Tversky & Kahneman, 1992)がある。プロスペクト理論に代表される一群の期待効用理論では、選択肢に対する評価は、選択肢を採択することで得られる結果と、その結果が生じる確率により行われる。von Neumann & Morgenstern (1944, 1947)による期待効用理論では、選択肢の結果についてのみ効用関数という関数を置き、選択肢が評価される。プロスペクト理論あるいは、ランク依存型期待効用理論といった非線形効用理論のもとでの選択肢の評価は、結果と確率に対してそれぞれ価値関数と確率加重関数という関数を置くことで数理的に表現する。Figure 1.1.1はTversky & Kahneman (1992)が提案した確率加重関数を示している。確率加重関数は、確率  $p$  に対して、人が主観的に感じるインパクト  $w(p)$ を表す関数である。なお、Figure 1.1.1では横軸に確率  $p$ を、縦軸に  $w(p)$ を配した。Tversky & Kahneman (1992)では、確率加重関数の特徴として、低い確率では実際の確率より高いインパクトを示し、高い確率に対しては実際の確率より低いインパクトを示すため、逆S字の形状となることが挙げられた。また、価値関数とは、選択肢を選択したことで得られる結果の価値を表現する関数である。

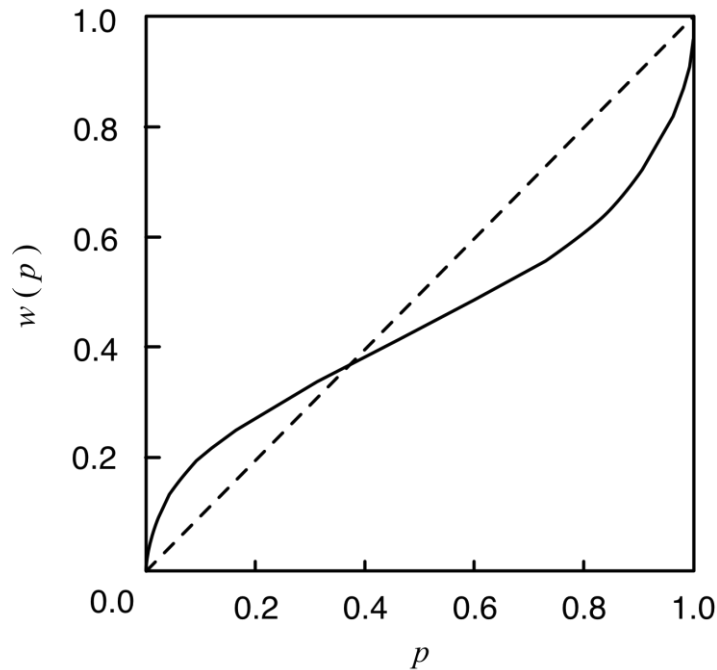


Figure1.1.1. 確率加重関数のプロット

## 1.2 意思決定理論における研究対象とアプローチ

本節では意思決定理論における研究対象，研究のアプローチについて竹村（2009）に基づき概説する。意思決定理論では，意思決定を，確実性下の意思決定，リスク下の意思決定，曖昧性下の意思決定，無知下の意思決定の四つに大別している。この分類は意思決定場面において，意思決定者が自身を取り巻く環境についてどれだけ知っているかを基準にして行われている。Figure1.2.1 に竹村（2009）による分類の概念図を示した。まず，確実性下の意思決定とは，意思決定者がある選択肢を選ぶことで特定の結果が確実に得られる場合である。つまり，選択肢と結果が等しい状況での意思決定である。次にリスク下の意思決定とは，選択肢を選んだことによって得られる結果の確率がわかっている場合の意思決定である。選択肢を採択したことで結果が既知の確率で生じる意思決定状況を研究の対象とするリスク下の意思決定研究では，選択肢としてギャンブルやクジを用いることが多く，本論文の実験でも選択肢にクジを用いた。曖昧性下と無知下の意思決定は，不確実性下の意思決定の下位分類とされることが多い。曖昧性下の意思決定とは，意思決定者が選択肢を選択したことで生じる結果と，結果を引き起こす自然の状態についてはわかっているが，結果が生じる確率は既知でない場合である。最後に無知下の意思決定とは，状態の集合の要素や結果の集合の要素が既知ではない状態での意思決定のことである。これら分類された意思決定の中で，リスク下の意思決定と不確実性下あるいは曖昧性下の意思決定に関す

る研究が中心に行われている。

意思決定の研究のアプローチには、大きく分けて二つある。一つは規範的アプローチ、もう一つは記述的アプローチである。規範的アプローチとは、人は現実の状況においてどのような意思決定をするべきであるかを説くものである。このアプローチは主に経済学においてとられているものであり、規範理論において代表的なものは効用理論の体系である。これに対し、記述的アプローチでは、人が実際にどのような意思決定を行っているかを説明するものである。このアプローチは、主に心理学において研究が行われてきており、記述理論において代表的なものに行動意思決定論がある。行動意思決定論では、規範理論が公理を設定し、数学的に理論を構築していくのに対して、規範的なアプローチの理論と実際の人間の意思決定行動との乖離を明らかにし、選好や判断に関するプロセスの解明を行っている。

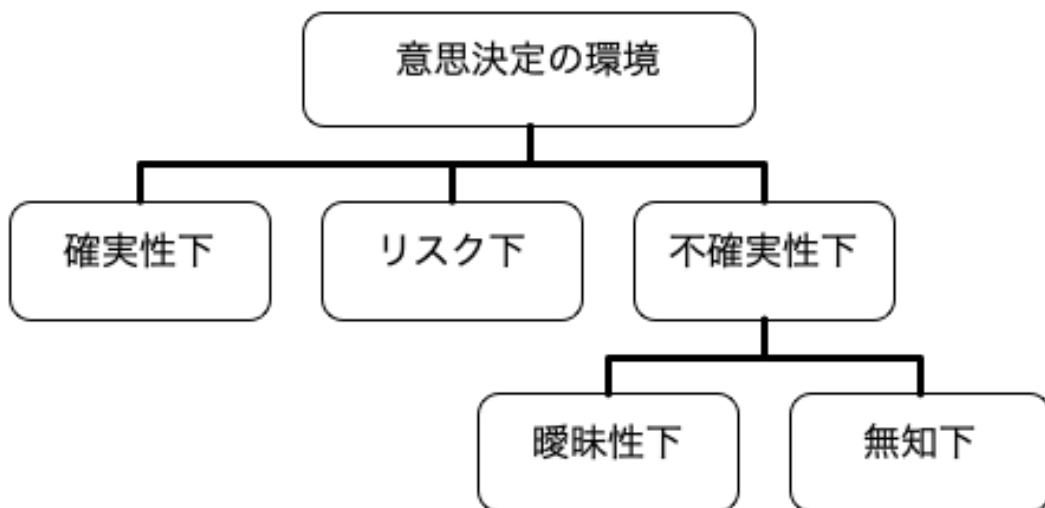


Figure1.2.1. 意思決定の環境に関する不確実性の分類（竹村，2009，p.7，図 1-1）

### 1.3 リスク下の意思決定の代表的な理論

次にリスク下の意思決定研究において代表的な理論であるランク依存型期待効用理論とプロスペクト理論について、Wakker (2010) に基づき概説を行う。以下では、まず期待効用理論およびその公理の侵犯を示す。そして、その公理の侵犯を説明可能とする理論として、ランク依存型期待効用理論と、それを一般化した累積プロスペクト理論について述べる。ここで選択肢を採択したことで生じる異なる結果を  $x, y, z$ 、それぞれの結果が生じる確率を  $p, q, 1-p-q$  とし、この選択肢  $L$  を

$$\text{選択肢}L = \begin{bmatrix} p & ; & x \\ q & ; & y \\ 1-p-q & ; & z \end{bmatrix} \quad (1.3.1)$$

のように表現する。また、選択肢 A は選択肢 B と同程度以上に好ましいということを「 $A \succsim B$ 」と表す。選択肢間の「より好ましい」という関係を  $>$  で表し、「同程度に好ましい」という関係を  $\sim$  で表す。

規範的なアプローチの代表的な理論である期待効用理論に対する代表的な公理の侵犯の一つにアレのパラドックス (Allais, 1953) がある。アレのパラドックスは二つの意思決定の問題により構成されており、1 問目は、

$$\text{選択肢}A = \begin{bmatrix} 0\% & ; & \$5M \\ 11\% & ; & \$1M \\ 89\% & ; & \$0 \end{bmatrix} \text{ vs. } \begin{bmatrix} 10\% & ; & \$5M \\ 0\% & ; & \$1M \\ 90\% & ; & \$0 \end{bmatrix} = \text{選択肢}B \quad (1.3.2)$$

のように、1M ドルを 11% の確率でもらえる選択肢 A と 5M ドルを 10% の確率でもらえる選択肢 B のうちどちらが好ましいかを問い、多くの人は選択肢 B をより好ましいと回答するとされている。

2 問目は

$$\text{選択肢}A' = \begin{bmatrix} 0\% & ; & \$5M \\ 100\% & ; & \$1M \\ 0\% & ; & \$0 \end{bmatrix} \text{ vs. } \begin{bmatrix} 10\% & ; & \$5M \\ 89\% & ; & \$1M \\ 1\% & ; & \$0 \end{bmatrix} = \text{選択肢}B' \quad (1.3.3)$$

のように、1M ドルを確実にもらえる選択肢 A' と、5M ドルを 10% で、1M ドルを 89% の確率でもらえる選択肢 B' のうちどちらが好ましいかを問い、多くの人は選択肢 A' をより好ましいと回答するとされている。

期待効用理論では、選択肢 L の評価値  $U(L)$  は

$$U(L) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i) \quad (1.3.4)$$

という式によって求められる。ただし、 $x_i$  は選択肢 L を選択することで得られうる結果であり、 $p_i$  は結果  $x_i$  が生じる確率を、 $n$  は起こりうる結果の総数を表している。 $u(\cdot)$  は効用関数であり、結果に対する主観的な評価を表す正の線形変換の範囲で一意性を持つ関数である。また効用理論では人は(1.3.4)式で求めた評価値が最も高い選択肢を一群の選択肢のなかから選択すると仮定している。期待効用理論に基づく予測では、1 問目で A を選択していれば、2 問目において A' を選択し、逆に B を選択していれば、次の問では B' が選択される。一例として、1 問目と、2 問目について、効用理論(1.3.4)式により(1.3.2)、(1.3.3)式のクジの評価値を表すと、

$$U(A) = 0.11 \times u(1M) \text{ vs. } 0.10 \times u(5M) = U(B) \quad (1.3.5)$$

$$U(A') = (0.11 + 0.89) \times u(1M) \text{ vs. } 0.10 \times u(5M) + 0.89 \times u(1M) = U(B') \quad (1.3.6)$$

となる。1問目の選択肢  $A$  と  $B$  に  $0.89 \times u(1M)$  を加えることで、2問目の選択肢  $A'$  と  $B'$  になることも(1.3.5), (1.3.6)式から示される。このことから、期待効用理論に基づくと  $A > B$  であったならば  $A' > B'$  であることが予想される。しかし、現実の意思決定では  $A < B$ ,  $A' > B'$  となることが多く (Tversky & Kahneman, 1992), アレのパラドックスで示されるような意思決定現象を期待効用理論ではうまく説明できていないことを示唆している。

アレのパラドックスが主な起因となり、このパラドックスを説明可能な理論としてランク依存型期待効用理論などの非線形効用理論 (Fishburn, 1988) が提案された (Wakker, 2010)。非線形効用理論では、選択肢の結果を変換する関数だけではなく、確率を変換する関数を導入し、選択肢の評価値を求める。以下では、非線形効用理論の代表的な理論として、ランク依存型期待効用理論 (rank dependent expected utility theory: RDEU) と、それを一般化した累積プロスペクト理論 (cumulative prospect theory: CPT) について、竹村 (2009) と Wakker (2010) に基づき概説する。

**ランク依存型期待効用理論 (rank dependent expected utility theory: RDEU)** ランク依存型期待効用理論のもとでは、選択肢  $L$  に対する評価は、

$$V_{RDEU}(L) = \sum_{i=1}^n \pi_i u(x_i) \quad (1.3.7)$$

によって表される。ただし、 $\pi_i = w(\sum_{k=1}^i p_k) - w(\sum_{k=1}^{i-1} p_k)$ ,  $\sum_{k=1}^0 p_k = 0$ ,  $\pi_1 = w(p_1)$ ,  $\pi_n = w(p_n)$  であり、 $\pi_i$  を決定の重みという。確率加重関数  $w(\cdot)$  は、 $w(0)=0$ ,  $w(1)=1$  となる厳密な単調増加関数である。また、 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  と添字が 1 に近いほど結果  $x_i$  が高くなるように順位付けされている。ランク依存型期待効用理論における

$$\text{選択肢 } C = \begin{bmatrix} 0.25 & ; & 80 \\ 0.25 & ; & 60 \\ 0.25 & ; & 40 \\ 0.25 & ; & 20 \end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

の効用を模式的に表した図を、Wakker(2010)を参考に作成し、Figure1.3.1 に示す。Figure1.3.1 の横軸は結果  $x_i$  を効用関数  $u$  によって変換した値を、縦軸にはある結果  $x_i$  よりも高い結果が生じる確率を確率加重関数  $w$  で変換した値を配した。Figure1.3.1 では選択肢  $C$  に対する評価値を黒の面積で表した。たとえば、Figure1.3.1 において、結果 40 の効用  $u(40)$  の決定の重みは、40 より望ましい結果を得られる確率 0.5 に 40 が生じる確率 0.25 を足した値 ( $0.5+0.25=0.75$ ) と、40 より望ましい結果を得られる確率 0.5 のそれぞれを確率加重関数により変換した値の差 ( $\pi = w(0.75) - w(0.5)$ ) で表され、 $u(40) \times [w(0.75) - w(0.5)]$  の面積によ



り重み付けされた効用 $u(40)$ が表されている。また、ランク依存型期待効用理論は、利得に関する確率加重関数 $w^+$ と、損失に関する確率加重関数を $w^-$ との間に、 $w^+(p) = 1 - w^-(1 - p)$ という仮定があり、片方の確率加重関数の形状が決まれば、もう片方も同じ形状となる。

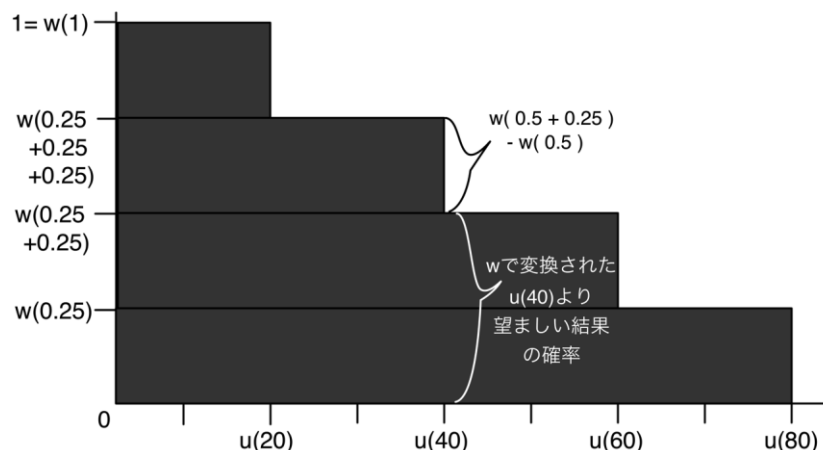


Figure1.3.1. ランク依存型期待効用におけるクジの評価の模式図

**累積プロスペクト理論 (cumulative prospect theory: CPT)** 累積プロスペクト理論はランク依存型期待効用理論を一般化した理論であり、プロスペクト理論では、利得領域と損失領域で別々の確率加重関数（それぞれ $w^+$ ,  $w^-$ ）を想定している。

プロスペクト理論では、選択肢  $L$  に関して、 $x_1 \geq \dots \geq x_k \geq 0 \geq x_{k+1} \geq \dots \geq x_n$  というように参照点も含めて結果の望ましさを順位付けている。プロスペクト理論のもとでは、選択肢  $L$  に対する評価は

$$V_{CPT}(L) = \sum_{i=1}^k \pi_i v(x_i) + \sum_{j=k+1}^n \pi_j v(x_j) \quad (1.3.9)$$

と表現される。ただし、 $i \leq k$  のとき  $\pi_i = w^+(\sum_{k=1}^i p_k) - w^+(\sum_{k=1}^{i-1} p_k)$ ,  $j > k$  のとき  $\pi_j = w^-(\sum_{k=j}^n p_k) - w^-(\sum_{k=j+1}^n p_k)$  である。プロスペクト理論では、 $v(\cdot)$  を価値関数と呼び、結果に対する主観的な評価を表す。なお、プロスペクト理論において結果は心理学的な原点である参照点からの乖離量として定義される。また、フレーミングの仕方により参照点は移動することが仮定されている。意思決定者は参照点を基準として利得あるいは損失のいずれかとして結果を評価すると考える（竹村，2009）。

#### 1.4 確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズム

ここまでの、リスク下の意思決定の理論と確率加重関数について概説した。本節は確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて検討する本研究の位置づけを説明

する。本論文では、確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムとして、人は確率を遅延時間に置き換えていることを仮定したモデルについて検討する。このような仮定をしたモデルの導出および個々のモデルに関する詳しい説明は第 4 章で述べる。以下では、確率と遅延時間を関係づけた研究の紹介と、本研究の位置づけについて述べる。なお、下記の説明は竹村・村上（2018）に基づいている。

確率加重関数がどのようにして生じるのかということについては、意思決定研究の文脈でいろいろな理論的考察がなされている (Luce, 2001; Prelec, 1998; Prelec & Loewenstein, 1991; Rachlin, Raineri, & Cross, 1991; Takahashi, 2011)。Prelec (1998) は、特定の選好パターンを示したときに、どのような確率加重関数の形状になるかを公理的なアプローチから検討した最初の研究とされている (Luce, 2001)。彼は Compound invariance という公理を提案し、この公理に従った選好パターンを示したときに、確率加重関数は、 $W(p)=\exp[-b(-\ln p)]^a$  となることを導いた。さらに、Luce (2001) は、Prelec (1998) の公理 Compound invariance をよりシンプルにした Reduction invariance を提案している。この Reduction invariance と呼ばれる公理は、Compound invariance よりも、選好パターンの検証が容易であるという特徴がある。また、彼は Reduction invariance 公理とそれに関する公理について考察し、さまざまな確率加重関数のモデルを提案した。さらに Takemura & Murakami (2018) では、Prelec (1998) および Luce (2001) で示された公理と確率加重関数のモデルとの対応関係について検証する実験が行われている。

Ebert & Prelec (2007) は、上記の公理的なアプローチから確率と遅延時間を結びつける研究を行っている。確率  $p$  と遅延時間  $D$  との関係は、 $p = \exp(-D)$  で表されるという仮定を置いた。そして、上述の確率加重関数のモデルに関する Compound invariance 公理を、遅延して報酬がもらえる状況での意思決定に応用し、遅延割引関数のモデル  $V(D) = \exp[-(bD)^a]$  を提案した。ここで、 $a$  と  $b$  はフリーパラメータである。遅延割引関数とは、時間とともに報酬の価値が減少する様子を表す関数である。

Ebert & Prelec (2007) のように、確率と遅延時間の関係あるいは、リスク下の意思決定と異時点間の選択の関係について検討した研究は、他にも報告されてきている。Prelec & Loewenstein (1991) は、リスク下の意思決定と異時点間の選択におけるアノマリー（アレのパラドックス (Allais, 1953) など経済学における規範理論から逸脱した実際の選択行動）にはいくつか共通した性質があることを指摘している。従来の研究ではリスク下の意思決定と異時点間の選択は別々の理論により説明されているが、一方で彼らは、現実の世界において時間と不確実性は代替可能であるかもしれないことにも言及している。例えば、何かが遅延するということは多くの場合、それは不確実であるということであり、また不確実性は時間により解決することが多く、不確実な事象は大抵、遅延して生起することを挙

げている。

リスク下の意思決定と異時点間の選択との関係性について検討した別の研究として、Rachlin et al. (1991) は、確率  $p$  と遅延時間  $D$  は  $D = (1/p) - 1$  という関係にあると仮定した。また、報酬の受け取りが遅延することでその価値が割り引かれる遅延価値割引の現象と、報酬の受け取りに確率が伴うことでその価値が割り引かれる確率割引の現象が同一のプロセスにより行われることを主張した。さらに、彼らは価値の割引において、遅延時間が確率より本質的な要因であると考え、確率を遅延時間に変換し、遅延時間による価値の割引と、確率を遅延時間に変換した値による価値の割引はともに双曲線関数で表現できることを報告している。Takahashi (2011) は、Rachlin et al. (1991) の考え方を発展させ、確率加重関数のモデルを提案している。彼は遅延時間がフェヒナー法則により主観的な時間に変換されることを仮定した上で、主観的な遅延時間と確率加重関数に基づいた主観的な遅延時間には、スティーブンスのベキ法則が働くと考え、Prelec (1998) の確率加重関数を一般化したモデルを導出した。Takemura & Murakami (2016) では、確率と遅延時間は  $D = (1/p)$  という関係を仮定し、遅延時間にフェヒナーの対数法則が働くと考えた。そして、主観的な遅延時間  $\log(1/p)$  を双曲線型の遅延割引関数の遅延時間に置き換えた確率加重関数のモデルを提案した。このように、リスク下の意思決定と異時点間における選択行動との関係を示唆する研究は、近年増えてきており（詳しくは芝 (2017) を参照）、これら二つの意思決定の関係について検討することは人の意思決定をより深く理解する上で重要であると考えられる。

## 1.5 本論文の構成

本論文の構成を、Figure 1.5.1 に示す。まず、第 2 章の研究 1 では、確率加重関数の理論的な前提に関する研究として、確率加重関数を導入する上で必要な理論であるランク依存型期待効用理論を公理的アプローチから検討を行う。ただし、研究 1 は理論で仮定されているような判断あるいは意思決定を実際に人が行っているかを検討するものである。このため、確率加重関数を導入することの意義や必要性、つまり確率加重関数が非線形であるかについては検討できない。そこで、第 3 章の研究 2 では、確率加重関数の経験的な前提に関する研究として、従来の研究で指摘されているように、実際に人の確率加重関数の形状が非線形であるかを検討する。確率加重関数の形状が非線形となることは、クジの選択課題を用いた先行研究によって示されてきた (Tversky & Kahneman, 1992; Wu & Gonzalez, 1996, 1998; Gonzalez & Wu, 1999; Abdellaoui, 2000)。なかでも、Wu & Gonzalez (1996, 1998) は個人のクジの選択結果を集計したデータを用いて、他の研究に比べてより少ない仮定のもとで確率加重関数の形状が逆 S 字であることを示した。研究 2 では、Wu & Gonzalez (1996,

1998) の方法を用いて、個人およびグループレベルにおける確率加重関数の形状が、先行研究で示されてきたように逆 S 字であるか、あるいはより広義に非線形であるかを検討する。これは、確率加重関数  $w(p)$  の形状が仮に線形であった場合には、期待効用理論によりリスク下の意思決定を説明できることを示している。つまり、確率加重関数が線形であった場合には、確率加重関数を導入する必要性あるいは意義が乏しいため、このような検討を行う。

このように第 2 章、第 3 章において、確率加重関数の前提に関する検討を行った上で、次に、第 4 章の研究 3 では確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて検討を行う。具体的には確率加重関数とそれに対応する遅延割引関数について、異なる仮定を置いたモデルを比較する実験および先行研究の実験の再分析を行い、両関数において認められた共通点と相違点から心理的なメカニズムについて考察する。第 5 章では総合考察を行う。なお、次節の 1.6 節では本研究の分析で用いるベイズ推定について概説する。

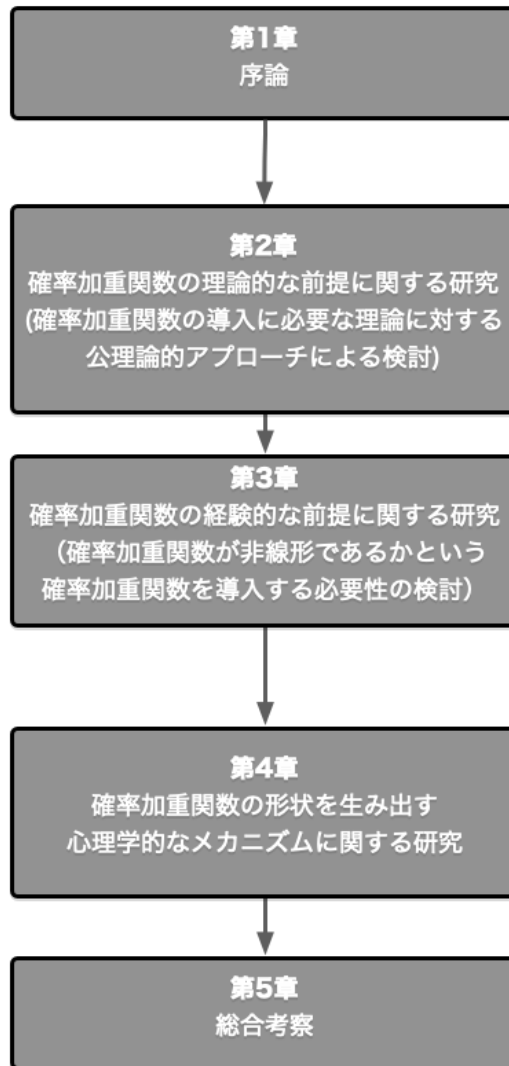


Figure1.5.1. 本論文の構成

## 1.6 ベイズ推定に関する説明

本節では、本研究において分析で用いるベイズ推定について説明する。以下では、ベイズ推定、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov chain Monte Carlo method: MCMC 法)、モデル評価と選択における Watanabe (2010) による広く使える情報量基準 (widely applicable information criterion: WAIC) の意味について、豊田 (2015, 2016, 2017), 久保 (2012), 松浦 (2016), McElreath (2016) に基づき概説する。なお、主な数式や用語の説明は豊田 (2015, 2016) に基づいている。

### 1.6.1 ベイズ推定

以下では、まずベイズ推定の概要について述べる。次に、ベイズ推定および MCMC 法を用いることで得られる事後分布を評価する指標について紹介する。

**ベイズ推定の概要** ベイズ推定においては、(1.6.1)式で示す分布に関するベイズの定理

$$f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{x})} \quad (1.6.1)$$

を用いる。なお、 $f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ は事後分布、 $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ は尤度、 $f(\boldsymbol{\theta})$ は母数の事前分布、 $f(\mathbf{x})$ は正規化定数を表す。(1.6.1)式で示したように、ベイズの定理は、事後分布 $f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ 、つまりデータ  $\mathbf{x}$  が与えられた後の母数 $\boldsymbol{\theta}$ の条件付き分布を与える定理である。また、ベイズ統計学と伝統的な統計学の違いとして、ベイズ統計学ではすべての母数を確率変数とみなして確率分布を想定する。その一方で、伝統的な統計学では母数はある一点の真値を持つ定数であることが挙げられる (松浦, 2016)。

また、(1.6.1)式において、 $f(\mathbf{x})$ は母数を含まない正規化定数であったことから、

$$f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.6.2)$$

のように、事後分布を尤度と事前分布の積で表すことがある。なお、尤度 $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ とは、母数 $\boldsymbol{\theta}$ を変数、データ  $\mathbf{x}$  を定数として確率密度関数を扱った場合である。事前分布 $f(\boldsymbol{\theta})$ は母数の分布であり、ここで事前とはデータを得る前の状態を指す。特に、事前分布として、十分に広い区間を指定した一様分布や幅の広い正規分布を用いた場合には、このような事前分布のことを無情報的事前分布という。無情報的事前分布は、事後分布を得る際に用いる事前分布として、できるだけ事後分布へ影響しないような事前分布のことを指す。

上記で示したように、ベイズ推定では、ベイズの定理を用いて、事後分布、すなわちデータを得た後の母数の条件付き分布が推定の対象となる。具体的には、1.6.2 項で説明するマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法) により、事後分布 $f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ に比例する分布 $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})f(\boldsymbol{\theta})$ から、乱数を発生させ、その乱数を事後分布の代わりとする。つまり、ここで得た乱数を事後分布の代わりに用い、評価する。以下では具体的に事後分布を評価する際に

用いる指標について述べる。

**事後分布を評価する指標** 上述したように、MCMC 法により得た乱数は、母数の事後分布の代わりに用いられる。この事後分布の評価において用いられる指標として、以下では、事後期待値、事後中央値、事後確率最大値、事後分散・事後標準偏差、確信区間について述べる。これらの指標を紹介するために、Figure1.6.1 に母数の事後分布と事後分布を評価する指標を例示する。なお、Figure1.6.1 は、豊田 (2016) の図 2.2 を参考に作成した。Figure1.6.1 では、事後期待値、事後中央値、事後確率最大値はほぼ同じ値であったため、これらの指標を表した縦線はほぼ重なった。ここで、事後期待値、事後中央値、事後確率最大値はそれぞれ母数の事後分布について平均値、中央値、最頻値を求めた値である。また、事後標準偏差については母数の事後分布について標準偏差を求めた値である。Figure1.6.1 では、事後標準偏差を両向きの矢印で表した。事後標準偏差や事後分散といった事後分布の散布度は、その値が小さいほど点推定値の精度が高いことを表す。最後に確信区間は、事後分布の両端から  $a/2\%$  の面積を切り取った中央部の  $(100-a)\%$  の区間であり、特に  $a=5\%$  のときを 95% 確信区間と呼ぶ。このほかにも、MCMC 法により得た乱数列  $\theta^{(t)}$  の関数  $g(\theta^{(t)})$  である生成量を用い、研究仮説の真偽を 0 (偽) あるいは 1 (真) の 2 値で表すことで、研究仮説が正しい確率を求めることができる。たとえば、平均値が基準点よりも大きい確率や 2 群の測定値の差が閾値を上回る確率などを算出できる。

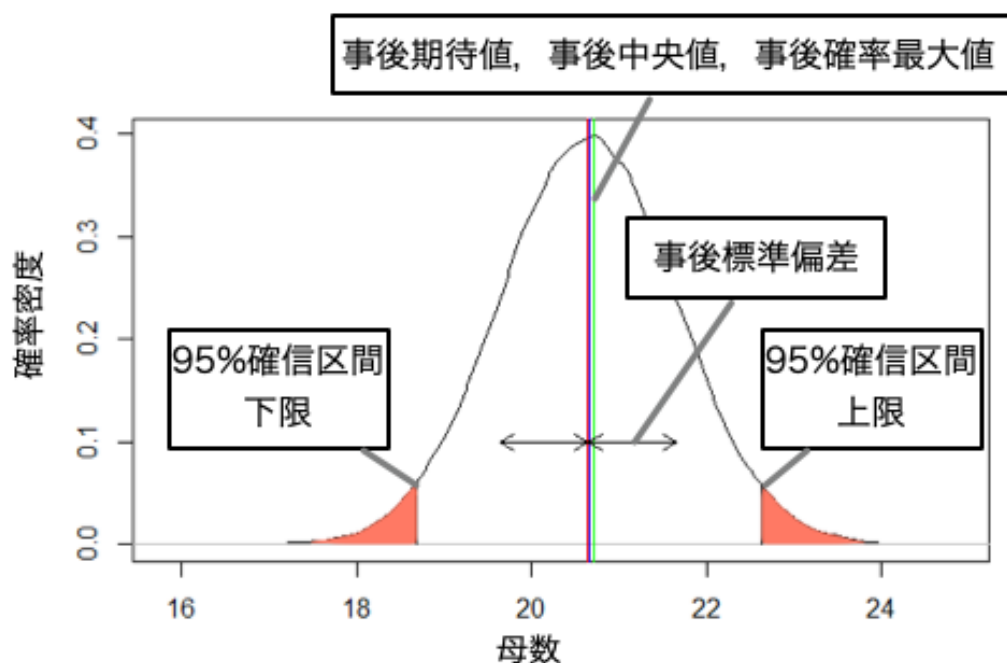


Figure1.6.1. 母数の事後分布とその評価に用いる指標の例

## 1.6.2 マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法)

以下では、MCMC 法の概要について述べた後、そのアルゴリズムの一例としてメトロポリス法について概説する。そして、MCMC 法により得た乱数列が事後分布から発生したかを評価する指標について説明する。

**MCMC 法の概要** MCMC 法は、事後分布に従う乱数を発生させる一群のアルゴリズムの総称である。まず、MCMC 法を用いて事後分布からの乱数を発生させる意義について述べる。上述のようにベイズ統計学では、事後分布の評価を通して、データに関する知見を得る。しかし、実際に分析を行う際には、母数が多次元ベクトルとなることが多く、事後分布に関する点推定値である事後期待値を求めるだけでも、事後分布の高次積分を評価する必要がある。このような高次積分を解析的あるいは数値的に評価することは一般的に難しい。そこで、MCMC 法により事後分布に従う乱数を発生させる。そして発生させた乱数が十分に事後分布を近似しているとき、その乱数を用いることで事後分布を評価する。次に、MCMC 法で得られる乱数列に関する用語など基本的な事柄について述べる。

MCMC 法では、第 1 期から第  $M$  期までの乱数列を発生させる。また、この乱数列は、第  $t$  期で発生させた乱数をもとに、次の第  $t+1$  期の乱数を生成し、その値を更新していくことで得られる。このような乱数列のことをチェーンと呼び、複数の乱数列を用いた場合に、発生させた乱数列の本数をチェーン数という。また、発生させた乱数を MCMC 標本と呼ぶ。Figure1.6.2 に MCMC 法により得た乱数列の一例を折れ線グラフで示した。このような折れ線グラフのことをトレースプロットと呼ぶ。第  $M$  期までを表しており、縦軸は第  $t$  期において発生させた乱数の値である。ここではチェーン数を 3 とし、各乱数列で第 1,000 期まで乱数を発生させた。乱数列の最初から  $B$  期間までの乱数は、初期値への依存が大きいため、事後分布の性質を調べる際には利用しない。この利用しない期間をバーンイン期間あるいはウォームアップ期間という。Figure1.6.2 では、ウォームアップ期間を 100 期間までとし、この期間を灰色の背景で示した。ウォームアップ期間後の乱数は事後分布から発生したものとする。ウォームアップ期間後の乱数のヒストグラムを Figure1.6.3 に示す。つまり、Figure1.6.3 が、MCMC 法を実施して推定された事後分布である。ここまでで MCMC 法に関する概要を述べた。次は MCMC 法の具体的なアルゴリズムの一例としてメトロポリス法を紹介する。



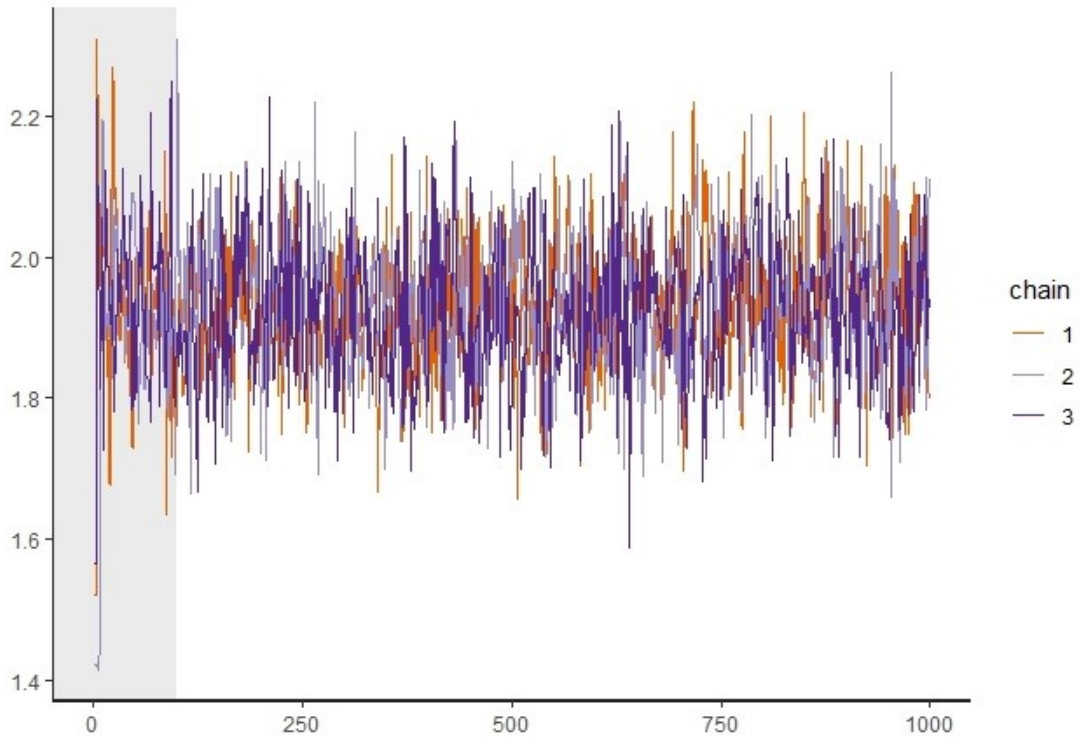


Figure1.6.2. トレースプロットの例

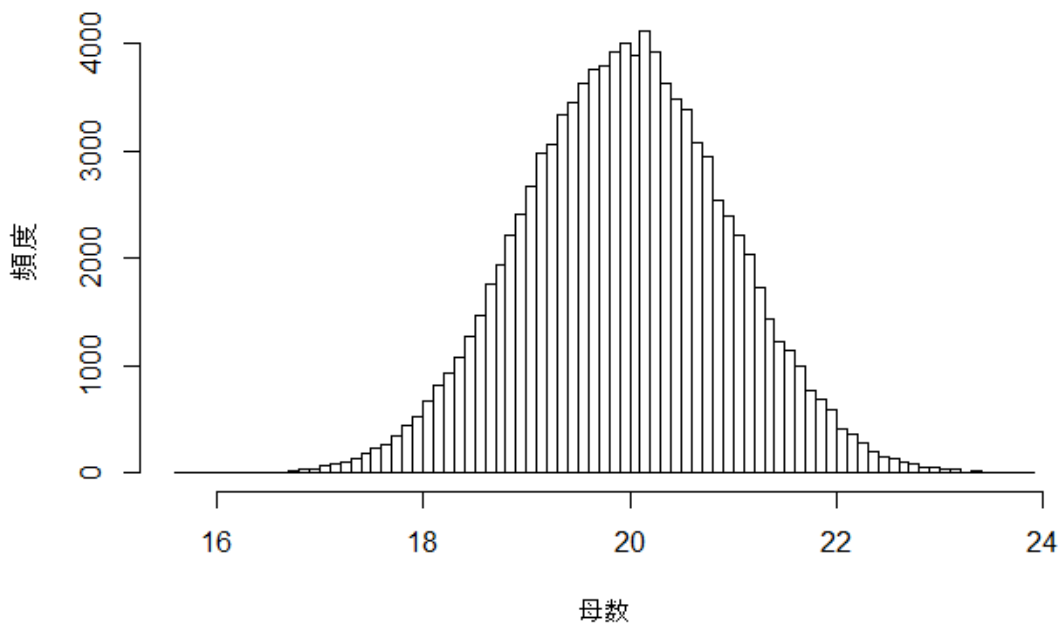


Figure1.6.3. MCMC 法で得られた乱数のヒストグラムの例

**メトロポリス法** ここではMCMC法のアルゴリズムの一例としてメトロポリス法について久保（2012）をもとに紹介する。メトロポリス法の手順を Table1.6.1 に示す。最尤推定法に代表されるように伝統的な統計学では、母数はある一点の真値を持つ定数であると想定されている。このため、最尤推定法のように尤度が最も大きくなるような母数の特定の値を見つけることが目的になる。一方で、上述のようにベイズ統計学では母数を確率変数とみなし、その確率分布つまり事後分布を考える。メトロポリス法では、最尤推定法のように母数の特定の値を推定するのではなく、母数の確率分布から乱数を発生させることで事後分布を推定することを目的としている。このため、手順 4 のように尤度が小さい方にも母数  $q$  を変化させる場合がある。Table1.6.1 で示したアルゴリズムは、第  $t$  期の中で前の状態である母数  $q$  に基づいて新しい状態  $q^{\text{新}}$  を作り出すことを表しており、これをマルコフ連鎖という。また、乱数を利用した計算アルゴリズムをモンテカルロ法という。このため、Table1.6.1 のアルゴリズムは MCMC 法と呼ばれる。

Table1.6.1

メトロポリス法の手順

手順	処理内容
1	母数 $q$ の初期値を選ぶ。
2	$q$ を増やすか減らすかをランダムに決める（ここで新しく選んだ $q$ の値を $q^{\text{新}}$ とおく）。
3	$q^{\text{新}}$ において尤度が大きくなるなら $q$ の値を $q^{\text{新}}$ に変更し、手順 5 へ進む。 $q^{\text{新}}$ で尤度が小さくなるなら、手順 4 へ進む。
4	確率 $r$ で $q$ の値を $q^{\text{新}}$ に変更する。なお、確率 $r$ は尤度比 $\frac{L(q^{\text{新}})}{L(q)}$ に等しいとする。
5	手順 2 へ戻る。

**MCMC 法により得た乱数列が事後分布から発生したかを評価する指標** 上述のメトロポリス法のように MCMC 法を用いる目的は、事後分布からの乱数を得ることであった。そこで、MCMC 法による標本が、事後分布から発生した乱数であるかを評価する指標が必要となる。以下では視覚的な評価と数値的評価の二つについて説明する。

Figure1.6.2 に示したようなトレースプロットは、次の二つの観点から、事後分布から乱数が発生しているかを視覚的に評価するのに用いられる。一つ目は、乱数列が一定の範囲で変動しており、登ったり降ったりといった形状が認められない状態が観察されることであ

る。二つ目は、どの乱数列も重なりあい、互いに区別がつかない状態が観察されることである。

乱数が事後分布から発生しているかを視覚的に評価する方法として、トレースプロットを紹介した。このような乱数列の視覚的評価だけではなく、数値的評価の指標として、収束判定指標 $\hat{R}$ と有効標本数 $n_{eff}$ がある。有効標本数 $n_{eff}$ は、生成された乱数が理想的に無関係である乱数の何個分に相当するかの推定値である。収束判定指標 $\hat{R}$ は、乱数列間と乱数列内の散らばりを比較する指標であり、 $\hat{R}$ が 1.1 あるいは 1.2 以下であればよいとされている。本論文では、収束判定指標 $\hat{R}$ が 1.1 以下であった場合に、MCMC 法による乱数列が事後分布に収束したと判断した。

### 1.6.3 モデル評価と選択における WAIC の意味

ある現象を説明するモデルの候補がいくつか存在する場合には、そのなかで最も「良い」モデルを選択する必要がある。つまり、このモデルの「良さ」について基準を定め、基準に照らして候補のモデルを評価することになる。モデルの「良さ」に関する基準として、一つには、現在手元にあるデータに対する、あてはまりの良さが考えられる。しかし、この「あてはまりの良さ」の基準では、モデルが複雑なほど、つまり母数が多いモデルほど、あてはまりが良くなるという問題点がある。このような性質は、手元にあるデータを記述することに重点をおき、将来得られるであろう新しいデータを記述する能力が低下することを意味しており、過学習あるいは過剰適合 (overfitting) と呼ばれる。モデルを作る場合には、ある一回限りの現象を完璧に記述することよりも、記述できない部分があるにしても、再度、同様の現象が起きたときにも記述できることを目的とすることが多い。このため、予測の良さを「モデルの良さ」とする基準が求められる。このような要請に応える基準の一つとして、情報量基準がある。情報量基準に基づいた指標はいくつか考案されているが、本論文では WAIC を用いる。以降では WAIC が Akaike (1973) による赤池情報量基準 (Akaike information criterion: AIC) よりも広い範囲で適用できるようにした情報量基準であるため、AIC と WAIC について豊田 (2017) に基づき説明する。

**AIC の説明** AIC は

$$\text{AIC} = -2 \log L_{\max}(\mathbf{x}|\hat{\theta}) + 2p \quad (1.6.5)$$

と表される。ここで、 $L_{\max}(\mathbf{x}|\hat{\theta})$ はデータ $\mathbf{x}$ に関する候補モデルにおける母数の尤度が最大となるような最大対数尤度、 $p$ は未制約母数の数を表している。AIC は予測的知見から良いモデルを示す指標である。候補のモデルのうち、AIC が最も小さいモデルが、相対的に予測精度が最も高いモデルであると判断する。 $p$ は期待平均対数尤度に対する最大対数尤度のバイアスを補正する項である。また、 $p$ は未制約母数の数を表していることから最大対数尤

度が同じであれば母数の数が少ないモデルの方が AIC は小さくなり、よいモデルと判断される。このことは、上述のように母数の数が多いモデルは現在、手元にあるデータをよりよく記述できるようになる一方で、予測精度は下がることと対応している。ただし、AIC が適用できる場面は、真の分布が候補のモデルによって実現可能であり、かつ尤度関数（あるいは事後分布）が正規分布で近似可能である場合に限定されている。WAIC はここで挙げた AIC の適用可能な場面以外にも用いることができる。

**WAIC の説明** WAIC は Watanabe (2010) により提案されたベイジアンモデルにおいて用いられる情報量基準である。WAIC は以下のように

$$lppd = \sum_{i=1}^N \log \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(x_i | \theta^{(t)}) \right\} \quad (1.6.3)$$

$$p_{WAIC} = \sum_{i=1}^N V_i [\log f(x_i | \theta^{(t)})] \quad (1.6.4)$$

$$WAIC = lppd - p_{WAIC} \quad (1.6.5)$$

$$WAIC = -2(lppd - p_{WAIC}) \quad (1.6.6)$$

と表される。ここで、 $f(x_i | \theta^{(t)})$  は候補モデル、MCMC 標本  $\theta^{(t)}$  の添字  $t = 1, \dots, T$  はウォームアップ期間を取り除いた数とし、 $x_i$  は  $i$  番目のデータとする。また、(1.6.4) 式の  $V_i$  は不偏分散を表している。 $lppd$  は対数点別予測密度と呼ばれ、候補モデルの予測精度の評価値を表す。ただし、学習データのなかに予測する対象である  $x_i$  を含むため、過剰適合が生じる。このため、過剰適合を修正する項  $p_{WAIC}$  が置かれる。修正項  $p_{WAIC}$  は有効パラメータ数と呼ばれる。(1.6.5) 式により WAIC は算出される。また、(1.6.5) 式を -2 倍した (1.6.6) 式は、AIC とスケールリングをそろえた場合である。

WAIC は AIC よりも適用範囲を広げた情報量基準であることから、将来観測されるであろうデータの予測の程度の指標である。また、WAIC の値が小さいモデルを「良いモデル」と判定する。本論文では、この WAIC を用いて、モデルの評価を行う。

## 第2章 研究1 確率加重関数の理論的な前提に関する研究

第2章の研究1では、確率加重関数の理論的な前提に関する研究として、確率加重関数を導入する上で必要な理論であるランク依存型期待効用理論を公理的アプローチから検討を行う。以下では、まず研究1の目的について、公理の検証を行った先行研究の説明を交えて述べる。次に実験の課題について説明する。そしてNakamura (1992)によるランク依存型期待効用理論の公理系について概説し、その主要な公理の検証方法を示す。最後に実験の結果とその考察を行う。

### 2.1 目的

意思決定研究において記述的アプローチで行われてきたように、公理を設定し、数学的に構築された理論が、実際の人間の行動に対応しているかを検証することは重要な研究課題である。期待効用理論には、これまで von Neumann & Morgenstern (1944, 1947)をはじめとして、いくつかの公理系が存在する(竹村, 2009)。その一つに Pfanzagl (1959) が考案した公理系があり、Cross (1965) により、この公理系の主要な公理の検証が行われた。Pfanzagl (1959) は、精神物理学的測定方法の一つである二等分法による二等分の操作が、一群の公理を満たせば、刺激の順序を保存するような実数値関数が得られ、さらに得られた実数値関数は間隔尺度であることを数学的に保証する定理を示した。ここで、二等分法とは、二つの標準刺激  $S_1, S_3$  の主観的な距離  $(|S_1 - S_3|)$  を、二分割するような刺激  $S_2$  ( $|S_1 - S_2| = |S_2 - S_3|$ ) を求める方法である(田中, 1973)。Pfanzagl (1959) の公理系の主要な公理は双対称性 (bisymmetry) と呼ばれ (Coombs, Dawes, & Tversky, 1970 小野訳 1974),

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d) \quad (2.1.1)$$

と表される。ただし、 $a, b, c, d$  は刺激、 $a \circ b$  は  $a$  と  $b$  の主観的な二等分点を表す。また、Figure 2.1.1 に(2.1.1)式の模式図を示す。双対称性は、四つの刺激  $a, b, c, d$  に関して、 $a$  と  $b$  の主観的な二等分点  $a \circ b$ 、 $c$  と  $d$  の主観的な二等分点  $c \circ d$ 、そして  $a \circ b$  と  $c \circ d$  をさらに二等分した値  $(a \circ b) \circ (c \circ d)$  と、 $a \circ c$  と  $b \circ d$  の二等分点  $(a \circ c) \circ (b \circ d)$  が等しいことを要請する公理である。

Cross (1965) は、Pfanzagl (1959) の考案した定理における公理系が意思決定行動に限ったものではなかったため、音刺激を用いて双対称性の検証実験を行った。具体的には、強度の異なる四つの音刺激を用意し ( $a, b, c, d$ )、二つの音刺激 ( $a, b$ ) を実験参加者に聞かせた後、それらの中間となる音の大きさ ( $a \circ b$ ) を調整法により作成させた。同様にして得られた二等分点  $c \circ d$ 、 $a \circ c$ 、 $b \circ d$  を用い、 $a \circ b$  と  $c \circ d$ 、 $a \circ c$  と  $b \circ d$  のそれぞれの主観的な二等分点となる音の大きさが等しいかを検討した。このような検証手順により、(2.1.1)式の双

対称性を検証し、音の大きさについては双対称性が成り立つことを示した。

Pfanzagl (1959) の公理系は、期待効用理論が成立するための一つの公理系として提出されたが、のちに Nakamura (1992) は、Pfanzagl (1959) の公理系よりも弱い条件となる公理系を考案し、その公理系がランク依存型期待効用理論の必要十分条件であることを示した。しかし、Nakamura (1992) の公理の検証はほとんど行われおらず、また Cross (1965) ではクジを用いた検証は行われていなかった。そこで、Nakamura (1992) の公理系において主要な公理に対して、クジの確率を刺激として検証を行った。なお、ランク依存型期待効用理論は、代表的な意思決定理論の一つであるプロスペクト理論の基になっている理論である。また、プロスペクト理論の参照点の位置を 0 に固定し、利得領域について検討する場合には、ランク依存型期待効用理論とプロスペクト理論は同一視できると考えられる。このため、研究 1 ではランク依存型期待効用理論を取り上げて、実際の選択行動との関係について検討するが、プロスペクト理論に関する検討であるとも考えられる。

研究 1 では、一对のクジを実験参加者に提示し、片方のクジを基準として、もう一方のクジを同じくらい好ましくなるように、調整法により作成させるという課題を用い、ランク依存型期待効用理論の主要な公理を検証することを目的とした。具体的には、Nakamura (1992) の公理系において主要な公理であるランク双対称性を Cross (1965) の検証手順を参考に検証した。また、以下に Nakamura (1992) によるランク依存型期待効用理論の公理系を示した。

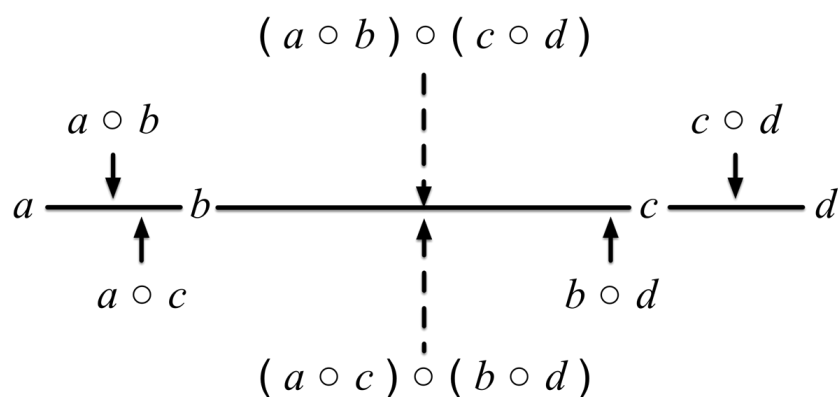


Figure2.1.1. 双対称性の模式図

**Nakamura (1992) によるランク依存型期待効用の公理系** Nakamura (1992) は Pfanzagl (1959) の双対称性よりも弱い条件となるランク双対称性を主要な公理とした公理系を提案し、不確実性下、リスク性下における非線形効用理論の公理系として提出した。以下に

Nakamura (1992) および中村 (personal communication, 2014 年 11 月) によるランク依存型期待効用理論の公理系を示す<sup>1)</sup>。なお、クジの賞金額は本実験で用いた賞金額を示した。

利得の集合を  $X=\{100,5000,10000\} \subset R$  とする。X 上のクジを

$$L(a,b) = \begin{bmatrix} a & ; & \text{¥}10,000 \\ b-a & ; & \text{¥}5,000 \\ 1-b & ; & \text{¥}100 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

により表す。ここで、 $0 \leq a \leq b \leq 1$  である。ゆえに、X 上のクジの集合は、 $R = \{(a,b) | 0 \leq a \leq b \leq 1\}$  の集合と同一視できる。R 上の選好関係を  $\leq$  とする。また、R 上の二項関係  $\circ : R \times R \rightarrow R$  を

$$L(a,b) \sim L(a \circ b, a \circ b) \quad (2.1.3)$$

と定義する。ここで、 $\sim$  は両辺のクジが同程度に好ましいことを表す。

公理系は次のように与えられる。

公理 1  $\leq$  は弱順序である

公理 2  $\leq$  は連続である

公理 3  $\{a,b\} \leq c$  ならば、 $a \leq b \Leftrightarrow a \circ c \leq b \circ c$ ;  $c \leq \{a,b\}$  ならば、 $a \leq b \Leftrightarrow c \circ a \leq c \circ b$

公理 4 (ランク双対称性)  $a < \{b,c\} < d$  ならば、 $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$

公理 5  $a \circ a = a$

公理 1-5 が成り立つとき、またそのときに限り、単位区間  $I=[0,1]$  上の厳密でない意味での単調増加で連続な関数  $\varphi$  と実数  $0 < \lambda < 1$  が一意に存在して、 $\varphi(0)=0$ 、 $\varphi(1)=1$  であり、すべての  $L(a,b)$ 、 $L(c,d)$  に対して、

$$L(a,b) \leq L(c,d) \Leftrightarrow \lambda\varphi(a)+(1-\lambda)\varphi(b) \leq \lambda\varphi(c)+(1-\lambda)\varphi(d) \quad (2.1.4)$$

が成り立つ。

本実験では、ランク双対称性 (制約  $a < \{b,c\} < d$  をもつ双対称性)

$$(a \circ b) \bullet (c \circ d) = (a \circ c) \bullet (b \circ d) \quad \text{ただし、} a < \{b,c\} < d \quad (2.1.5)$$

を検証した。(2.1.5) 式の  $\bullet$  は、 $\circ$  と同じく公理 1-5 を満たすが、 $\circ$  とは異なる R (利得の集合  $X'=\{5100,10000,15000\}$ ) 上の二項関係である。

## 2.2 方法

### 2.2.1 実験

**課題** 実験参加者には、実験画面に提示された一対のクジのうち片方のクジを基準として、もう一方のクジを同じくらい好ましくなるように作成することを求めた。またクジは、文字と円グラフを用いて提示された。実験画面の一例を Figure 2.2.1 に示す。実験画面の左側に基準とするクジを、右側に実験参加者が作成するクジを提示した。Figure 2.2.1 では、基

準のクジは

$$\text{基準のクジ} = \begin{bmatrix} 25\% & ; & \text{¥10,000} \\ 5\% & ; & \text{¥5,000} \\ 70\% & ; & \text{¥100} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

というクジを表しており，参加者が作成するクジは

$$\text{作成するクジ} = \begin{bmatrix} 26\% & ; & \text{¥10,000} \\ 0\% & ; & \text{¥5,000} \\ 74\% & ; & \text{¥100} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

というクジを表している。

基準のクジと同程度に好ましいクジを作成する際，実験参加者は，実験用 PC のトラックパッド上で二本指を上（下）方向に動かすことで，最高賞金額（最低賞金額）を得られる確率を 1%単位で上げる（下げる）ことができた。そして，クジを作成し終わった時点で，参加者が「エンターキー」を押すと，次の新しい一対のクジが提示された。

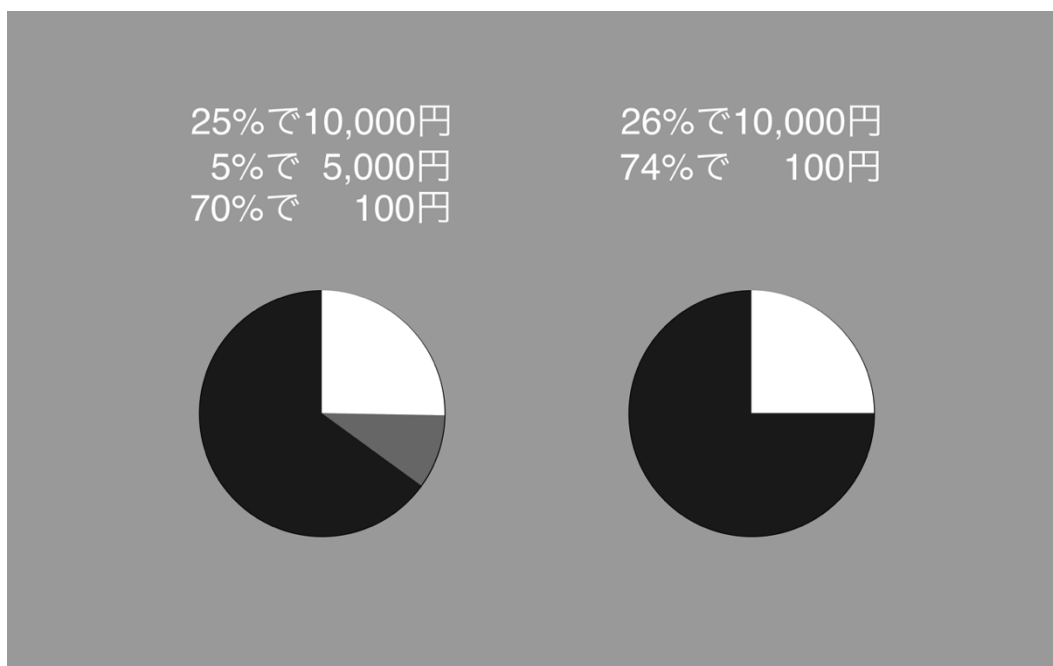


Figure2.2.1. 実験画面の一例

**手続き** 個別実験を行った。実験参加者が実験用 PC の前のイスに座った後，教示を行った。具体的には「これからあなたには『ルーレット作成ゲーム』に参加していただきます。このゲームでは，あなたにある基準となるルーレットと同じくらい好ましいルーレットを作ってください。」とした。次にゲームの流れについて，「このゲームは，あなたと対戦相手の二人一組で行われます。あなたと対戦相手には二種類のルーレットが渡されます。あなたは，ルーレット B の賞金が得られる確率を決めます。対戦相手は，あなたが確率を



決めたルーレット B と、ルーレット A のどちらを回すかを決めます。あなたは、対戦相手を選ばなかった方のルーレットを回すことになります。各プレイヤーは自身が回したルーレットの賞金を得ることができます。」と教示した。そして、ルーレット A が基準のルーレットであり、ルーレット B が作成するルーレットであることを伝え、各ルーレットに関する説明を行った。また実験参加者が基準のルーレットと同程度に好ましいルーレットを作成することを促すために、ゲームのヒントとして、「あなたが最も満足できるような結果を得るための秘訣は、二つのルーレットのどちらを回してもいいようにルーレット B の確率を決めることです。なぜならば、もしあなたが高額な賞金をより高い確率でもらいたいと考えて、ルーレット B の高い賞金を得られる確率を高くしたとします。しかし、ルーレット A とルーレット B を比較してルーレット B の方が高い賞金を得られそうであれば、対戦相手にルーレット B をとられてしまいます。そして、あなたはルーレット B よりも好ましくないルーレット A を回すことになってしまいます。逆に、ルーレット A をルーレット B よりも好ましいルーレットにしようとして、ルーレット B の高い賞金を得られる確率を低くしたとします。しかし、ルーレット A とルーレット B を比較してルーレット A の方が高い賞金が得られそうであれば、対戦相手により好ましいルーレット A をとられてしまいます。そして、あなたはルーレット A よりも好ましくないルーレット B を回すことになってしまいます。」と教示し、教示の意味が理解できたかを確認した。最後に実験画面、具体的な操作方法について説明した。その後、練習試行を行い、再度課題の遂行方法に関して簡単に教示を行った。

**刺激** 検証に用いる四つの確率  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  を 1 セットとして、10 セット作成した。検証で用いた刺激セットを Table 2.2.1 に示す。各セットは、 $b-a=d-c=5\%$ ,  $c-b=20\%$  となるように作成した。第 1 セットと第 10 セットは  $c-b=19\%$  とした。ここで、 $(b-a) = (d-c) < c-b$  としたのは、Cross (1965) においても同じように刺激を作成していたためである。また、第 1 から第 5 刺激セットまでの確率  $a$  は、1%から 20%まで 4 あるいは 5%刻み、第 6 から第 10 刺激セットまでの確率  $a$  は、50%から 70%まで 5%刻みとした。このように第 5 セットと第 6 セットの確率  $a$  について 30%のギャップがあるのは刺激セットの節約が主な理由であった。なお、研究 2 では Table 2.2.1 の刺激は確率加重関数の形状を推測するために用いており、Table 2.2.1 の刺激は確率  $a$  と  $c$  をまとめた場合には、1%から 94%まで 4%あるいは 5%刻みでギャップや重複がないように構成した。

Table 2.2.1

ランク双対称性の検証で用いた刺激

刺激のセット	$a$	$b$	$c$	$d$
1	0.01	0.06	0.25	0.30
2	0.05	0.10	0.30	0.35
3	0.10	0.15	0.35	0.40
4	0.15	0.20	0.40	0.45
5	0.20	0.25	0.45	0.50
6	0.50	0.55	0.75	0.80
7	0.55	0.60	0.80	0.85
8	0.60	0.65	0.85	0.90
9	0.65	0.70	0.90	0.95
10	0.70	0.75	0.94	0.99

**実験参加者** 大学生ならびに大学院生 29 人（男性 21 人，女性 8 人，平均年齢 22.2 歳，SD=2.9）が実験に参加した。また，後に詳述するが作成するクジでは参加者が確率を調整できる範囲は限定されていた。作成するクジを提示する際に，調整できる範囲内（Figure2.2.1 では 26～29%）で最小の確率（Figure2.2.1 では 26%）を提示する条件と，最大の確率（Figure2.2.1 では 29%）を提示する条件の二条件を用意し，実験参加者をランダムに二条件のうちのどちらかに割り振った。

実験参加者 29 人のうち，実験プログラムの不具合から 3 人，実験後の内観において教示の通りに課題を遂行できなかったと回答した 1 人を除いた 25 人（男性 17 人，女性 8 人，平均年齢 22.3 歳，SD=3.1）を分析の対象とした。また実験の所要時間は約 40 分であった。なお，実験の途中で休憩時間は設けなかった。謝礼は図書カード 500 円分であった。

## 2.2.2 ランク依存型期待効用理論の主要な公理の検証方法

(2.1.5)式のランク双対称性を検証する際には，課題において(2.1.3)式の定義より，一対のクジ

$$\text{基準のクジ} = \begin{bmatrix} a & ; & \text{¥10,000} \\ b-a & ; & \text{¥5,000} \\ 1-b & ; & \text{¥100} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a \circ b & ; & \text{¥10,000} \\ 0 & ; & \text{¥5,000} \\ 1-a \circ b & ; & \text{¥100} \end{bmatrix} = \text{作成するクジ} \quad (2.2.3)$$

を実験参加者に提示し，基準のクジと同程度に好ましいクジを作成させることで，二つの標準刺激  $a$ （基準のクジの最高額を得られる確率）と  $b$ （二番目に高い金額以上を得られる

確率) に対する主観的な二等分点  $a \circ b$  (作成させたクジの最高額を得られる確率) を判断させた。(2.2.3)式の模式図を Figure2.2.2 に示す。また, 二等分点  $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$  あるいは,  $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$  を求める場合には, (2.2.3)式の一対のクジの賞金額に 5,000 円を加えた一対のクジを用いた。

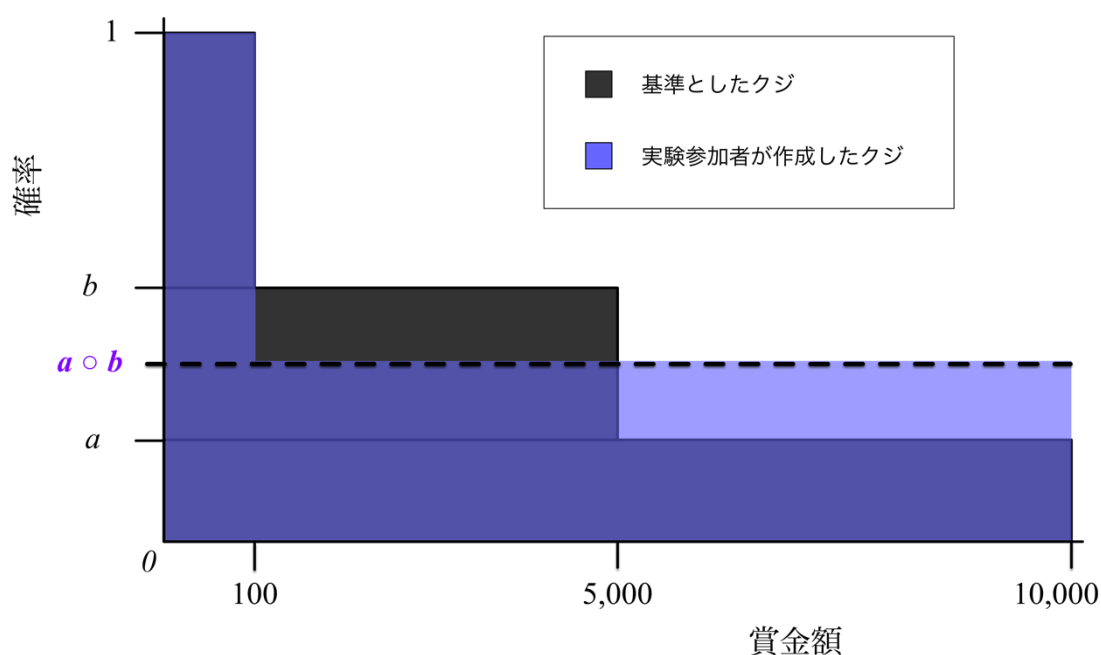


Figure2.2.2. (2.2.3)式の模式図

ランク双対称性の検証手順は, 六つのステップにより構成された。ランク双対称性の検証手順を刺激例とともに Table 2.2.2 に示す ( $a=5\%$ ,  $b=10\%$ ,  $c=30\%$ ,  $d=35\%$ の場合)。Table 2.2.2 では各ステップで提示した一対のクジ (基準のクジと作成させたクジ) と, 判断させた二等分点を示した。ステップ 1 から 3 では, (2.1.5)式の左辺の二等分点  $a \circ b$ ,  $c \circ d$ ,  $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$  を判断させた。つづいてステップ 4 から 6 では右辺の二等分点  $a \circ c$ ,  $b \circ d$ ,  $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$  を判断させた。また, ステップ 1, 2, 4, 5 では(2.2.3)式に示したように, 基準のクジと同程度に好ましくなるように賞金額 10,000 円を得られる確率を判断させた。また賞金額は, 基準のクジでは 10,000 円, 5,000 円, 100 円を, 実験参加者が確率を調整するクジでは, 10,000 円, 100 円を用いた。

ステップ 3 と 6 では, ステップ 1, 2, 4, 5 で用いた賞金に 5,000 円を足した一対のクジを用いた。すなわち, ステップ 3 では

$$\begin{aligned} \text{基準のクジ3} &= \begin{bmatrix} a \circ b & ; & \text{¥15,000} \\ c \circ d - a \circ b & ; & \text{¥10,000} \\ 1 - c \circ d & ; & \text{¥5,100} \end{bmatrix} \sim \\ & \begin{bmatrix} (a \circ b) \bullet (c \circ d) & ; & \text{¥15,000} \\ 0 & ; & \text{¥10,000} \\ 1 - (a \circ b) \bullet (c \circ d) & ; & \text{¥5,100} \end{bmatrix} = \text{作成するクジ3} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

となるような二等分点 $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$ を実験参加者に判断させた。また、ステップ 6 では

$$\begin{aligned} \text{基準のクジ6} &= \begin{bmatrix} a \circ c & ; & \text{¥15,000} \\ b \circ d - a \circ c & ; & \text{¥10,000} \\ 1 - b \circ d & ; & \text{¥5,100} \end{bmatrix} \sim \\ & \begin{bmatrix} (a \circ c) \bullet (b \circ d) & ; & \text{¥15,000} \\ 0 & ; & \text{¥10,000} \\ 1 - (a \circ c) \bullet (b \circ d) & ; & \text{¥5,100} \end{bmatrix} = \text{作成するクジ6} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

となるような二等分点 $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$ を判断させた。そして、ステップ 3 とステップ 6 で判断させた二等分点 $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$ と $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$ が等しいかを検討することでランク双対称性の検証を行った。

また、課題では、基準のクジと同程度に好ましいクジを作成するように求めていたことから、作成するクジが基準のクジよりも明らかに好ましい（好ましくない）とならない範囲内で、参加者は確率を調整することができた。さらに、ステップ 5 では、ステップ 4 で二等分点とした確率 $(a \circ c)$ よりも低い確率を二等分点 $(b \circ d)$ とすると、ステップ 6 の基準のクジの確率が負になることから、ステップ 4 の二等分点 $(a \circ c)$ 以下の確率を、ステップ 5 では二等分点 $(b \circ d)$ とできないようにした。Table 2.2.2 の場合であれば、ステップ 4 の $a \circ c$ は 12%なので、ステップ 5 では 13~24%の範囲で調整させた。

このように 6 ステップで構成された検証手順を用いて、四つで 1 セットの確率 $(a, b, c, d)$ を 10 セット用意し、ランク双対称性を検証した。また、信頼性について検討をするために、10 セットのうち 1 セットを、実験参加者ごとにランダムに選び、同じセットを 2 回提示した。したがって、実験では検証手順を合計 11 回繰り返した。刺激セットの提示順序は実験参加者間でランダムとしたが、信頼性のための刺激セットは連続して提示されないようにしていた。

Table 2.2.2

## ランク双対称性の検証の手順

ステップ	提示した一対のクジ	二等分点 [調整可能な範囲]
1	基準 $\begin{bmatrix} a & ; & ¥10,000 \\ b-a & ; & ¥5,000 \\ 1-b & ; & ¥100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & ; & ¥10,000 \\ 0.05 & ; & ¥5,000 \\ 0.90 & ; & ¥100 \end{bmatrix}$	0.07
	作成 $\begin{bmatrix} a \circ b & ; & ¥10,000 \\ 0 & ; & ¥5,000 \\ 1-a \circ b & ; & ¥100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.07} & ; & ¥10,000 \\ 0 & ; & ¥5,000 \\ 0.93 & ; & ¥100 \end{bmatrix}$	[0.06, 0.09]
2	基準 $\begin{bmatrix} c & ; & ¥10,000 \\ d-c & ; & ¥5,000 \\ 1-d & ; & ¥100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30 & ; & ¥10,000 \\ 0.05 & ; & ¥5,000 \\ 0.65 & ; & ¥100 \end{bmatrix}$	0.33
	作成 $\begin{bmatrix} c \circ d & ; & ¥10,000 \\ 0 & ; & ¥5,000 \\ 1-c \circ d & ; & ¥100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.33} & ; & ¥10,000 \\ 0 & ; & ¥5,000 \\ 0.67 & ; & ¥100 \end{bmatrix}$	[0.31, 0.34]
3	基準 $\begin{bmatrix} a \circ b & ; & ¥15,000 \\ c \circ d - a \circ b & ; & ¥10,000 \\ 1 - c \circ d & ; & ¥5,100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 & ; & ¥15,000 \\ 0.26 & ; & ¥10,000 \\ 0.67 & ; & ¥5,100 \end{bmatrix}$	<b>0.15</b>
	作成 $\begin{bmatrix} (a \circ b) \bullet (c \circ d) & ; & ¥15,000 \\ 0 & ; & ¥10,000 \\ 1 - (a \circ b) \bullet (c \circ d) & ; & ¥5,100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.15} & ; & ¥15,000 \\ 0 & ; & ¥10,000 \\ 0.85 & ; & ¥5,100 \end{bmatrix}$	[0.08, 0.25]
4	基準 $\begin{bmatrix} a & ; & ¥10,000 \\ c-a & ; & ¥5,000 \\ 1-c & ; & ¥100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & ; & ¥10,000 \\ 0.25 & ; & ¥5,000 \\ 0.70 & ; & ¥100 \end{bmatrix}$	0.12
	作成 $\begin{bmatrix} a \circ c & ; & ¥10,000 \\ 0 & ; & ¥5,000 \\ 1-a \circ c & ; & ¥100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.12} & ; & ¥10,000 \\ 0 & ; & ¥5,000 \\ 0.88 & ; & ¥100 \end{bmatrix}$	[0.06, 0.24]
5	基準 $\begin{bmatrix} b & ; & ¥10,000 \\ d-b & ; & ¥5,000 \\ 1-d & ; & ¥100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10 & ; & ¥10,000 \\ 0.25 & ; & ¥5,000 \\ 0.65 & ; & ¥100 \end{bmatrix}$	0.17
	作成 $\begin{bmatrix} b \circ d & ; & ¥10,000 \\ 0 & ; & ¥5,000 \\ 1-b \circ d & ; & ¥100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.17} & ; & ¥10,000 \\ 0 & ; & ¥5,000 \\ 0.83 & ; & ¥100 \end{bmatrix}$	[0.13, 0.24]
6	基準 $\begin{bmatrix} a \circ c & ; & ¥15,000 \\ b \circ d - a \circ c & ; & ¥10,000 \\ 1 - b \circ d & ; & ¥5,100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 & ; & ¥15,000 \\ 0.17 & ; & ¥10,000 \\ 0.71 & ; & ¥5,100 \end{bmatrix}$	<b>0.15</b>
	作成 $\begin{bmatrix} (a \circ c) \bullet (b \circ d) & ; & ¥15,000 \\ 0 & ; & ¥10,000 \\ 1 - (a \circ c) \bullet (b \circ d) & ; & ¥5,100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.15} & ; & ¥15,000 \\ 0 & ; & ¥10,000 \\ 0.85 & ; & ¥5,100 \end{bmatrix}$	[0.13, 0.16]

## 2.3 ランク双対称性の検証結果と考察

### 2.3.1 信頼性

信頼性を検討するため、同じ刺激セットに対する判断の傾向がどの程度異なっていたかを調べた。具体的には、一度目と二度目の二等分点の差をとり、その差の絶対値を、各ステップにおいて取り得る誤差の最大値（22～26%）で割った時に、0.5以上の値があるかを調べた。ただし、ステップ1, 2の誤差の最大値は3%と小さいため、検討の対象から除いた。この基準に該当する実験参加者はいなかったことから、信頼性は低くなかったと考えられる。また0.4以上の値が一つあった参加者は25名中3名であった。

### 2.3.2 ランク双対称性の検証結果

**個人に関する検証結果** 各実験参加者が、ランク双対称性 $(a \circ b) \bullet (c \circ d) = (a \circ c) \bullet (b \circ d)$ に関する判断を、どの程度、いくつの刺激セットで行っていたかをまとめた結果をFigure2.3.1に示す。Figure2.3.1では、ステップ3における $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$ の値と、ステップ6における $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$ の値がどの程度離れていたかを表すために、横軸に閾値 $c$ を配した。縦軸にはステップ3と6の差の絶対値が閾値 $c$ 以下となる人数を配した。また、黒い破線により、25名の過半数となる13名の位置を示した。色の付いた折れ線については、たとえば、「刺激セット数5以上」と凡例をつけた線であれば、5個以上の刺激セットで、ステップ3と6の差の絶対値が、閾値 $c$ 以下となる人数を表している。つまり、「刺激セット数5以上」の折れ線と黒い破線の交点座標は(2, 13)であることから、ステップ3と6の差の絶対値が2以下であるような判断を、5個以上の刺激セットで行った人数は13名であったことが示された。また、「刺激セット数10」の折れ線と黒い破線の交点座標が(8, 13)であることから、すべての刺激セットでステップ3と6の差の絶対値が8以下となる人数は13名であった。

上述のように、Figure2.3.1の黒い破線と各折れ線の交点から、いくつ以上の刺激セットで、ステップ3と6の差の絶対値がいくつ以下のとき、これらを満たす人数が過半数の13名を超えるかが示される。この結果をまとめると、5個以上の刺激セットでは差の絶対値が2以下、6個以上は差の絶対値が3以下、7個以上は差の絶対値が4以下、8個あるいは9個以上は差の絶対値が5以下、10個すべての刺激では差の絶対値が8以下であれば、これらの基準を、実験参加者の半数より多くが満たすことが示された。つまり、10個のうちの半数以上の刺激セットとなる6個以上の刺激セットで、ステップ3と6の差の絶対値が3以下となるような判断を、実験参加者の半数以上が行っていたことが示された。

ここでは、個人について、ステップ3と6でどの程度離れた刺激セットが何個あるかを

示した。次にランク双対称性を満たすような判断が行われていたかを示すために、個人ごとではなくグループレベルの検証結果を示す。

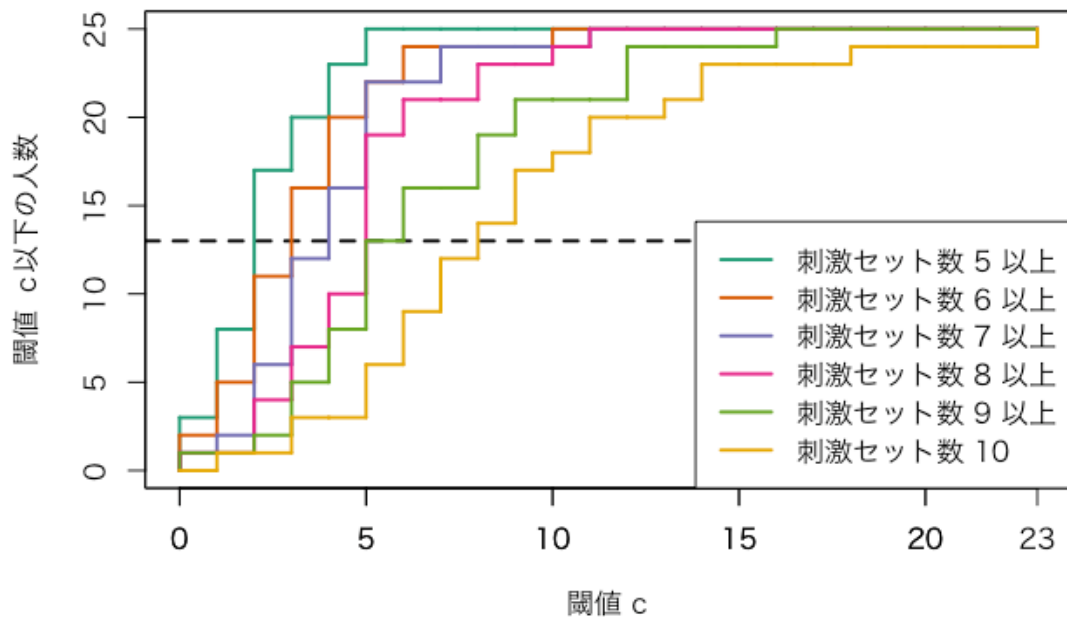


Figure 2.3.1 ステップ 3 と 6 の差の絶対値が閾値  $c$  以下となる刺激セットの数と人数に関する累積折れ線グラフ

**グループレベルの検証結果** ランク双対称性を検証するために、10 種類の刺激セット ( $a < \{b, c\} < d$ ) を用いて、 $(aob) \bullet (cod) = (aoc) \bullet (bod)$  を満たす判断を実験参加者が行っていたかを調べた。具体的には下記のモデルを想定して、R のパッケージ `brms` を用いてマルコフ連鎖モンテカルロ法によるベイズ推定を行った。実行時の設定を示した R のコードは付録 A.1 に示した。

$$y_{jkl} = \mu_{11} + a_j + b_k + \gamma_l + (ab)_{jk} + (a\gamma)_{jl} + (b\gamma)_{kl} + e_{jkl} \quad (2.3.1)$$

$$e_{jkl} \sim N(0, \sigma_e) \quad (2.3.2)$$

$$\gamma_l \sim N(0, \sigma_\gamma) \quad (2.3.3)$$

$$(a\gamma)_{jl} \sim N(0, \sigma_{a\gamma}) \quad (2.3.4)$$

$$(b\gamma)_{kl} \sim N(0, \sigma_{b\gamma}) \quad (2.3.5)$$

$$0 = a_1 = b_1 = (ab)_{1k} = (ab)_{j1} \quad (2.3.6)$$

このモデルでは、第 1 刺激セットにおける  $(aob) \bullet (cod)$  の効果 (ステップ 3 の効果) を切

片 $\mu_{11}$ とし、この切片を基準として比較したときの、ステップ 3 ( $a_1$ ) あるいはステップ 6 ( $a_2$ )、第  $k$  番目の刺激セット ( $b_k$ )、ステップ 3 あるいは 6 と第  $k$  刺激セットの交互作用 ( $(ab)_{jk}$ )、第  $l$  番目の実験参加者 ( $\gamma_l$ )、第  $l$  番目の実験参加者とステップ 3 あるいは 6 の交互作用 ( $(a\gamma)_{jl}$ )、第  $l$  番目の実験参加者と第  $k$  刺激セットの交互作用 ( $(b\gamma)_{kl}$ ) の各効果を表している。なお、ステップ 3 と 6 ( $a_j$ )、刺激セット ( $b_k$ )、およびそれらの交互作用 ( $(ab)_{jk}$ ) を固定効果とし、実験参加者 ( $\gamma_l$ ) と実験参加者に関わる交互作用 ( $(a\gamma)_{jl}$ ,  $(b\gamma)_{kl}$ ) を変量要因とした。変量効果には平均 0、標準偏差は想定した効果によって異なり、それぞれ $\sigma_\gamma$ ,  $\sigma_{a\gamma}$ ,  $\sigma_{b\gamma}$ の正規分布を仮定した。また、 $y_{jkl}$ はステップ 3 における $(aob)\bullet(cod)$ あるいはステップ 6 における $(aoc)\bullet(bod)$ の値から、各刺激セットで取りうる最小の値 ( $a+2\%$ ) を引き、100 を掛けた値である。たとえば、第 5 刺激セットで $(aob)\bullet(cod)$ が 30%であった場合には、 $(0.30 - 0.22) \times 100 = 8$  とした。

上記のモデルに基づき、brms を用いて推定を行った。長さ 25,000 のチェーンを五つ発生させ、バーンイン期間を 5,000 とし、得られた 100,000 個の乱数を用いた。どのパラメータの収束判定指標 $\hat{R}$ も 1.1 以下であったため、事後分布に収束したと判断した。ここでは、 $(aob)\bullet(cod) = (aoc)\bullet(bod)$ を満たす判断を行っていたかを検討することが分析の目的であった。このため、各パラメータの事後分布をそのまま用いずに、各刺激セットにおけるステップ 3 の $(aob)\bullet(cod)$ とステップ 6 の $(aoc)\bullet(bod)$ の差 (ステップ 6 - ステップ 3) を求め、Table2.3.1 に示した。なお、Table2.3.1 には各セットの事後期待値、事後標準偏差、事後中央値、95%確信区間、 $(aob)\bullet(cod)$ と $(aoc)\bullet(bod)$ の差を算出する際に用いたパラメータとその演算を示した。



Table2.3.1

各刺激セットにおけるステップ3の $(aob) \bullet (cod)$ とステップ6の $(aoc) \bullet (bod)$ の差

刺激 セット	差の算出に用いた パラメータと演算	事後 期待値	事後 標準偏差	2.50%	50%	97.50%
1	$a_2$	0.837	0.948	-1.010	0.835	2.703
2	$a_2 + (ab)_{2,2}$	-0.002	0.954	-1.871	-0.0004	1.870
3	$a_2 + (ab)_{2,3}$	0.562	0.952	-1.306	0.563	2.425
4	$a_2 + (ab)_{2,4}$	-0.239	0.958	-2.120	-0.237	1.646
5	$a_2 + (ab)_{2,5}$	1.521	0.956	-0.359	1.522	3.397
6	$a_2 + (ab)_{2,6}$	0.880	0.957	-1.006	0.883	2.750
7	$a_2 + (ab)_{2,7}$	0.678	0.955	-1.193	0.680	2.547
8	$a_2 + (ab)_{2,8}$	1.600	0.947	-0.255	1.600	3.455
9	$a_2 + (ab)_{2,9}$	1.955	0.960	0.066	1.953	3.828
10	$a_2 + (ab)_{2,10}$	2.240	0.952	0.376	2.237	4.105

Table2.3.1 から、第1から第8刺激セットまでの確信区間は0を含んでいたが、第9と第10刺激セットの確信区間は0を含んでいなかった。また、ステップ3と6の差の事後期待値について、第2と第4セットを除いたセットでは正の値であった。なお、第2セットは負の値ではあるが、ほぼ0であった。

次に、ステップ3の $(aob) \bullet (cod)$ とステップ6の $(aoc) \bullet (bod)$ の差が0からどの程度離れており、またその確率を調べるために、事後分布の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線を、刺激セットごとに Figure2.3.2 から Figure2.3.11 に示す。Figure2.3.2 から Figure2.3.11 では横軸に閾値  $c$  を0~5までをとり、縦軸にステップ3の $(aob) \bullet (cod)$ とステップ6の $(aoc) \bullet (bod)$ の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率を配した。また、確率が95%の位置を太い破線で示した。Figure2.3.2 から Figure2.3.11 より、すべての刺激セットにおいて、大きくても4%の差までで95%を表す破線よりも曲線の方が上に位置していた。つまり、すべての刺激セットにおいて、ステップ3の $(aob) \bullet (cod)$ とステップ6の $(aoc) \bullet (bod)$ の差が4%未満となる確率は95%以上であることが示された。上記のことから、10個の刺激セット中8個でランク双対称性を満たすような判断がなされていた。また全刺激セットで0%から高々4%までの差が生じる確率は少なくとも95%以上であることが示された。したがって、およそ人はランク双対称性を満たすような判断を行っていることが示唆された。

また、上述のように、第9と第10刺激セットでは確信区間が0を含んでいなかった。こ

の理由について、第 9 と第 10 刺激セットと他の刺激セットの違いを列挙すれば、まず、Table2.3.1 で示したように第 9 と第 10 刺激セットは最高額をもらえる確率が 65%以上という刺激セットであった。また、Figure2.2.1 の実験画面例で示したように、クジを文字と円グラフの両方を用いて表したことから、1 点目に挙げた確率の情報だけではなく、円グラフの見え方も異なっていた。上述の 1 点目の違いは第 9 と第 10 刺激セットの刺激としての特徴であり、本質的な違いである。2 点目はクジの表示形式の問題である。ここで用いたクジは結果が三つあるいは二つで構成されており、実験参加者にとってクジをわかりやすくするために円グラフを用いた。しかし、ここで円グラフを用いたことで、本質的とは言えない円グラフの見え方による影響でうまく判断できなくなった可能性はある。このため、今後は表示形式として円グラフを用いない方法で実験を行うなど、さらなる検討が必要である。

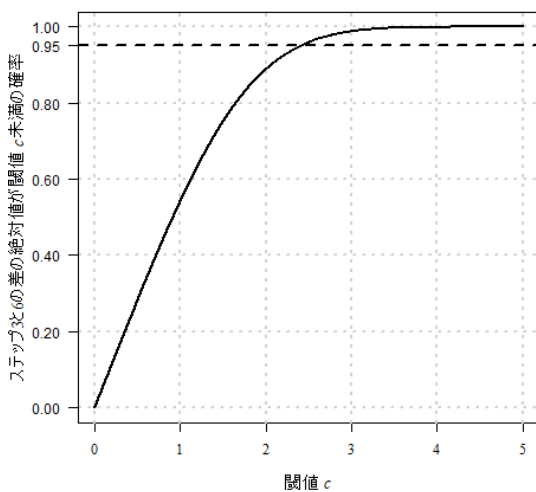


Figure2.3.2 第 1 刺激セットにおいて  $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$  と  $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

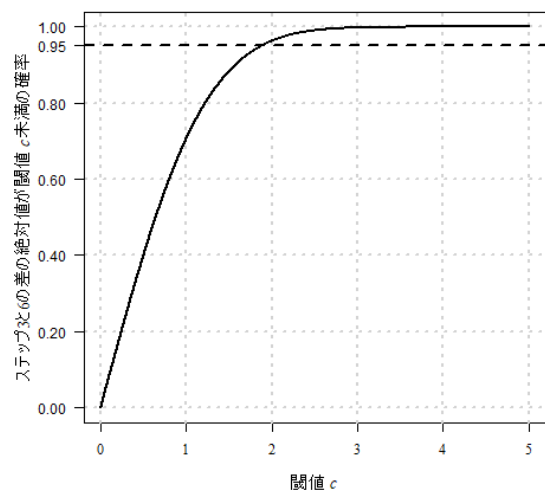


Figure2.3.3 第 2 刺激セットにおいて  $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$  と  $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

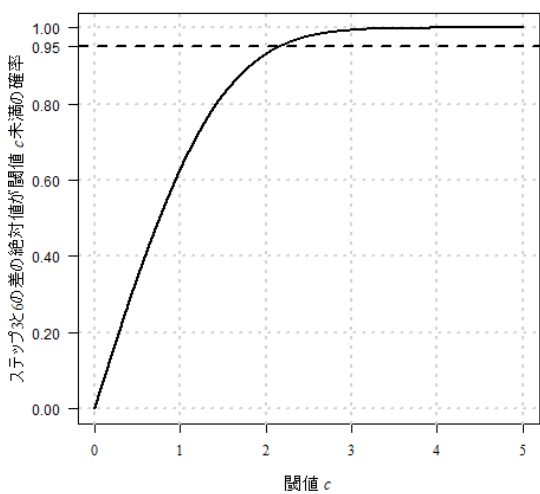


Figure2.3.4 第 3 刺激セットにおいて  $(aob) \bullet (cod)$  と  $(aoc) \bullet (bod)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

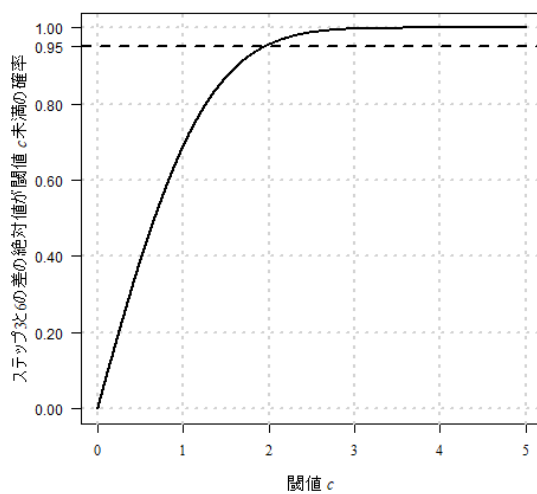


Figure2.3.5 第 4 刺激セットにおいて  $(aob) \bullet (cod)$  と  $(aoc) \bullet (bod)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

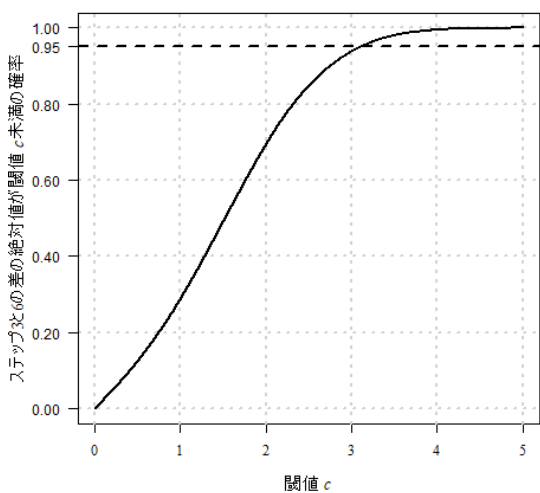


Figure2.3.6 第 5 刺激セットにおいて  $(aob) \bullet (cod)$  と  $(aoc) \bullet (bod)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

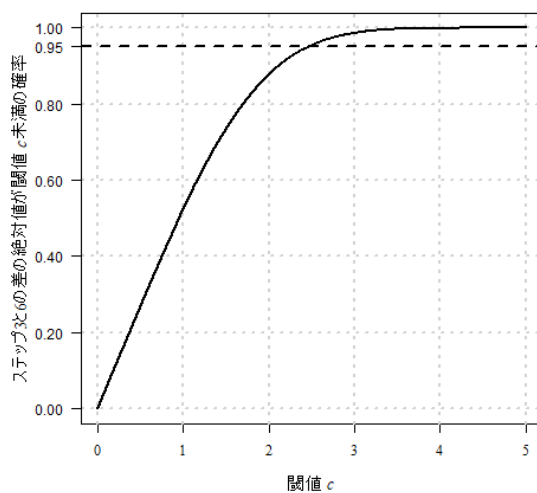


Figure2.3.7 第 6 刺激セットにおいて  $(aob) \bullet (cod)$  と  $(aoc) \bullet (bod)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

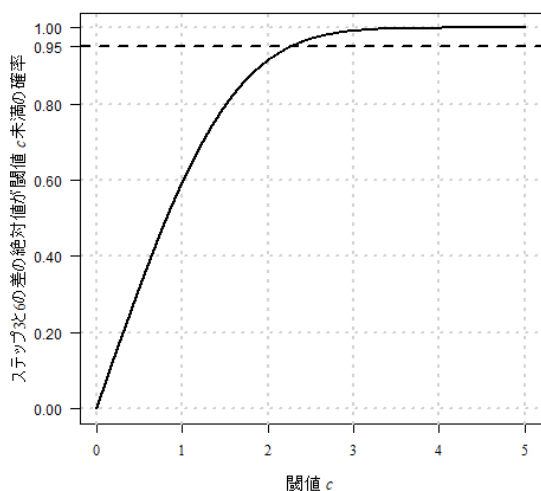


Figure2.3.8 第 7 刺激セットにおいて  $(aob) \bullet (cod)$  と  $(aoc) \bullet (bod)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

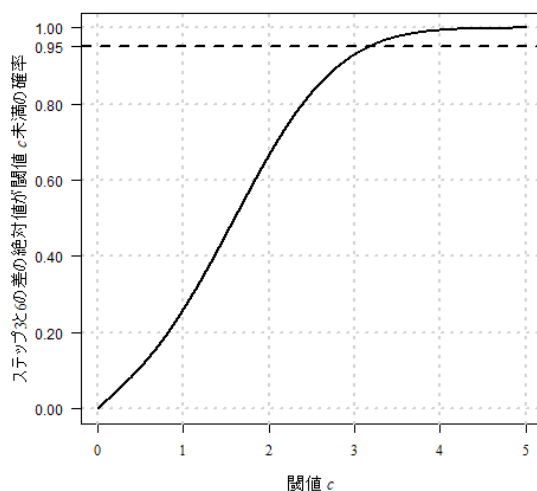


Figure2.3.9 第 8 刺激セットにおいて  $(aob) \bullet (cod)$  と  $(aoc) \bullet (bod)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

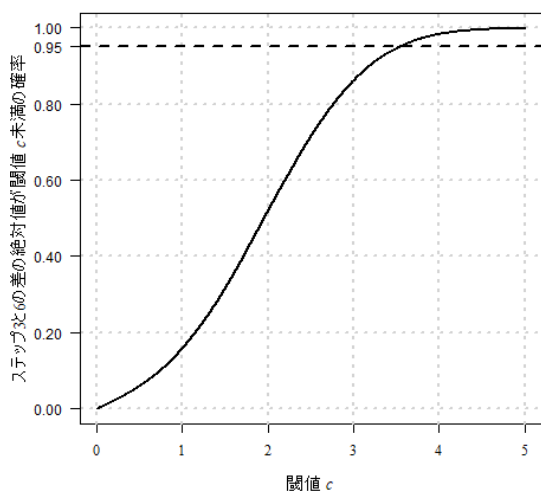


Figure2.3.10 第 9 刺激セットにおいて  $(aob) \bullet (cod)$  と  $(aoc) \bullet (bod)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

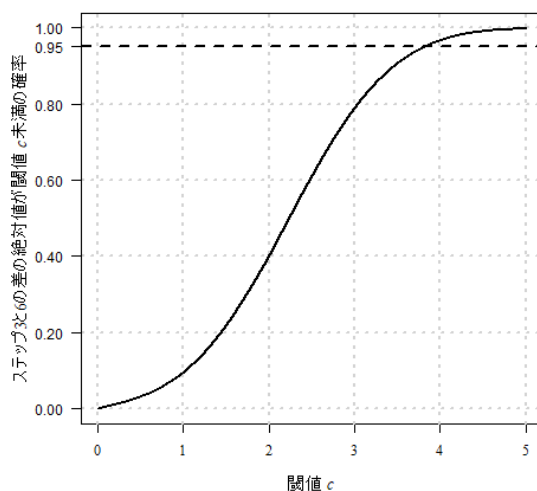


Figure2.3.11 第 10 刺激セットにおいて  $(aob) \bullet (cod)$  と  $(aoc) \bullet (bod)$  の差の絶対値が閾値  $c$  未満である確率の曲線

## 2.4 確率加重関数の理論的な前提に関する検討結果のまとめ

研究 1 では、確率加重関数の理論的な前提に関する研究として、一対のクジを用い、Nakamura (1992) によるランク依存型効用理論が存在するための必要十分となる公理系のうち主要な公理であるランク双対称性を検証する実験を行った。ランク双対称性の検証を

行った結果、10種類の刺激セットのうち8個の刺激セットでは、二等分の操作はランク双対称性を満たしていた。また $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$ と $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$ の差の絶対値は多くの場合4%未満であり、ランク双対称性は人の判断傾向とあまり矛盾しないような公理であることが示唆された。このことから、確率加重関数を導入する上で必要な理論の主要な公理は、実際の人の判断とある程度矛盾していないと考えられる。

このように、研究1では確率加重関数の理論的な前提に関する研究として、確率加重関数を導入する上で必要な理論であるランク依存型期待効用理論を公理的アプローチから検討した。研究2では、確率加重関数の経験的な前提に関する研究として、確率加重関数の形状が非線形であるかを検討する。

### 第3章 研究2 確率加重関数の経験的な前提に関する研究

第2章の研究1では、確率加重関数の理論的な前提に関する研究を行い、確率加重関数を導入した理論であるランク依存型期待効用理論の主要な公理は実際の人々の判断とある程度矛盾しないことが示唆された。ただし、ランク依存型期待効用理論は、期待効用理論を拡張した理論であり、期待効用理論で仮定されるように確率加重関数が線形つまり  $w(p) = p$  であった場合でも研究1で検証した公理を満たす。つまり、研究1の確率加重関数の理論的な前提に関する研究では、確率加重関数を導入することの意義あるいは必要性が示されるわけではない。このため、第3章の研究2では、確率加重関数の経験的な前提に関する研究として、実際に人の確率加重関数の形状が非線形であるかを検討する。

以降ではまず、第3章の研究2の目的について述べる。次に、3.2節では Wu & Gonzalez (1996, 1998) による確率加重関数の形状の推測方法について概説する。Wu & Gonzalez (1996, 1998) では三つの形状の推測方法が提案されている。3.3節では三つの推測方法のうちの一つを用いて、3.4節では残り二つの推測方法を用いて、個人およびグループレベルにおける形状を調べた。本章の最後 3.5節では、3.3節と 3.4節で得られた確率加重関数の形状についてまとめ、考察を行う。

#### 3.1 目的

研究2では、確率加重関数の経験的な前提に関する研究として、従来の研究で指摘されているように、実際に人の確率加重関数の形状が非線形であるかを検討することを目的とする。形状の推測には、Wu & Gonzalez (1996, 1998) による方法を用いた。Wu & Gonzalez (1998) では、クジの選択課題について3パターンの刺激を作成しており、各パターンについて、選択傾向から形状の凹、凸を示す三つの命題を提案した。研究2では、この三つの命題により、クジの選択傾向から確率加重関数の形状を推測した。最初に研究1のデータを用いて、命題3により個人およびグループレベルにおける確率加重関数の形状を推測した。ただし命題3による推測は確率加重関数の形状を間接的に示唆するにとどまる。一方で、命題1と2による方法では選択傾向から形状の凹、凸を直接的に推測できる。このため、3.4節では命題1と2による方法により形状の推測を行った。この際、村上・玉利・井出野・大久保・竹村 (2014) の実験データを用い、個人およびグループレベルにおける形状を調べた。

#### 3.2 Wu & Gonzalez (1996, 1998) による確率加重関数の形状の推測方法

研究2では、Wu & Gonzalez (1996, 1998) の推測方法を参考に確率加重関数の形状の推

測を行った。Wu & Gonzalez (1996, 1998) は、アレのパラドックスの課題を改良し、確率加重関数の二階差分について評価することで、その形状を推測する方法を考案した。一例を用いて彼らの推測方法について説明を行う。また以下のクジにおいて、 $R$  はリスクなクジ (Risky),  $S$  は手堅いクジ (Safe) という意味である。1 問目では、

$$R = \begin{bmatrix} 5\% & ; & \$240 \\ 0\% & ; & \$200 \\ 95\% & ; & \$0 \end{bmatrix} \text{ vs. } \begin{bmatrix} 0\% & ; & \$240 \\ 7\% & ; & \$200 \\ 93\% & ; & \$0 \end{bmatrix} = S \quad (3.2.1)$$

に対して、どちらが好ましいかを答えさせた。続いて、2 問目では、1 問目の一対のクジに \$200 をもらえる確率 (30%) を加えた一対のクジ

$$R' = \begin{bmatrix} 5\% & ; & \$240 \\ 30\% & ; & \$200 \\ 65\% & ; & \$0 \end{bmatrix} \text{ vs. } \begin{bmatrix} 0\% & ; & \$240 \\ 37\% & ; & \$200 \\ 63\% & ; & \$0 \end{bmatrix} = S' \quad (3.2.2)$$

に対して好ましい方を選択させた。同様に 3 問目も、2 問目の一対のクジに \$200 をもらえる確率 (60%) を加えた一対のクジ

$$R'' = \begin{bmatrix} 5\% & ; & \$240 \\ 90\% & ; & \$200 \\ 5\% & ; & \$0 \end{bmatrix} \text{ vs. } \begin{bmatrix} 0\% & ; & \$240 \\ 97\% & ; & \$200 \\ 3\% & ; & \$0 \end{bmatrix} = S'' \quad (3.2.3)$$

に対して、どちらが好ましいかを答えさせた。Wu & Gonzalez (1996) が 105 名に対してこれら 3 問を回答させたところ、1 問目では、38% が  $R$  を選択し ( $R < S$ ), 2 問目では 65% ( $R' > S'$ ) が  $R'$  を、3 問目は 39% ( $R'' < S''$ ) が  $R''$  を選択した。これら一対のクジに対する選好をランク依存型期待効用理論に基づいて表すと、1 問目は、

$$R < S \leftrightarrow V_{RDEU}(R) = w(5\%)u(\$240) < w(7\%)u(\$200) = V_{RDEU}(S) \quad (3.2.4)$$

であり、2 問目は、

$$\begin{aligned} R' > S' \\ \leftrightarrow V_{RDEU}(R') = w(5\%)u(\$240) + [w(5\%+30\%) - w(5\%)]u(\$200) > \\ w(7\%+30\%)u(\$200) = V_{RDEU}(S') \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

となり、3 問目は、

$$\begin{aligned} R'' < S'' \\ \leftrightarrow V_{RDEU}(R'') = w(5\%)u(\$240) + [w(5\%+30\%+60\%) - w(5\%)]u(\$200) < \\ w(7\%+30\%+60\%)u(\$200) = V_{RDEU}(S'') \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

となる。(3.2.5)式から(3.2.4)式を引くと、 $w(\cdot)$  は厳密な単調増加関数であることから、

$$[w(35\%) - w(5\%)] > [w(37\%) - w(7\%)] \quad (3.2.7)$$

$$\leftrightarrow [w(7\%) - w(5\%)] > [w(37\%) - w(35\%)] \quad (3.2.8)$$

$$\leftrightarrow [w(7\%) - w(5\%)] - [w(37\%) - w(35\%)] > 0 \quad (3.2.9)$$

である。(3.2.9)式より、二階差分の値が正であると考えられることから、確率が 5%~37% の範囲において、確率加重関数  $w(\cdot)$  の形状は下に凹であると推測できる。逆に  $R > S$ ,  $R' < S'$

であれば、 $[w(7\%) - w(5\%)] - [w(37\%) - w(35\%)]$ は負になるため、 $w(\cdot)$ の形状は下に凸であると推測できる。同様に、(3.2.6)式から(3.2.5)式を引いた場合にも、 $[w(37\%) - w(35\%)] - [w(97\%) - w(95\%)] < 0$  となり、確率が 35%~97%の範囲において、確率加重関数  $w(\cdot)$  の形状は下に凸であると推測できる。したがって、1 問目で  $R < S$ , 2 問目で  $R' > S'$ , 3 問目で  $R'' < S''$  という選択パターンの場合では、確率加重関数の形状は、逆 S 字であると考えられる。

Wu & Gonzalez (1996, 1998) は、このように確率加重関数の二階差分を評価し、確率加重関数の形状を推測する方法を一般的に命題として表した。Wu & Gonzalez (1998) では、3 種類の刺激のパターンを作成しており、各パターンについて、選択と形状の凹、凸との関係を示す命題を提案した。ここで、一対のクジの起こりうる結果は  $x, y, z$  ( $x > y > z$ ) とする。

(3.2.1)~(3.2.3)式で一例として示した一連のクジは、刺激パターン 1 に属する。刺激パターン 1 は、

$$R_1 = \begin{bmatrix} p & ; & x \\ q & ; & y \\ 1-p-q & ; & z \end{bmatrix} vs. \begin{bmatrix} p' & ; & x \\ q' & ; & y \\ 1-p'-q' & ; & z \end{bmatrix} = S_1 \quad (3.2.10)$$

(ただし、 $p > p', q < q', p+q < p'+q', p'+q'+\varepsilon \leq 1$ ) (3.2.10)式の一対のクジの結果  $z$  の確率のうち  $\varepsilon$  を、結果  $y$  の確率に加えた次の一対のクジ

$$R'_1 = \begin{bmatrix} p & ; & x \\ q+\varepsilon & ; & y \\ 1-p-(q+\varepsilon) & ; & z \end{bmatrix} vs. \begin{bmatrix} p' & ; & x \\ q'+\varepsilon & ; & y \\ 1-p'-(q'+\varepsilon) & ; & z \end{bmatrix} = S'_1 \quad (3.2.11)$$

により構成された。Wu & Gonzalez (1998) の命題 1 より、 $R'_1 > S'_1$  ( $R'_1 < S'_1$ ) とリスク志向的な (リスク回避的な) 選択をしていれば、 $p+q$  より高く、 $p'+q'+\varepsilon$  未満の範囲で、確率加重関数は、下に凹 (凸) であると推測する。

刺激パターン 2 は、 $p > p', p+q < p'+q'+\varepsilon < 1$  を満たす一対のクジ

$$R_2 = \begin{bmatrix} p & ; & x \\ q+\varepsilon & ; & y \\ 1-p-(q+\varepsilon) & ; & z \end{bmatrix} vs. \begin{bmatrix} p' & ; & x \\ q'+\varepsilon & ; & y \\ 1-p'-(q'+\varepsilon) & ; & z \end{bmatrix} = S_2 \quad (3.2.12)$$

の結果  $y$  の確率のうち  $\varepsilon$  を、結果  $x$  をもたらえる確率に加えた次の一対のクジ

$$R'_2 = \begin{bmatrix} p+\varepsilon & ; & x \\ q & ; & y \\ 1-(p+\varepsilon)-q & ; & z \end{bmatrix} vs. \begin{bmatrix} p'+\varepsilon & ; & x \\ q' & ; & y \\ 1-(p'+\varepsilon)-q' & ; & z \end{bmatrix} = S'_2 \quad (3.2.13)$$

により構成された。Wu & Gonzalez (1998) の命題 2 より、 $R'_2 < S'_2$  ( $R'_2 > S'_2$ ) とリスク志向的な (リスク回避的な) 選択をしていれば、 $p$  より高く、 $p'$  未満の範囲で、確率加重



関数は、下に凹（凸）であると推測する。

刺激パターン3は、 $p + q' < q$ を満たす一対のクジ

$$R_3 = \begin{bmatrix} p + p' & ; & x \\ q' & ; & y \\ 1 - (p + p') - q' & ; & z \end{bmatrix} \text{ vs. } \begin{bmatrix} p' & ; & x \\ q & ; & y \\ 1 - p' - q & ; & z \end{bmatrix} = S_3 \quad (3.2.14)$$

の結果  $z$  の確率のうち  $\varepsilon$  を、結果  $y$  の確率に加えた次の一対のクジ

$$R'_3 = \begin{bmatrix} p + p' + \varepsilon & ; & x \\ q' & ; & y \\ 1 - (p + p' + \varepsilon) - q' & ; & z \end{bmatrix} \text{ vs. } \begin{bmatrix} p' + \varepsilon & ; & x \\ q & ; & y \\ 1 - (p' + \varepsilon) - q & ; & z \end{bmatrix} = S'_3 \quad (3.2.15)$$

により、構成された。Wu & Gonzalez (1998) の命題3より、 $R'_3 < S'_3$ であれば、 $p + p'$ より高く、 $p + p' + q'$ 未満の範囲で、 $-w''(p)/w'(p)$ の値は減少することを示している。これまで提案された逆S字となる確率加重関数  $w(p)$ の多くでは、 $-w''(p)/w'(p)$ は減少関数であるため、 $R'_3 < S'_3$ というパターンであれば、確率加重関数の形状は逆S字である可能性があるという推測を行う。しかし、 $-w''(p)/w'(p)$ が減少関数であることと、確率加重関数の形状が逆S字であることは、論理的に独立である。このため、逆S字となる確率加重関数のあらゆるモデルが命題3を満たすわけではなく、また逆S字ではない確率加重関数のモデルも $-w''(p)/w'(p)$ の値が減少する場合もある。したがって、命題3による推測は確率加重関数の形状が逆S字である可能性があることを示すにとどまる。

Wu & Gonzalez (1998) による三つの命題の各刺激のパターンについて、選択のパターンとそれに対応する選択肢  $R$  の評価値  $U(R)$ の推移から推測される確率加重関数の形状をTable3.2.1にまとめた。最初に研究1のデータを用いて、命題3により形状を推測する。また、村上他 (2014) のデータを用いて、命題1と2による推測方法を実施する。

Table3.2.1

各刺激パターンにおける選択によって推測される確率加重関数の形状

選択のパターン	選択肢 $R$ の 評価値の推移	刺激のパターン		
		1	2	3
$R < S \rightarrow R' > S'$	$U(R) < U(R')$	凹	凸	
$R > S \rightarrow R' < S'$	$U(R) > U(R')$	凸	凹	逆S字

### 3.3 研究1のデータを用いた命題3による個人とグループレベルにおける確率加重関数の形状の推測

#### 3.3.1 確率加重関数の形状の推測方法と刺激

ランク双対称性を検証する際に判断させた二等分点  $aob$  と  $cod$  を用いて, Wu & Gonzalez (1998) の命題3を参考に確率加重関数の形状を推測した。Wu & Gonzalez (1998) の手堅いクジ ( $S$ ) とリスクなクジ ( $R$ ) を, それぞれ研究1の実験で用いた基準のクジと作成するクジに対応させ, (2.2.3)式に示した二等分点  $aob$  を判断させる際に用いた一対のクジを

$$\begin{aligned} \text{基準のクジ}(S) &= \begin{bmatrix} a & ; & \text{¥10,000} \\ 0.05 & ; & \text{¥5,000} \\ 1 - (a + 0.05) & ; & \text{¥100} \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} a + \varepsilon(a) & ; & \text{¥10,000} \\ 0 & ; & \text{¥5,000} \\ 1 - (a + \varepsilon(a)) & ; & \text{¥100} \end{bmatrix} = \text{作成するクジ}(R) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

とした。(3.3.1)式では(2.2.3)式の  $aob$  を  $a + \varepsilon(a)$  に,  $b - a$  を 0.05 に置き換えた。確率  $b - a$  は全刺激セットを通して 0.05 となるように刺激を作成していた。 $\varepsilon(a)$  は確率  $a$  の値によって変化する  $a$  の関数であり, 区間[0.01,0.04]の値をとる。 $cod$  についても(3.3.1)式と同様の対応ができることから, 以後  $aob$  と  $cod$  の区別なく(3.3.1)式の表記を用いた。

(3.3.1)式は, (3.2.14)式に示した命題3の刺激パターン3の条件  $p + q' < q$  を満たしているため ( $p = \varepsilon(a)$ ,  $q' = 0$ ,  $q = 0.05$ ), Wu & Gonzalez (1998) の命題3により確率加重関数の形状を推測した。また本課題では, Wu & Gonzalez (1998) における手堅いクジ  $S$  に対して等価となる確率を判断させたことから,  $\varepsilon(a)$  の値が増加(減少)することは, 手堅いクジ  $S$  に対する評価値  $U(S)$  が上がった(下がった)ことを示している。したがって,  $\varepsilon(a)$  の値が増加した場合には, 手堅いクジをリスクなクジよりも選択する傾向にあるとした ( $U(R) < U(R')$ )。

Wu & Gonzalez (1998) の命題3では, リスクなクジより手堅いクジが選択されていることと,  $-w''(p)/w'(p)$  が減少関数であることは同値であることが示された。そして, これまで提案されてきた確率加重関数の多くでは,  $-w''(p)/w'(p)$  が減少関数となることから, リスクなクジより手堅いクジを嗜好していれば, 確率加重関数の形状は逆 S 字である可能性が高いという推測が行われていた。

本研究では, このような Wu & Gonzalez (1998) による形状の推測方法を参考に,  $-w''(p)/w'(p)$  が定数, 増加関数, 減少関数のそれぞれの場合についても, 確率加重関数の形状を推測した。 $-w''(p)/w'(p)$  の三つの場合に対応した  $\varepsilon(a)$  の挙動と, 推測される確率加重関数の形状を Table3.3.1 に示す。

$\varepsilon(a)$  の値が増加した場合には, リスクなクジより手堅いクジを嗜好する傾向にあると考えられる。このことから,  $\varepsilon(a)$  の値が増加した場合は,  $-w''(p)/w'(p)$  の値は減少し, 逆に  $\varepsilon(a)$

の値が減少した場合は、 $-w''(p)/w'(p)$ の値は増加するとした。また、 $\epsilon(a)$ の値が一定である場合には、 $-w''(p)/w'(p)$ の値も一定であるとした。 $\epsilon(a)$ の値が一定であれば、確率加重関数は $w(p)=p$ であり、期待効用理論によって説明可能である。 $\epsilon(a)$ が減少関数であれば、確率加重関数の形状は凸関数と推測した。これは、たとえば $w(p)=p^2$ のような関数では、 $-w''(p)/w'(p)$ が増加関数となる場合が多いためである。そして、 $\epsilon(a)$ が増加関数であれば、確率加重関数の形状は凹関数あるいは逆S字とした。凹関数の例として、 $w(p)=p^{1/2}$ は $-w''(p)/w'(p)$ が減少関数となる。

Table3.3.1

$-w''(p)/w'(p)$ の各パターンにおける $\epsilon(a)$ の挙動と  
推測される確率加重関数の形状

	$-w''(p)/w'(p)$ のパターン		
	定数	増加関数	減少関数
$\epsilon(a)$ の挙動	一定	減少	増加
確率加重関数の形状	直線 $w(p)=p$	凸関数	凹関数, 逆S字

刺激  $a$  は 1%, 94%と 5~90%までで 5%刻みであり、手堅いクジとリスクなクジの一対のクジを 20 対用意した。4 種類の異なる刺激  $a < \{b, c\} < d$  は  $b-a=d-c=5\%$ とした。

### 3.3.2 確率加重関数の形状の推測結果と考察

グループレベルにおける $\epsilon(a)$ の挙動 10,000円を得られる確率  $a$  ごとに $\epsilon(a)$ の平均値と標準誤差を算出した結果を Figure3.3.1 に示す。Figure3.3.1 の横軸には確率  $a$  を、縦軸には $\epsilon(a)$ を配した。Figure3.1.1 から、 $\epsilon(a)$ の挙動は  $a$  がおよそ 1~40%のとき増加している傾向が観察された。そして、 $a$  がおよそ 40%以降では減少する傾向があった。したがって、Table3.3.1 で予想していた $\epsilon(a)$ の挙動のどれにも分類されなかった。しかし、Wu & Gonzalez (1998) で指摘されているように $-w''(p)/w'(p)$ の値が常に減少するわけではない逆S字の確率加重関数も提案されている。また、 $\epsilon(a)$ の値が一定であれば、確率加重関数は $w(p)=p$ であることから、少なくとも確率加重関数の形状は非線形である可能性はある。

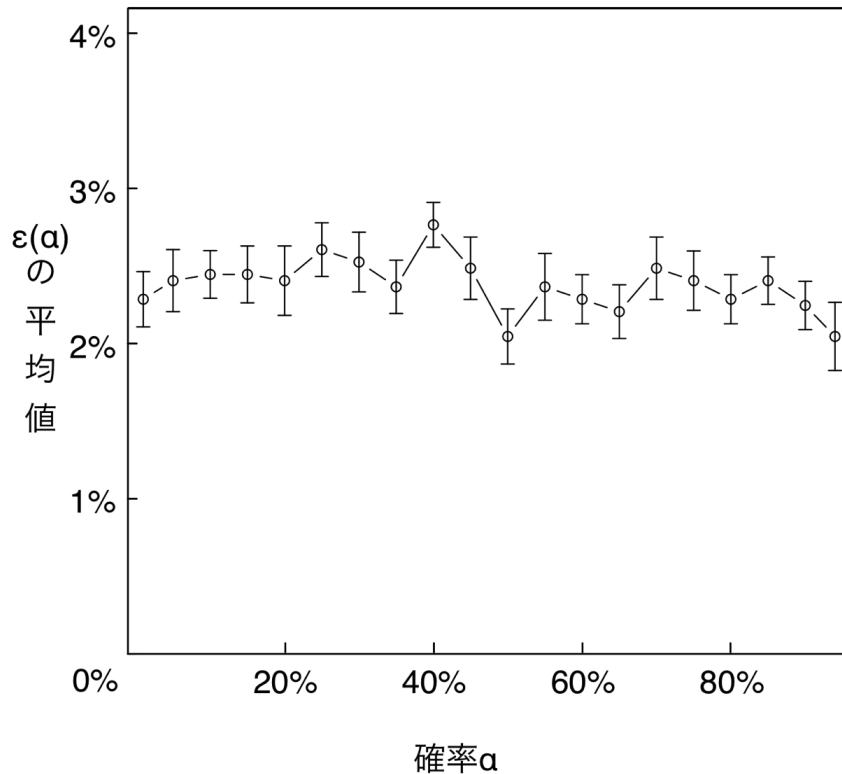


Figure 3.3.1. 確率  $\alpha$  ごとの  $\varepsilon(\alpha)$  の平均値と標準誤差

**個人データにおける  $\varepsilon(\alpha)$  の挙動** 個人のデータについても  $\varepsilon(\alpha)$  の挙動から確率加重関数の形状を推測した。個人の確率加重関数の形状を推測する際には、確率  $\alpha$  の各水準で  $\varepsilon(\alpha)$  を 1 回だけの測定であったため、確率  $\alpha$  の水準を三つの区間に分割し、第 1 区間を 1~30%、第 2 区間を 35~60%、第 3 区間を 65~95% とした。これら三つの区間それぞれで  $\varepsilon(\alpha)$  の平均値を求め、第 1 区間と第 2 区間、第 2 区間と第 3 区間のそれぞれにおける  $\varepsilon(\alpha)$  の挙動を検討した。このような簡便な方法で個人の確率加重関数の形状を推測した結果を Table3.3.2 に示した。

Table3.3.2 より、第 1 区間から第 2 区間にかけて  $\varepsilon(\alpha)$  が減少し、さらに第 2 区間から第 3 区間にかけても  $\varepsilon(\alpha)$  が減少したパターンが最も多く (25 名中の 7 名) 観察された。また、グループレベルでも観察された  $\varepsilon(\alpha)$  が増加した後に減少するパターンと、その逆の  $\varepsilon(\alpha)$  が減少した後に増加するパターンも、最も多かったパターンとほぼ同数の 6 名で観察された。次に  $\varepsilon(\alpha)$  が増加を続けるパターンは 4 名で認められた。また、 $\varepsilon(\alpha)$  が一定であるパターンは認められなかった。

このことから、個人の確率加重関数の形状は、Table3.3.1 の分類にしたがえば、増加した後に減少するパターンと減少した後に増加するパターンの分類は難しいが、下に凸であると推測されるものが最も多く、次に凹・逆 S 字と推測されるものが多かった。また  $w(p)=p$

であると推測されるものは観察されなかった。

Table3.3.2  
個人の  $\varepsilon(a)$  の挙動 ( $n=25$ )

第1区間→第2区間	第2区間→第3区間		
	増加	減少	一定
増加	4	6	0
減少	6	7	1
一定	1	0	0

### 3.4 Wu & Gonzalez (1996, 1998) の命題 1 と 2 による個人とグループレベルにおける確率加重関数の形状の推測

本節では Wu & Gonzalez (1996, 1998) を参考に、グループレベルおよび個人について確率加重関数の形状を推測する。そして、確率加重関数の形状が非線形であるかを検討する。Takemura (2004) や村上他 (2014) では、Wu & Gonzalez (1996) のクジの選択課題を用いて、主に確率加重関数のモデルのパラメータ推定およびモデルの評価が行われた。一方で、本節では村上他 (2014) の実験データを用い、3.2 節で説明した Wu & Gonzalez (1996, 1998) の命題 1 と 2 により確率加重関数の形状を推測する。以下では、まず村上他 (2014) の実験について説明を行う。そして、クジの選択課題から推測された個人とグループレベルの確率加重関数の形状を示し、考察を行う。

#### 3.4.1 方法

**実験参加者** 実験参加者は大学生 44 名 (男 22 名, 女性 22 名, 平均年齢 21.0 歳, SD=1.0) であった。また実験参加者 44 名のうち実験プログラムの不具合などによりデータが少なくとも欠損した 3 名を除き, 41 名 (男 21 名, 女性 20 名, 平均年齢 21.0 歳, SD=1.0) を分析の対象とした。実験の所要時間は約 50 分であった。下記の実験概要で示すように実験は二つのブロックで構成されたため, 第 1 ブロック終了後および, 各ブロック内でも最初の 144 試行が終わった後に実験参加者は休憩することができた。謝礼は図書カード 500 円分であった。

**実験の概要** 実験の流れを Figure3.4.1 に示した。実験課題は, 確率と結果の情報が明示された一対のクジを提示し, 好ましい方のクジを選択させるというものであった。実験は, 二つのブロックで構成され, 実験参加者は二つの条件 (利得条件・損失条件) に参加した。利得条件とは, クジを選択したことである金額を一定の確率でもらうことができる条件のことであり, 損失条件とは選択したクジによってある金額を一定の確率で失う条件のことである。

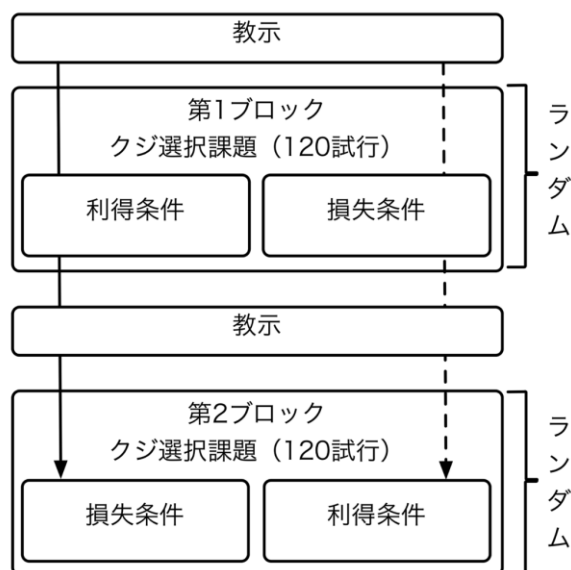


Figure3.4.1. 実験の流れ

**刺激** クジの選択課題において用いたクジの一例を Figure3.4.2 に示した。Figure3.4.2 は、

$$\begin{bmatrix} 5\% & ; & \text{¥}30,000 \\ 30\% & ; & \text{¥}15,000 \\ 65\% & ; & \text{¥}0 \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

というクジを棒グラフにより表した。棒グラフの縦軸は、(3.4.1)式のクジを選ぶことで、一定の確率でもらえる金額を表している。また、横軸には、1 から 20 までの値を配したが、一つの値が、確率 5%と対応している。実験参加者に Figure3.4.2 のように表したクジの見方を説明する際には、ひもクジを例として挙げた。たとえば、横軸の 1 から 20 までの値は 1 番から 20 番までの番号を振った 20 本のひもであり、いまはどのひもを引けばいくらもらえるかがわかる状態であるとした。なお、実際にこのひもクジからひもを引く際には番号と位置は変わるとした。Figure3.4.2 であれば 30,000 円をもらえるひもが 1 本、15,000 円をもらえるひもが 6 本、なにももらえないひもが 13 本の計 20 本のひもで構成されたひもクジであるとした。20 本のひものうち、1 本では 30,000 円もらえる、つまり 5% (1 本/20 本) の確率で 30,000 円をもらえることを表しており、同様に、20 本のうち 6 本では 15,000 円もらえることは 30% (6 本/20 本) の確率で 15,000 円をもらえることを表している。また、横軸の 3 番のひもは円が表示されているが、これはなにももらえないことを表しており、20 本のうち 13 本 (65%の確率) で何ももらえないことを示している。

Figure 3.4.3 と Figure 3.4.4 には、実験画面の例を示した。Figure3.4.3 は利得条件での一対のクジであり、Figure3.4.4 は損失条件の一対のクジである。棒グラフの縦軸はクジから生じる結果の利得または損失の量を表している。そして横軸は結果が生じる確率を表している。横軸の確率は棒 1 本が 5%と対応していた。したがって本刺激で表される棒グラフの棒の総

数は 20 本であった (5%×20 本=100%)。たとえば, Figure3.4.3 右のクジ (Figure3.4.2 と同じクジ) では 30,000 円を 5%でもらえるか, あるいは 15,000 円を 30%でもらえるクジということを表している。一方で, Figure3.4.3 左のクジは 15,000 円を 40%でもらえるクジを表している。Figure3.4.4 左のクジは 40,000 円を 5%で失うかあるいは, 10,000 円を 15%で失うクジであることを表している。

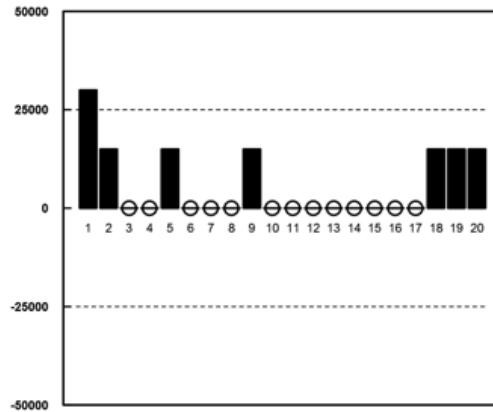


Figure3.4.2. 利得条件におけるクジの一例

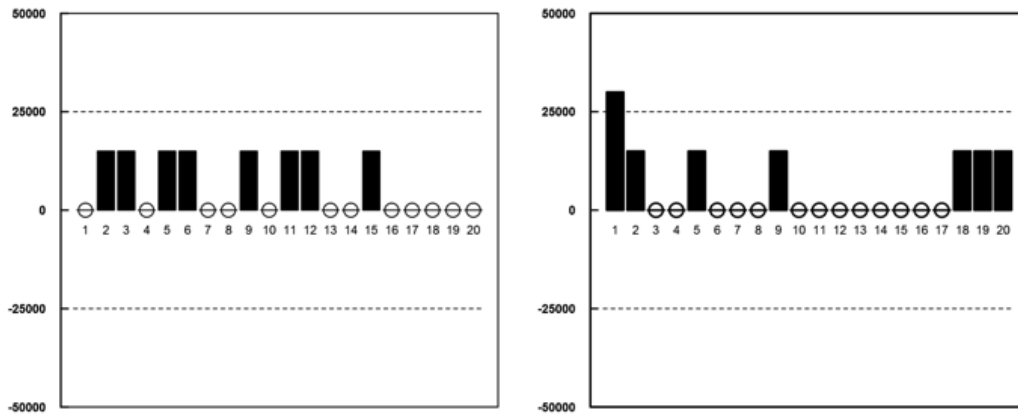


Figure3.4.3. 利得条件におけるクジの選択課題刺激例



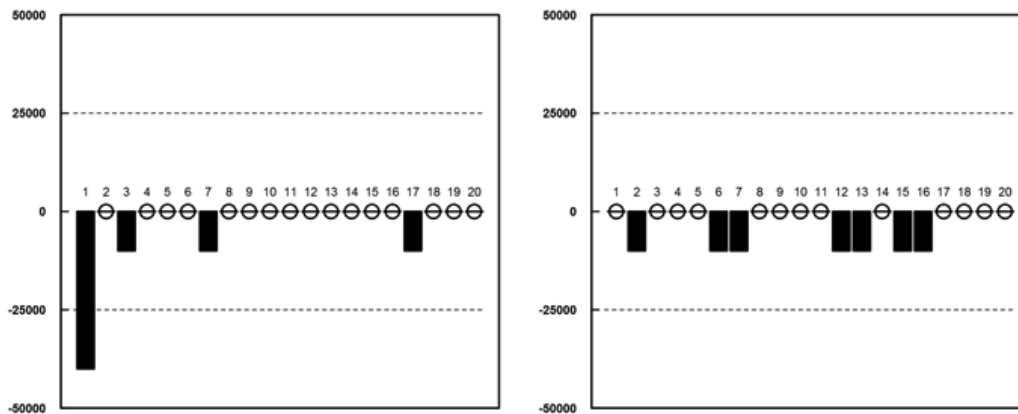


Figure3.4.4. 損失条件におけるクジの選択課題刺激例

**刺激の構成** 画面上に提示される一对のクジは、それらの相対的な関係により、リスクなクジと手堅いクジを定義していた。リスクなクジとは対に提示されるクジ（手堅いクジ）よりもある結果が生じる確率は低いが、一方でクジを選択することで生じる結果の量が多いクジのことである。逆に、手堅いクジとはリスクなクジよりもある結果の生起確率が高く、かつ生起する結果の量が少ないクジのことである。

Wu & Gonzalez (1996) を参考に、1 セットが 8 対のクジで構成されるクジのセットを六つ作成した。本研究では、Wu & Gonzalez (1996) によるクジのパターンを組み合わせることで日本円に置き換えたクジで構成された三つのセットを分析の対象とした。分析の対象としたクジのセットを Table3.4.1 に示した。各クジのセットには、基準となる一对のクジを設定していた。この基準となる一对のクジを第 1 対と呼ぶ。そして基準となる一对のクジにおいて手堅いクジの結果と等しい結果のクジを、基準となる一对のクジそれぞれに加えることによって他の第 2～第 8 対を構成した。第 8 対に近いほど、加えるクジの確率は大きくなるように設定した。Table3.4.1 では、第 1～第 3 セットを行に、第 1～第 8 対を列に配した。

例えば、第 3 セットでは第 1 対を、40,000 円が 5% で生じるクジ（リスクなクジ）と 10,000 円が 20% で生じるクジ（手堅いクジ）とした。そして、第 2 対は第 1 対の手堅いクジ（10,000 円が 20% で生じるクジ）と結果が同じクジ（10,000 円が 5% で生じるクジ）を、第 1 対のリスクなクジと手堅いクジそれぞれに加えることで作成した。したがって、第 2 対のリスクなクジは、40,000 円が 5% で生じるか、あるいは 10,000 円が 5% で生じるクジとなる。一方で手堅いクジは、10,000 円が 25% で生じるクジとなる。なお、第 3 対以降では加えるクジの結果（10,000 円）は変えず、結果が生じる確率だけを 10%, 15%, 35%, 50%, 65%, 80% と増やし、基準となる一对のクジである第 1 対にそれぞれ加えていくことで作成した。

**課題** Figure3.4.3 あるいは Figure3.4.4 で示したように、リスクなクジと手堅いクジを

横に並べて実験画面に提示し、実験参加者には提示された 1 対のクジのうちより好ましいと思う方を選択させた。1 試行は、注視点を 500 ミリ秒間提示し、その後、一対のクジが表示された選択画面を提示した。なお、クジの選択が行われるまで選択画面を提示し続けた。そして実験参加者がクジの選択を行うと空白画面を 500 ミリ秒間提示し、次試行へ移行した。

また、各実験参加者に対し全ての一対のクジを 5 回ずつ提示した。これら一対のクジの提示順序はランダムであった。そのため、分析の対象としたクジのセットの試行数は各ブロックで 120 回であり、実験全体の試行数は計 240 回であった。また、いずれの条件を先に行うかといった試行順および、クジの左右の配置に関し、カウンターバランスをとった。

各ブロックを開始時に、これから行うブロックが利得条件か損失条件であるか実験参加者に教示を行った。さらに各ブロックでは休憩を 1 回はさんだ。

Table3.4.1

クジの選択課題において用いられた 24 種類の 1 組のクジ (金額の単位は千円とした)

	第 1 対	第 2 対	第 3 対	第 4 対	第 5 対	第 6 対	第 7 対	第 8 対
<b>第 1 セット</b>								
リスクー	0.05, 30	0.05, 30	0.05, 30	0.05, 30	0.05, 30	0.05, 30	0.05, 30	0.05, 30
なクジ		0.10, 15	0.20, 15	0.30, 15	0.45, 15	0.60, 15	0.75, 15	0.90, 15
手堅い								
クジ	0.10, 15	0.20, 15	0.30, 15	0.40, 15	0.55, 15	0.70, 15	0.85, 15	1.00, 15
<b>第 2 セット</b>								
リスクー	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40
なクジ		0.10, 20	0.20, 20	0.30, 20	0.45, 20	0.60, 20	0.75, 20	0.90, 20
手堅い								
クジ	0.10, 20	0.20, 20	0.30, 20	0.40, 20	0.55, 20	0.70, 20	0.85, 20	1.00, 20
<b>第 3 セット</b>								
リスクー	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40	0.05, 40
なクジ		0.05, 10	0.10, 10	0.15, 10	0.35, 10	0.50, 10	0.65, 10	0.80, 10
手堅い								
クジ	0.20, 10	0.25, 10	0.30, 10	0.35, 10	0.55, 10	0.70, 10	0.85, 10	1.00, 10

### 3.4.2 確率加重関数の形状の推測結果と考察

**グループレベルにおける確率加重関数の形状** 各クジのセットにおいて、クジの対ごとにリスクなクジの選択率を求め、グループレベルにおける確率加重関数の形状を推測した。具体的には下記のモデルを想定して、Rのパッケージ `brms` を用いてマルコフ連鎖モンテカルロ法によるベイズ推定を行った。実行時の設定を示した R のコードは付録 A.2 に示した。

$$y_{jl} \sim \text{Binomial}(5, \theta_{jl}) \quad (3.4.1)$$

$$\theta_{jl} = \frac{1}{1 + \exp(-[\mu_1 + a_j + \gamma_l])} \quad (3.4.2)$$

$$\gamma_l \sim N(0, \sigma_\gamma) \quad (3.4.3)$$

$$0 = a_1 \quad (3.4.4)$$

このモデルでは、第  $j$  対のクジにおいて第  $l$  番目の実験参加者がリスクなクジを選択した回数 ( $y_{jl}$ ) は二項分布に従うことを仮定した。そして、リスクなクジの選択確率 ( $\theta_{jl}$ ) を表すリンク関数にはロジスティック関数を用いた。ロジスティック関数において、第 1 対における効果を切片  $\mu_1$  とし、この切片を基準として比較したときの、第  $j$  対のクジ ( $a_j$ ) と第  $l$  番目の実験参加者 ( $\gamma_l$ ) の各効果を表している。なお、第  $j$  対のクジ ( $a_j$ ) を固定効果とし、実験参加者 ( $\gamma_l$ ) を変量効果とした。変量効果には平均 0、標準偏差  $\sigma_\gamma$  の正規分布を仮定した。なお、以降ではリスクなクジの選択確率 ( $\theta_{jl}$ ) をリスクなクジの選択率あるいは単に選択率と呼ぶ。

上記のモデルに基づき、`brms` を用いて推定を行った。長さ 25,000 のチェーンを五つ発生させ、バーンイン期間を 5,000 とし、得られた 100,000 個の乱数を用いた。どのパラメータの収束判定指標  $\hat{R}$  も 1.1 以下であったため、事後分布に収束したと判断した。ここでは、各クジのセットにおいて、クジの対ごとにリスクなクジの選択率を求め、グループレベルにおける確率加重関数の形状を推測することが分析の目的であった。このため、各パラメータの事後分布をそのまま用いずに、クジのセットごとに、各クジの対におけるリスクなクジの選択率を求め、Figure 3.4.5~3.4.10 に示した。なお、Figure 3.4.5~3.4.10 には、リスクなクジの選択率に関する事後期待値と 95% 確信区間を示した。Figure 3.4.5~3.4.7 は利得条件、Figure 3.4.8~3.4.10 は損失条件のリスクなクジの選択率である。また、第  $i$  対と第  $i+1$  対におけるリスクなクジの選択率をそれぞれ  $R_i$ ,  $R_{i+1}$  とおき、 $R_{i+1} > R_i$  が正しい確率は 97.5% 以上あるいは 2.5% 以下であった箇所に「\*」を付した。たとえば、Figure 3.4.5 において第 5 対と第 6 対のリスクなクジの選択率  $R_5$  と  $R_6$  を比較すると、 $R_6 > R_5$  が正しい確率は 97.5% 以上であった。一方で  $R_8 > R_7$  が正しい確率は 2.5% 以下であった。

Wu & Gonzalez (1996, 1998) で報告された結果と命題 1 から、確率加重関数の形状が逆 S

字であれば、利得条件ではリスクなクジの選択率は、確率が0%から不動点付近(25~40%)までは増加し、不動点より高い確率においては減少することが予想される。損失条件における刺激は利得条件の刺激に-1をかけたものであるため、0円が最高賞金額と考える。そして第1~第8対の順序を逆にすると、Wu & Gonzalez (1998) の命題2の刺激パターンに対応している。したがって、損失条件では利得条件の選択傾向とは逆となり、リスクなクジの選択率は減少してから増加へと推移した場合に確率加重関数の形状は逆S字であると推測される。

Figure3.4.5~3.4.7 から、利得条件の第1セットは、第5対(確率が55%)から第6対(確率が70%)にかけて選択率が増加し、第7対(確率85%)から第8対(確率100%)にかけて減少していた。第3セットでは、第5対(確率が55%)から第6対(確率が70%)にかけて選択率が増加し、第6対(確率70%)から第7対(確率85%)、第7対(確率85%)から第8対(確率100%)にかけて減少していた。第2セットのリスクなクジの選択率はほぼ一定であったが、第7対(確率85%)から第8対(確率100%)にかけて減少していた。このことから、第1と3セットからは確率加重関数の形状は逆S字の傾向が観察された。また、不動点の位置はWu & Gonzalez (1996, 1998) で観察された位置(25~40%)よりも高い確率において認められた。一方でFigure3.4.8~3.4.10 から、損失条件は、おおよそ予測していた推移となっており、確率加重関数の形状は逆S字であると推測された。また、選択率が減少してから増加するまでに不動点があると推測されることから、第1セットでは20~85%、第2セットでは20~35%、第3セットでは45~80%において不動点が位置していることが示唆された。

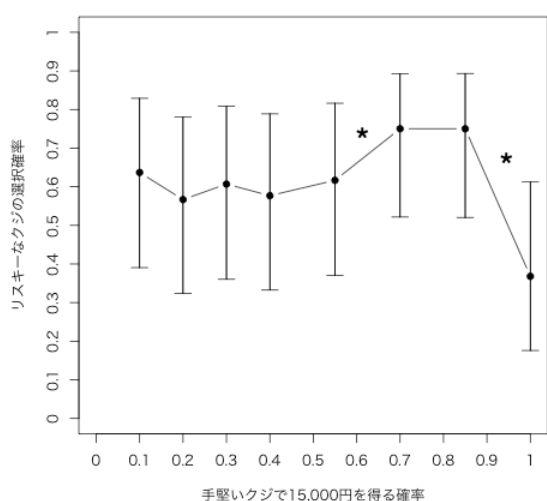


Figure3.4.5. 利得条件の第1セットの選択率

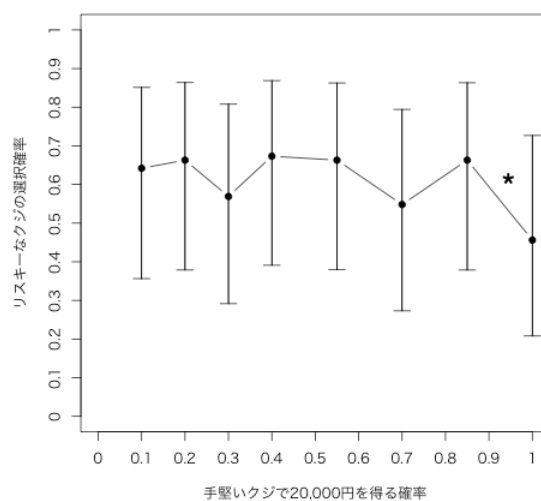


Figure3.4.6. 利得条件の第2セットの選択率

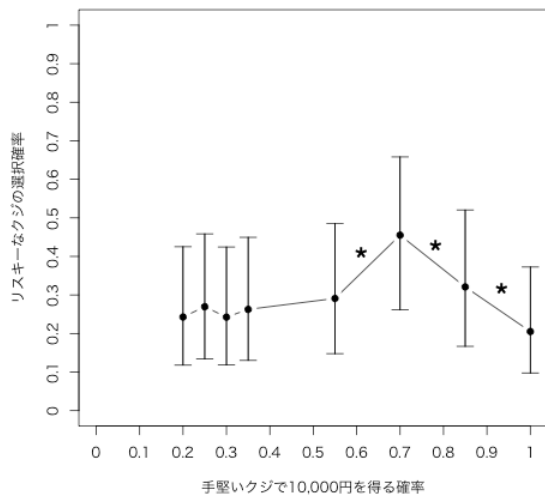


Figure3.4.7. 利得条件の第3セットの選択率

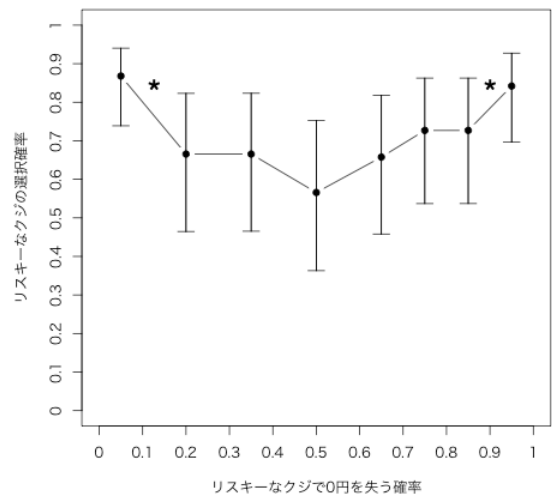


Figure3.4.8. 損失条件の第1セットの選択率

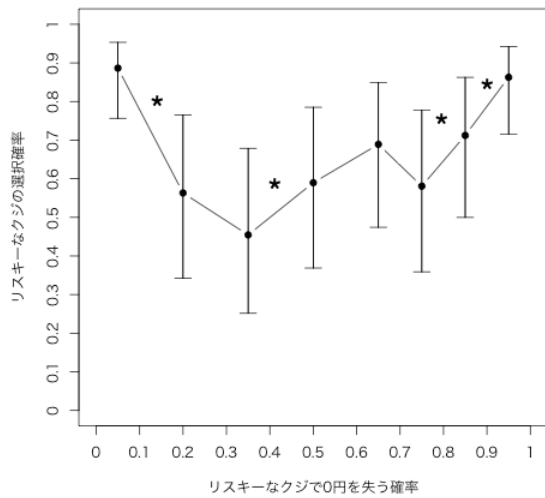


Figure3.4.9. 損失条件の第2セットの選択率

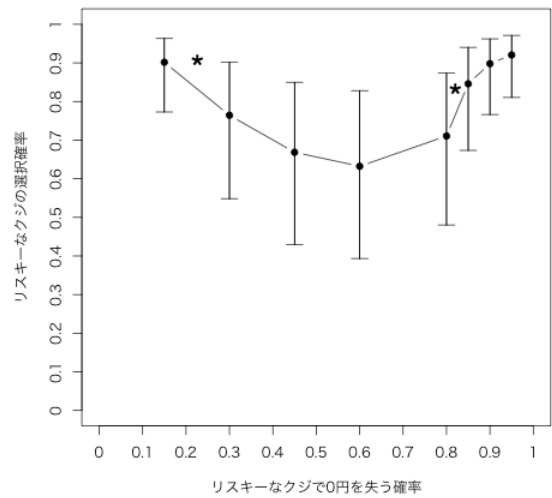


Figure3.4.10. 損失条件の第3セットの選択率

**個人ごとにおける確率加重関数の形状** 各クジのセットにおけるリスクーなクジの選択率の推移から個人ごとに確率加重関数の形状を推測し、推測した形状の種類について集計した結果を Table3.4.2 と Table3.4.3 に示した。また確率加重関数の形状を推測する際には、リスクーなクジの選択率が 50%以上ならリスクーなクジを、50%以下なら手堅いクジの選択とした。利得条件（損失条件）では選択がリスクーなクジから手堅いクジへと移っている箇所では確率加重関数の形状は下に凹（凸）であり、逆に手堅いクジからリスクーなクジへと移っている箇所では下に凸（凹）というように推測した。たとえば、利得条件で選択

が手堅いクジ，リスクなクジ，手堅いクジの順で移り変わった場合は，逆 S 字に分類した。ただし一貫してリスクなクジあるいは手堅いクジを選択していた場合は，期待効用理論で説明可能なため確率加重関数の形状は直線 ( $w(p)=p$ ) であるとした。Table3.4.2, 3.4.3 から，利得・損失条件ともに期待効用理論で説明できるケースが最も多かった。また利得条件では，凸，S 字が直線 ( $w(p)=p$ ) の次に多かった。グループレベルにおいて先行研究と比較的に近い傾向を示した第 3 セットでは凸，S 字，逆 S 字がほぼ同数であった。一方，グループレベルにおいてすべてのクジのセットで逆 S 字と推測された損失条件では，人数が多い順から直線 ( $w(p)=p$ )，逆 S 字，凸となった。

Table3.4.2  
個人ごとの確率加重関数の形状の集計結果（利得条件）

確率加重関数の形状	クジのセット						合計	
	1		2		3			
	人数	割合	人数	割合	人数	割合	数	割合
直線 ( $w(p)=p$ )	22	54%	21	51%	22	54%	65	53%
凹	3	7%	3	7%	2	5%	8	7%
凸	8	20%	9	22%	3	7%	20	16%
逆 S 字	1	2%	1	2%	2	5%	4	3%
S 字	1	2%	5	12%	4	10%	10	8%
凹凸凹	2	5%	2	5%	2	5%	6	5%
凸凹凸	1	2%	0	0%	2	5%	3	2%
未分類	3	7%	0	0%	4	10%	7	6%

Table3.4.3

個人ごとの確率加重関数の形状の集計結果（損失条件）

確率加重関数の形状	クジのセット							
	1		2		3		合計	
	人数	割合	人数	割合	人数	割合	数	割合
直線 ( $w(p)=p$ )	18	44%	19	46%	21	51%	58	47%
凹	3	7%	3	7%	1	2%	7	6%
凸	5	12%	5	12%	4	10%	14	11%
逆 S 字	7	17%	5	12%	10	24%	22	18%
S 字	1	2%	1	2%	2	5%	4	3%
凹凸凹	3	7%	1	2%	0	0%	4	3%
凸凹凸	0	0%	0	0%	2	5%	2	2%
未分類	4	10%	7	17%	1	2%	12	10%

### 3.5 確率加重関数の経験的な前提に関する検討結果のまとめ

本章では、確率加重関数の経験的な前提に関する研究として、従来の研究で指摘されているように、実際に人の確率加重関数の形状が非線形であるか検討することを目的とした。個人とグループレベルの確率加重関数の形状がともに非線形であるかを検討するために、Wu & Gonzalez (1996, 1998) による確率加重関数の形状の推測方法を用いて、研究 1 の実験結果と、3.3 節で行った実験の結果から形状の推測を行った。

研究 1 のデータを用いて形状の推測をしたところ、グループレベルについては当初想定していた分類では形状の推測は困難であったが、少なくとも確率加重関数の形状は非線形であることが示唆された。一方、簡便な方法ではあるが、個人において、確率加重関数の形状が凸である人が最も多く観察され、凹・逆 S 字である人は、25 名中 4 名で認められた。

3.4 節では、Wu & Gonzalez (1996) の実験を参考に、各実験参加者に対して繰り返しクジの選択課題を行ったデータを用いて、グループレベルと個人の確率加重関数の形状を推測した。グループレベルにおいては、利得条件の第 2 セットを除けば、確率加重関数の形状は逆 S 字であることが示唆された。個人ごとに形状を推測したところ、確率加重関数の形状が期待効用理論のように直線 ( $w(p)=p$ ) に分類されたケースが利得・損失条件ともに最も多く、半数程度で認められた。利得条件では 3.3 節において多く認められた下に凸の形状が直線の次に多く、逆 S 字は未分類よりも少なかった。また損失条件では、逆 S 字に分類された数は、直線の次に多く、下に凸であるとした数は逆 S 字に続いて多かった。したが



って、3.4 節においても、3.3 節で示されたように下に凸であるケースが一定数は認められた。これらのことから、未分類を除けば、4 割程度で確率加重関数の形状は非線形であることが示された。なお、確率加重関数の形状が線形であることは、確率加重関数の特別な場合であり、表現することは可能である。

また、3.4 節において、グループレベルで推測された確率加重関数の形状と、個人ごとで最も多く認められた形状は異なっていた。このように傾向の違いが認められたのは、本研究で用いた形状の推測方法では、グループレベルで推測した時には、形状が線形であるような個人を検出しづらいことが原因の一つであると思われる。個人の確率加重関数の形状が線形であったということは、確率の水準が変わっても常に手堅いクジあるいはリスクなクジを選択していたことを表す。つまり、このような個人の選択データは、確率の水準に関わらず一定であり、グループレベルにおいては確率の水準によりリスクな選択肢の選択率の増加や減少に影響を与えない。言い換えると、形状が線形であるような個人の選択データは、グループレベルではリスクな選択肢の選択率において定数項のようになっている。このことから、個人とグループレベルでは傾向が異なる結果になったと思われる。

研究 2 の結果を解釈する上で、上記で述べた点には注意が必要であるが、3.3 節と 3.4 節から、人の確率に対する認知傾向を説明する上で、期待効用理論であれば 5 割程度まで、確率加重関数を導入すれば 9 割程度までを説明できる可能性がある。このことから、確率加重関数を導入する意義はあると考えられる。第 4 章では、確率加重関数の形状について、心理的なメカニズムを検討する。

## 第4章 研究3 確率加重関数の形状を生み出すメカニズムに関する研究

研究1と研究2では、確率加重関数の理論的・経験的な前提に関する研究を行った。そして、人の確率に対する認知傾向を説明する上で、確率加重関数を置くことは実際の人の意思決定に照らして、理論的・経験的にあまり矛盾のないあるいは一定の意義があることが示唆された。そこで、研究3では、確率加重関数の検証から視点を移し、確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて検討を行う。

以下では、まず研究3の目的について述べる。次に4.2節では竹村・村上(2018, 2019), Takemura & Murakami (2016)をもとに、確率加重関数の心理的なメカニズムを表すモデルについて導出し、説明を行う。続いて、4.3節ではモデルの導出時に用いられる遅延時間に関する心理物理関数の型と遅延割引関数の型という二つの観点から、確率加重関数のモデルおよび対応する遅延割引関数のモデルを整理し、紹介する。そして、4.4節では確率加重関数のモデルを評価するための実験とパラメータの推定方法について述べ、その後、遅延割引関数のモデルを評価するために用いた遅延割引に関する先行研究のデータと推定方法について説明する。4.5節では確率加重関数と遅延割引関数のそれぞれに関してモデルの評価を行った結果について述べる。なお、モデルの評価にはWAICを用いた。最後に4.6節では、確率加重関数と遅延割引関数それぞれのモデルの評価順位から、両関数の関係について考察を行う。

### 4.1 目的

研究3は、確率加重関数の推定実験と遅延割引に関する先行研究の実験結果を分析し、WAICによるモデル評価の観点から確率加重関数と遅延割引関数の共通点と相違点を検討することで、確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて考察することを目的とする。具体的には、そのメカニズムについて、人は確率を遅延時間あるいは待ち時間に置き換えているという考えに基づき、確率加重関数のモデルを導出する。また、導出した確率加重関数に対応する遅延割引関数のモデルも導く。そして、確率加重関数の実験結果とこれまでの遅延割引関数の実験結果の分析を通じて、研究3で導出したモデルのWAICから、確率加重関数と遅延割引関数の関係について考察を行う。確率を遅延時間に置き換えているという両関数を関係付ける心理的なメカニズムがあるならば、両関数で共通の導出過程を持つモデルがそれぞれの実験結果でモデルの評価が良くなることが考えられる。

## 4.2 確率加重関数の心理的なメカニズム

1.5 節においても述べたように、遅延割引関数と確率加重関数に共通するメカニズムがあると考え、確率加重関数を導出する研究がある（たとえば Takemura & Murakami, 2016）。この導出について説明する前に、以下ではまず、遅延割引関数について概説する。その後、Rachlin et al. (1991) による確率割引関数の導出について述べ、遅延割引関数と心理物理関数から確率加重関数が導出される過程について説明する。

### 4.2.1 遅延割引関数の概説

報酬を得る際に即時に得られる場合とある程度待つ場合では、後者のほうが報酬の価値が割り引かれることがわかっている（たとえば、Rachlin et al., 1991）。このような報酬の価値が待つ時間とともに減少する様子を示す関数を遅延割引関数と呼ぶ。この遅延時間に関する意思決定研究では、これまで指数型の遅延割引関数と双曲線型の割引関数に関する議論が繰り返されてきた。指数割引関数は、数理的に扱いやすい利点と人間の合理性の観点から記述しやすい性質があるが、動物実験やヒトの選択実験ではどちらかというとき双曲線割引関数のほうが当てはまりがよいことがわかっている。

たとえば、指数関数と双曲線割引関数の性質の違いは、次のような二つの問によって示される。問1では、選択肢Aをいますぐに10,000円もらえる、選択肢Bを明日11,000円もらえるとする。問2は、問1を1年間だけ遅らせた選択肢対であり、選択肢Cを1年後に10,000円もらえる、選択肢Dを1年と1日後に11,000円もらえるとする。このような異時点間の選択において、指数割引関数では、問1で選択肢Aを選んだならば、問2で選択肢Cを選ぶことが仮定されている。しかし、実際に人に対して、上記のような選択実験を行った場合には、選択肢Aと選択肢Dを選ぶ傾向がある。双曲線割引関数では、現時点に近い選択においては、より早く報酬をもらえる方を選び、現時点から遠い時点においては、逆に遅れてもらえる報酬を選ぶ傾向を表すことができる。また、このような報酬の受け取りを待つことができず、より早期の報酬の受け取りを選ぶ傾向は衝動性と表現される。そして、現時点から離れるほど衝動性が低くなる（報酬の受け取りを待つことができる）という双曲線割引関数が持つ性質は衝動性の減少 (decreasing impatience) と呼ばれる (Prelec, 2004, Takahashi, Oono, & Radford, 2008)。双曲線割引関数と指数割引関数はそれぞれ(4.2.1)式と(4.2.2)式のように表される。 $A$ は遅延時間 $D$ 後に受け取る報酬量、 $V$ は報酬量 $A$ に対する現在の価値を表す。 $k$ は割り引く程度を表すパラメータである。

$$V = \frac{A}{1 + kD} \tag{4.2.1}$$

この式は、報酬量 $A$ に対する現在価値 $V$ が遅延の逆数に比例するという考え方に基づいて

いる（広田・増田・坂上，2002）。

$$V = \frac{A}{\exp(kD)} \quad (4.2.2)$$

ただし、 $k$ は割引率を表すパラメータである。割引率は、 $-(dV/dD)/V$ で定義され、指数割引関数の割引率は、 $k$ であり、双曲線割引関数は、 $k/(1+kD)$ である（Takahashi, 2007）。指数割引関数の割引率は遅延時間  $D$  によらず一定であり、このことから指数割引関数は、異時点間で一貫した選択になる。一方で、双曲線割引関数の割引率には遅延時間  $D$  が含まれており、時間の経過にしたがって割引率は減少していく。この割引率の減少が衝動性の減少を表している（Takahashi, Ikeda, & Hasegawa, 2007）。双曲線割引関数(4.2.1)式と指数割引関数(4.2.2)式のプロットを Figure4.2.1 に示す。Figure4.2.1 では、双曲線割引関数を実線、指数割引関数を破線で示した。Figure4.2.1 で示されるように、双曲線割引関数は時間の経過にしたがって割引率が減少していくことから、時間の経過にしたがって傾きが徐々に緩やかになっている。

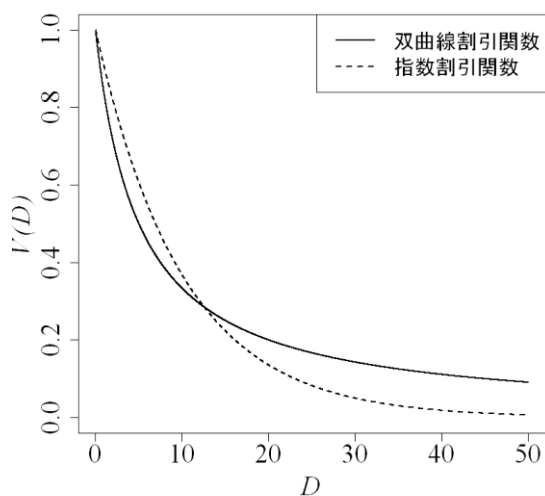


Figure4.2.1. 双曲線割引関数(4.2.1)式と指数割引関数(4.2.2)式のプロット

また、(4.2.1)式 of 双曲線型の遅延割引関数を一般化したモデルも提案されている。以下の(4.2.3)式は、Loewenstein & Prelec (1992) による定式化である。

$$V(D) = (1 + \alpha D)^{-\beta/\alpha} \quad (4.2.3)$$

ただし、 $\alpha$ と $\beta$ は0より大きい値をとるフリーパラメータである。このモデルでは、 $\alpha = \beta$ のとき、双曲線関数になることから一般化双曲線関数と呼ばれる。なお、 $\alpha$ について極限をとり0に近づけていくと、指数関数  $V(D)=\exp(-\beta D)$ になる。したがって、 $\alpha$ は指数関数からの

逸脱の程度を示している（佐伯，2001）。(4.2.3)式は，指数関数と双曲線関数を一般化したモデルとされている。ここで，(4.2.3)式のパラメータ $\beta$ は，双曲線型と指数型におけるパラメータ $k$ に対応するが，見た目上の対応がわかりづらいため，次のようにパラメータを置き換える。

$$V(D) = (1 + bkD')^{-1/b} \quad (4.2.4)$$

これは，(4.2.3)式を $\alpha=b$ ， $\beta=1$ ， $D=kD'$ に置き換えた場合である。(4.2.4)式の一般化双曲線割引関数のパラメータ $b$ を動かしたときの形状の推移を Figure4.2.2 に示す。Figure4.2.2 では一般化双曲線割引関数は $(1 + 0.1bD')^{-1/b}$ のようにフリーパラメータ $k$ が0.1の場合とした。一般化双曲線割引関数が指数割引および双曲線割引の一般形であることを例示するために，Figure4.2.2 には，双曲線割引関数 $(1 + 0.1D)^{-1}$ を実線，指数割引関数 $\exp(-0.1D)$ を破線で示した。なお，一般化双曲線割引関数，双曲線割引関数，指数割引関数のフリーパラメータ $k$ は0.1とした。Figure4.2.2 から，一般化双曲線割引関数のパラメータ $b$ が0に近いほど指数割引関数の形状に近づいており，また1に近いほど双曲線割引関数の形状に近づくことが示されている。さらに，1より大きい値を取った場合には，双曲線関数よりも傾きが緩やかになっていくことが示しているように，大きい値を取るほど衝動性の減少傾向が強くなる。異時点間での選択の一貫性という観点で言い換えると，上述のように指数割引関数が異時点間で一貫した選択を表すことから，パラメータ $b$ が0より大きい値をとるほど，異時点間で一貫しない選択傾向を表す。なお，同様の解釈は Takahashi (2007) においても行われている。

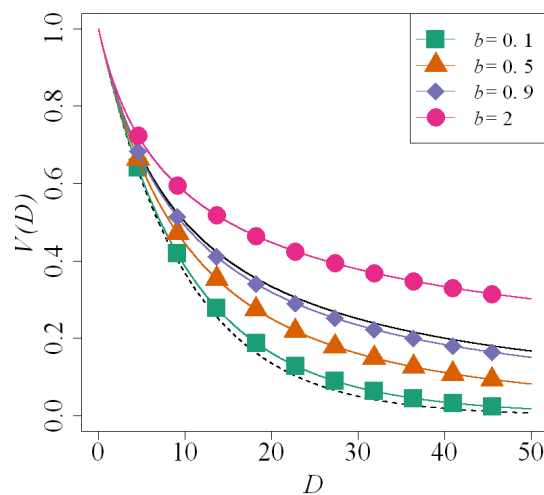


Figure4.2.2. 一般化双曲線割引関数のパラメータ $b$ を動かしたときの形状の推移

#### 4.2.2 遅延割引関数と心理物理関数による確率加重関数の導出

Rachlin et al. (1991) は、遅延割引関数から一種の確率加重関数（確率割引関数）を導出している。通常、動物の選択行動を研究する行動分析学では、上述のように価値が待つ時間とともに減少する現象（遅延価値割引）を表す際には、双曲線割引モデル(4.2.1)式が用いられる。Rachlin et al. (1991) は、双曲線割引モデルが遅延割引だけでなく、報酬を得られる確率によりその価値が減少する現象（確率割引）にも適応できることを提案した。彼らは、確率割引は、オッズの逆数 $\Theta = (1/p) - 1$ をとり、確率 $p$ を一種の遅延時間 $\Theta$ に置き換え、双曲線割引モデル(4.2.1)式の遅延時間 $D$ に $\Theta$ を代入することで

$$V = \frac{A}{1 + k\Theta} \quad (4.2.5)$$

と表せるとした。彼らは、このような定式化を行うことで、確率割引は遅延割引の観点から説明できると考えた。

ここで、(4.2.1)式の割引の部分だけを考えると、その率を $w(D)$ とすると、

$$w(D) = \frac{1}{1 + kD} \quad (4.2.6)$$

となるだろう。Rachlin et al. (1991) は、(4.2.6)式の遅延時間を表す $D$ を $D = (1/p) - 1$ としている。これは、ベルヌイ試行で初めて当たるまでの試行回数の期待値は、確率 $p$ の逆数である $1/p$ であるが、ここで最初の試行が行われるまでの待ち時間を1として、その待ち時間1を含めないと考えると、遅延 $D$ は $1/p$ から1を引いた $(1/p) - 1$ であり、 $D = (1/p) - 1$ と考えることができる。

したがって、彼らは、確率加重関数 $w(p)$ を下記のように考えたと言える。

$$w(p) = \frac{1}{1 + k[(1/p) - 1]} \quad (4.2.7)$$

彼らは、このように考えて、確率割引の現象と遅延割引の現象を双曲線関数で考えようとした。彼らの研究結果からは、概ねこのような考えで選択行動を説明できるとした。しかしながら、報酬量を変えると、両者の対応性が見られないなどの批判などもある（佐伯，2011）。

他方、Takahashi (2011) は、この考えをさらに拡張して、下記のような双曲線型のモデルを考えている。

$$w(p) = \frac{1}{\{1 + k[(1/p) - 1]\}^a} \quad (4.2.8)$$

また Takahashi (2011) は、遅延時間が主観的に対数法則によって変換され、さらに、確率加重関数による主観的遅延時間が客観確率による主観的遅延時間のべき乗になっている

という仮定から、一般的な確率加重関数を導出している。この仮定により Takahashi (2011) は、Prelec (1998) の確率加重関数と双曲線型のモデルを時間割引のパラメータの違いから説明しようとした。

一方、Takemura & Murakami (2016) は、行動分析学や動物心理学で用いられることの多い双曲線型の遅延割引モデルから、以下の確率に対する人の感受性のモデルを導出した。このモデルでは、Rachlin et al. (1991) や Takahashi (2011) の定式化とは異なり、最初の試行が行われるまでの待ち時間を含めて、初めて当たった試行までの待ち時間を仮定するので、 $1/p$  から 1 を引かず、(4.2.1)式の遅延時間  $D$  を  $1/p$  であると考え。ただし、強化遅延  $D$  がベルヌイ試行で初めて当たるまでの試行回数の期待値と比例していると考えられる点では同じである。そして、 $D = 1/p$  にフェヒナー型の心理物理関数が働くと考えため、 $\log D = \log(1/p) = -\log p$  となる。遅延時間についてフェヒナーの対数関数の心理物理関数が働くと仮定し、双曲線型の遅延割引モデル(4.2.6)式に組み入れると、以下の(4.2.9)式を導く。

$$w(p) = \frac{1}{1 + k \log(1/p)} \quad (4.2.9)$$

さらに、(4.2.9)式は、以下の(4.2.10)式に変換される。

$$w(p) = \frac{1}{1 - k \log(p)} \quad (4.2.10)$$

この遅延割引および心理物理関数から導出した確率加重関数のモデルは、パラメータ  $k$  の値は 0 以上をとる。また、Tversky & Kahneman (1992) のモデルとの特徴的な違いは、客観的な確率に対して主観的な確率をより大きく判断するような態度への対応が可能である点である。このモデルのパラメータごとの形状の推移を Figure4.2.3 に示す。

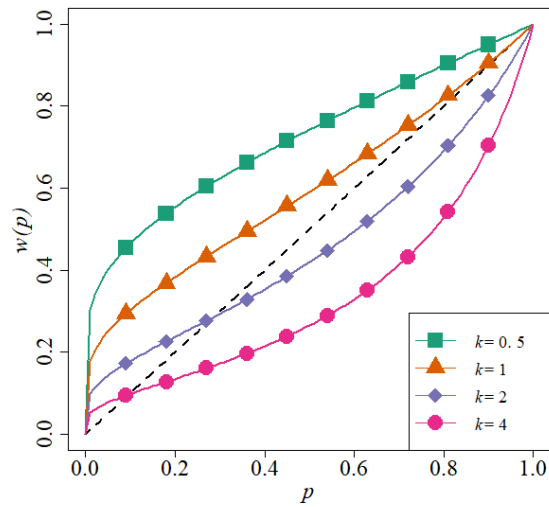


Figure4.2.3. 遅延価値割引から導出したモデル(4.2.10)式におけるパラメータごとの形状

このような双曲線型のモデルは心理学ではよく用いられているが、伝統的経済学においては、双曲線型の遅延割引モデルとは異なり、指数関数型の遅延割引モデル(4.2.2)式がよく用いられている。ここでも、(4.2.2)式の割引の部分だけを考えると、その率を  $w(D)$  とすると、

$$w(D) = \exp \{-kD\} \quad (4.2.11)$$

となる。この(4.2.11)式に、フェヒナー型の心理物理関数を適用すると

$$w(p) = \exp\{-k[-\log(p)]\} = \exp\{k \log p\} \quad (4.2.12)$$

となる。パラメータ  $k$  の値は 0 以上をとる。また、パラメータ  $k$  の値が 1 より小さいと凹関数となり、1 より大きいと凸関数となる。このモデルのパラメータごとの形状の推移を Figure4.2.4 に示す。さらに、心理物理関数が遅延試行回数の平均値の対数のべき乗であると仮定すると、

$$w(p) = \exp\{-k\{-\log p\}^\alpha\} \quad (4.2.13)$$

となり、Prelec(1998)の確率加重関数と一致する。このような観点から、さまざまな確率加重関数のモデルが導出される (Table4.3.1 参照)。



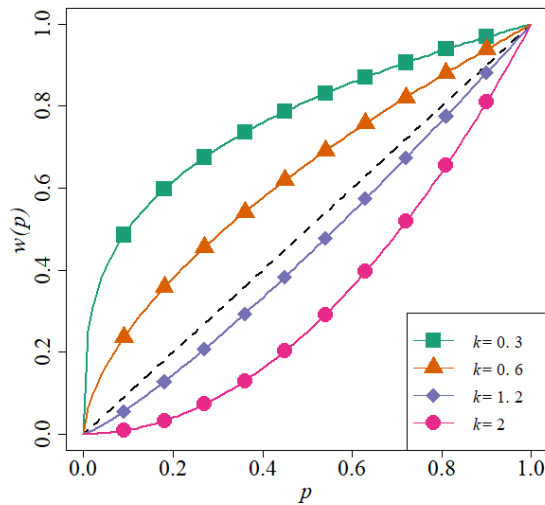


Figure4.2.4. (4.2.12)式におけるパラメータごとの形状

### 4.3 確率加重関数のモデルとそれに対応する遅延割引関数のモデルの紹介

前節では、確率加重関数の心理的なメカニズムを表すモデルについて説明を行った。本節では、確率加重関数のモデルを、心理物理関数及び遅延割引関数の観点から整理し、紹介する。紹介するモデルは、従来のモデルだけでなく、心理物理関数の型と遅延割引関数の型の組み合わせからできた新しいモデルも含まれている。Table4.3.1に、本節で紹介するモデルを、心理物理関数及び遅延割引関数の観点から整理し、一覧として示す。心理物理関数は、遅延時間  $D$  に関して仮定されており、恒等関数 ( $F(D) = D$ )、対数関数あるいはフェヒナー型 ( $F(D) = \ln(D)$ )、ベキ関数 ( $F(D) = D^a$ )、フェヒナー型にベキ関数を組み合わせた型 ( $F(D) = [\ln(D)]^a$ ) の4種類を挙げた。遅延割引関数の型は、双曲線型、一般化双曲線型と指数型の3種類とした。さらに、確率加重関数の各モデルと対応する遅延割引関数のモデルをまとめた。以降では、確率加重関数の各モデルに対応する遅延割引関数のことを遅延割引関数、遅延割引関数の型を指すときは割引関数の型とよぶ。なお、一般化双曲線型には(4.2.4)式を用いた。

モデル名は、竹村・村上 (2018, 2019) や Takemura & Murakami (2016), Prelec (1998) などの名称は用いていない。ここでは、心理物理関数の型及び割引関数の型と、確率加重関数との対応関係がわかりやすいように、モデル名を付けた。たとえば、心理物理関数の型が恒等関数であり、割引関数の型が双曲線型であるモデルであれば、モデル名は、「恒等 - 双曲線型」のように、「心理物理関数の型 - 割引関数の型」の形でモデル名を示した。

Table4.3.1で Takemura & Murakami (2016) の確率加重関数モデル  $[1+k \log(1/p)]^{-1}$  に対応する遅延割引関数のモデルは  $[1+k \log(D+1)]^{-1}$  とした。彼らの遅延時間  $D$  と確率  $p$  の関係

を  $D = 1/p$  とする仮定に従えば、対応する遅延割引関数のモデルは、 $[1 + k \log(D)]^{-1}$  とした方が適切である。Table4.3.1 で  $\log(D)$  とせずに、 $\log(D + 1)$  としたのは、 $\log(D)$  とした場合  $D$  が 0 以上 1 より小さいときに負の値をとり、 $D$  が 1 以上のデータにしか適応できないためである。そこで、Table4.3.1 では、 $[1 + k \log(D + 1)]^{-1}$  とし、 $D$  が 0 以上 1 より小さい場合にも適応できるようにした。同様の理由で、心理物理関数に  $\log D$  を仮定している場合には、遅延割引関数のモデルでは  $\log(D + 1)$  とした。

ここで  $\log D$  の代わりに、 $\log(D + 1)$  を用いた変換は、データの分析上必要な便宜的な変換という側面もある。一方で、Takemura & Murakami (2016) のモデルにおいても、Rachlin et al. (1991) や Takahashi (2011) の定式化のように、 $D = (1/p) - 1$  を仮定しているとする と、 $[1 + k \log(D + 1)]^{-1}$  の  $D$  を  $(1/p) - 1$  に置き換えれば、Takemura & Murakami (2016) の確率加重関数モデル  $[1 + k \log(1/p)]^{-1}$  となる。したがって、Table4.3.1 に記載したモデルは、遅延時間  $D$  と確率  $p$  の関係について  $D = 1/p$  ではなく  $D = (1/p) - 1$  を仮定しているとも解釈できる。

以降では、Table4.3.1 のモデルについて、1 番から順に説明する。なお、 $D$  は遅延時間、 $p$  は確率、 $k$ 、 $a$ 、 $b$  はフリーパラメータを表している。また、 $k \geq 0$ 、 $a > 0$ 、 $b > 0$  である。これらのパラメータに関する基本的な解釈は、パラメータ  $k$  は割引の程度、パラメータ  $a$  は遅延時間に対する感じ方あるいは感受性、パラメータ  $b$  は衝動性の減少に関わる。詳細な説明は、パラメータ  $k$ 、 $b$  については 4.3.1 項の恒等 - 双曲線型と恒等 - 一般化双曲線型、 $a$  については 4.3.5 項のベキ - 双曲線型とベキ - 一般化双曲線型を例に述べる。

Table 4.3.1

## 確率加重関数のモデルと遅延割引関数のモデルの一覧

モデル名	心理物理関数の型	割引関数の型	遅延割引関数のモデル	確率加重関数のモデル
1 恒等 - 双曲線型		双曲線型 $f(D) = [1 + k D]^{-1}$	$[1 + k D]^{-1}$	$[1+k(1/p-1)]^{-1}$
2 恒等 - 一般化双曲線型	恒等関数 $F(D) = D$	一般化双曲線型 $f(D) = [1 + bk D]^{-1/b}$	$[1 + bk D]^{-1/b}$	$[1+bk(1/p-1)]^{-1/b}$
3 恒等 - 指数型		指数型 $f(D) = \exp[-k D]$	$\exp[-k D]$	$\exp[-k(1/p-1)]$
4 対数 - 双曲線型		双曲線型 $f(D) = [1 + k D]^{-1}$	$[1 + k \log(D + 1)]^{-1}$	$[1+k \log(1/p)]^{-1}$
5 対数 - 一般化双曲線型	対数関数 (フェヒナー型) $F(D) = \log(D)$	一般化双曲線型 $f(D) = [1 + bk D]^{-1/b}$	$[1 + bk \log(D + 1)]^{-1/b}$	$[1+bk \log(1/p)]^{-1/b}$
6 対数 - 指数型		指数型 $f(D) = \exp[-k D]$	$\exp[-k \log(D + 1)]$	$\exp[-k \log(1/p)]$
7 ベキ - 双曲線型		双曲線型 $f(D) = [1 + k D]^{-1}$	$[1 + k (D^a)]^{-1}$	$[1+k ((1/p-1)^a)]^{-1}$
8 ベキ - 一般化双曲線型	ベキ関数 $F(D) = D^a$	一般化双曲線型 $f(D) = [1 + bk D]^{-1/b}$	$[1 + bk (D^a)]^{-1/b}$	$[1+bk ((1/p-1)^a)]^{-1/b}$
9 ベキ - 指数型		指数型 $f(D) = \exp[-k D]$	$\exp[-k (D^a)]$	$\exp[-k ((1/p-1)^a)]$
10 対数 + ベキ - 双曲線型		双曲線型 $f(D) = [1 + k D]^{-1}$	$[1 + k \{ \log(D + 1)^a \}]^{-1}$	$[1+k \{ \log(1/p)^a \}]^{-1}$
11 対数 + ベキ - 一般化双曲線型	対数関数+ベキ関数 $F(D) = \log(D)^a$	一般化双曲線型 $f(D) = [1 + bk D]^{-1/b}$	$[1 + bk \{ \log(D + 1)^a \}]^{-1/b}$	$[1+bk \{ \log(1/p)^a \}]^{-1/b}$
12 対数 + ベキ - 指数型		指数型 $f(D) = \exp[-k D]$	$\exp[-k \{ \log(D + 1)^a \}]$	$\exp[-k \{ \log(1/p)^a \}]$

#### 4.3.1 恒等 - 双曲線型と恒等 - 一般化双曲線型の紹介

恒等 - 一般化双曲線型の確率加重関数 (Table4.3.1 モデル番号 2) は,

$$w(p) = \{1 + bk [(1/p)-1]\}^{-1/b} \quad (4.3.1)$$

と表される。このモデルは、心理物理関数に恒等関数を、割引関数に一般化双曲線型を仮定したモデルである。Ostaszewski, Green, & Myerson (1998) は、 $bk=k'$ ,  $1/b=a$  とした場合を確率割引のモデルとして提案した。また Takahashi (2011) が提案した一般的な確率加重関数の特別な場合でもある。(4.3.1)式を  $b=1$  とした場合が恒等 - 双曲線型 (Table4.3.1 モデル番号 1) であり、上述のように Rachlin et al. (1991) が確率割引関数として提案したモデルである。恒等 - 一般化双曲線型の確率加重関数に対応する遅延割引関数は,

$$V(D) = (1 + bk D)^{-1/b} \quad (4.3.2)$$

と表される。恒等 - 一般化双曲線型は上述のように Loewenstein & Prelec (1992) による (4.2.3)式を  $\alpha=b$ ,  $\beta=1$ ,  $D=kD'$  と置き換えればと (4.3.2)式になる。また, Cajueiro (2006) によっても (4.3.2)式を  $b=(1-q)$  としたモデルが提案されている。ただし,  $q$  は 0 から 1 までの値をとり,  $q$  の極限をとり 1 に近づけた場合に指数割引関数,  $q=0$  のとき双曲線割引関数になる。さらに Takahashi (2007) は Cajueiro (2006) の遅延割引モデルから確率割引モデルを導出している。

恒等 - 双曲線型について、確率加重関数と遅延割引関数のパラメータごとの形状の推移を、それぞれ Figure4.3.1 と Figure4.3.2 に示す。恒等 - 一般化双曲線型については、それぞれ Figure4.3.3 と Figure4.3.4 に示す。本節以降で、確率加重関数のプロットには  $w(p) = p$  を表す破線を加えている。

パラメータ  $k$ ,  $b$  に関する基本的な解釈について、恒等 - 双曲線型と恒等 - 一般化双曲線型を例に述べる。パラメータ  $k$  は割引関数において、上述のように報酬を割り引く程度を表している。Figure4.3.2 でも示されているように、パラメータ  $k$  が大きい値をとるほど、遅延報酬の価値は大きく割り引かれる。言い換えれば、パラメータ  $k$  が大きい値をとるほど、遅延報酬に対する魅力が低下することを表している。確率加重関数においては、Figure4.3.1 あるいは Figure4.3.3a で示されているように、パラメータ  $k$  が小さい値をとるときには客観的な確率を過大評価し、パラメータ  $k$  が大きい値をとるほど、確率を過小評価していく傾向がある。Gonzalez & Wu (1999) において、このような確率に対する過大評価あるいは過小評価を示すパラメータは、確率に対する魅力 (attractiveness) を表すと解釈されている。このように、パラメータ  $k$  は遅延あるいは確率に対する魅力を表していると解釈できる。

パラメータ  $b$  は、一般化双曲線関数の説明でも述べたように、 $b$  について極限をとり 0 に近づけていくと指数割引関数になり、 $b=1$  のとき、双曲線割引関数になる。つまり、パラメータ  $b$  は指数割引関数からの乖離の程度を表している。割引関数において、指数関数であ

れば異時点間で一貫した選択を行うことを表しており、双曲線関数であれば一貫していない選択を行うことを表している (Takahashi, 2007)。したがって、パラメータ  $b$  が 0 より大きい値をとるほど指数関数からの乖離を表すことから、パラメータ  $b$  は異時点間の選択における一貫性を表していると解釈できる ( $b$  が 0 に近いほど一貫した選択)。

割引関数の一般化双曲線型のパラメータ  $b$  は、上述のように異時点間の選択に関する一貫性を表している。パラメータ  $b$  が 0 より大きいほど、一貫していないことを表す。遅延割引関数においては、パラメータ  $b$  が 0 に近いほど指数型の形状に近づき、1 に近いほど双曲線型の形状に近づく。さらに 1 より大きくなるほど衝動性の減少傾向が強くなる。また確率加重関数においても、パラメータ  $b$  が 0 に近いほど指数型、1 に近いほど双曲線型の形状に近づき、1 より大きくなるほど衝動性が減少する (報酬の受け取りを待つことができる) ことから、確率を過大評価する、つまり確率を楽観視する傾向が強くなる。

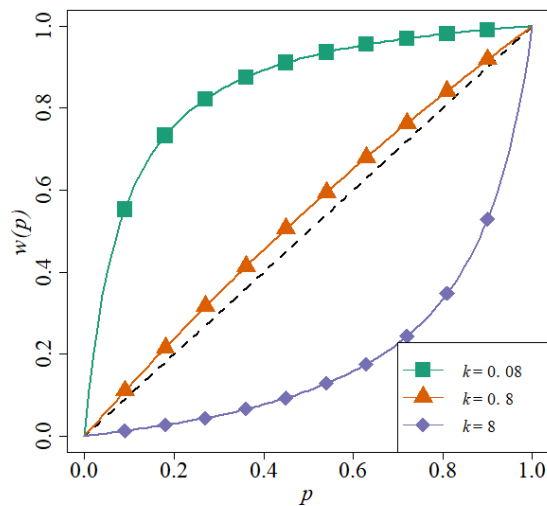


Figure4.3.1. 恒等 - 双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状

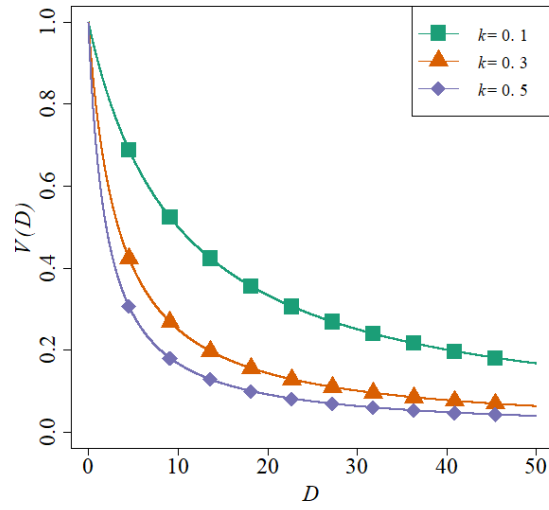


Figure4.3.2. 恒等 - 双曲線型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状

a

b

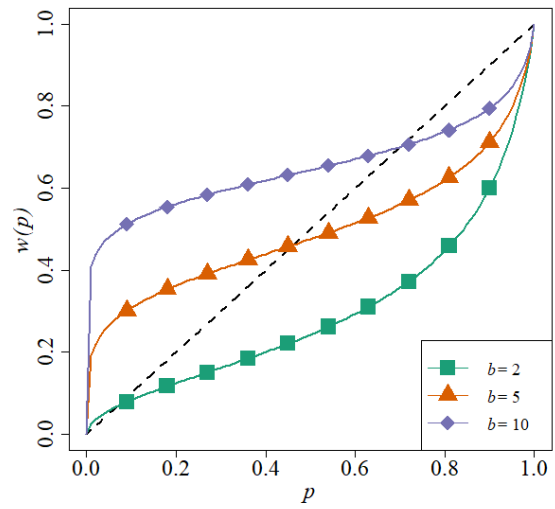
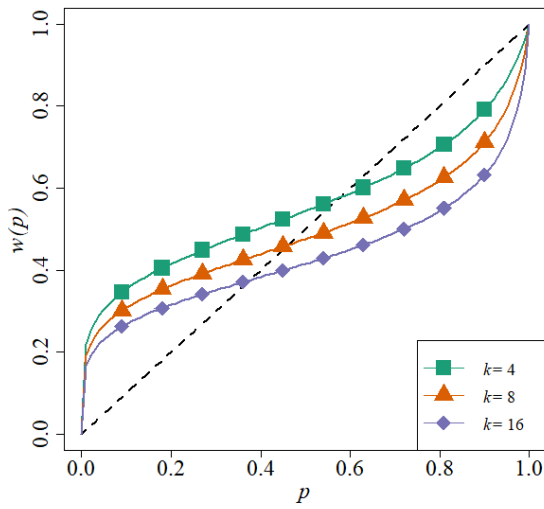


Figure4.3.3. ベキ - 双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $a=5$  で固定, 右(b) :  $k=8$  で固定)

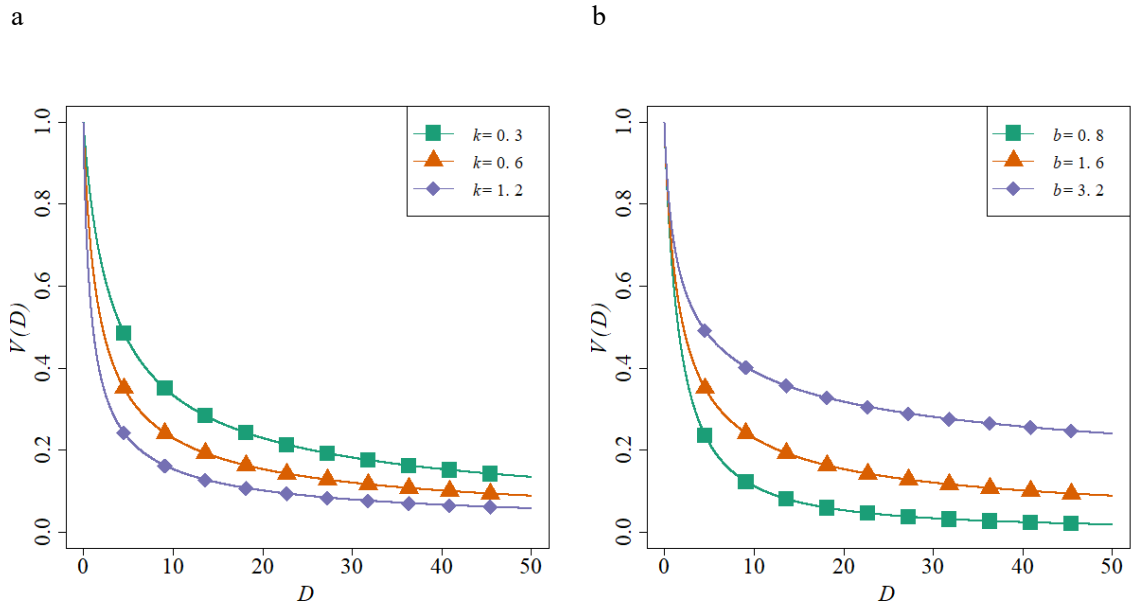


Figure4.3.4. 恒等 - 一般化双曲線型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $b=1.6$  で固定, 右(b) :  $k=0.6$  で固定)

#### 4.3.2 恒等 - 指数型の紹介

恒等 - 指数型の確率加重関数 (Table4.3.1 モデル番号 3) は,

$$w(p) = \exp[-k(1/p-1)] \quad (4.3.3)$$

と表される。このモデルは割引関数に双曲線型を, 心理物理関数に恒等関数を仮定することで導かれる。恒等 - 指数型の確率加重関数に対応する遅延割引関数は,

$$V(D) = \exp[-kD] \quad (4.3.4)$$

である。恒等 - 指数型について, 確率加重関数と遅延割引関数のパラメータごとの形状の推移をそれぞれ Figure4.3.5 と Figure4.3.6 に示す。

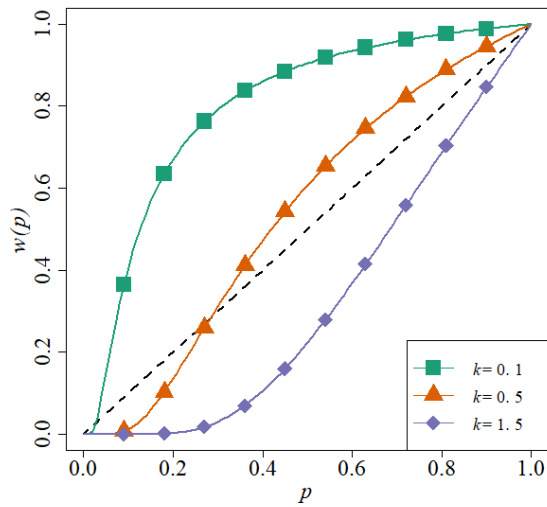


Figure4.3.5. 恒等 - 指数型における確率加重関数のパラメータ毎の形状

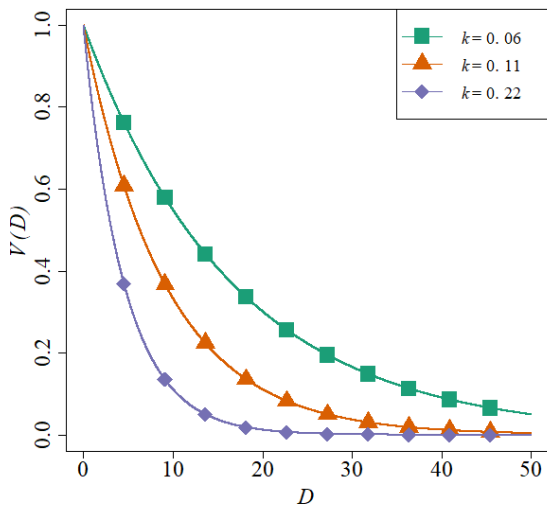


Figure4.3.6. 恒等 - 指数型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状

#### 4.3.3 対数 - 双曲線型と対数 - 一般化双曲線型の紹介

対数 - 一般化双曲線型の確率加重関数 (Table4.3.1 モデル番号 5) は,

$$w(p) = [1 + bk \log(1/p)]^{-1/b} \quad (4.3.5)$$

と表される。このモデルは、心理物理関数に対数関数を、割引関数に一般化双曲線型を仮定したモデルである。また、 $b=1$  とした場合が恒等 - 双曲線型 (Table4.3.1 モデル番号 4) であり、上述のように Takemura & Murakami (2016) が提案したモデルである。また、導出は異なるが Prelec (1998) も提案している。(4.3.5)式を  $bk=k'$  とした場合を Takemura &



Murakami (2016) が提案している。対数 - 一般化双曲線型の確率加重関数に対応する遅延割引関数は、

$$V(D) = [1 + bk \log(D + 1)]^{-1/b} \quad (4.3.6)$$

と表される。対数 - 双曲線型について、確率加重関数と遅延割引関数のパラメータごとの形状の推移を、それぞれ Figure4.3.7 と Figure4.3.8 に示す。対数 - 一般化双曲線型については、それぞれ Figure4.3.9 と Figure4.3.10 に示す。

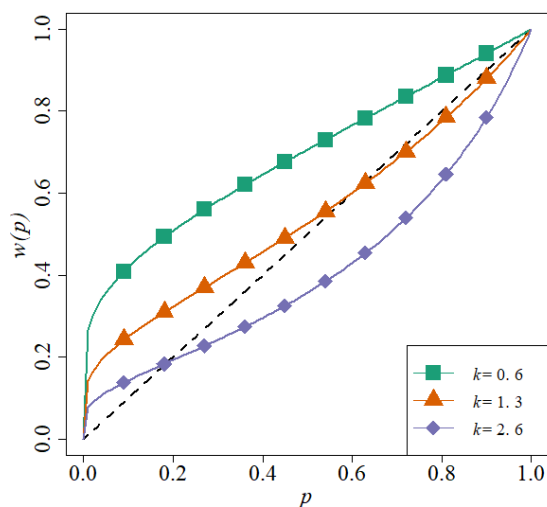


Figure4.3.7. 対数 - 双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状

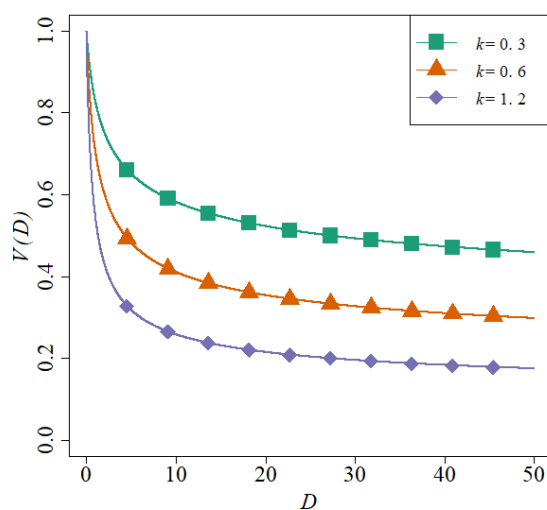


Figure4.3.8. 対数 - 双曲線型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状

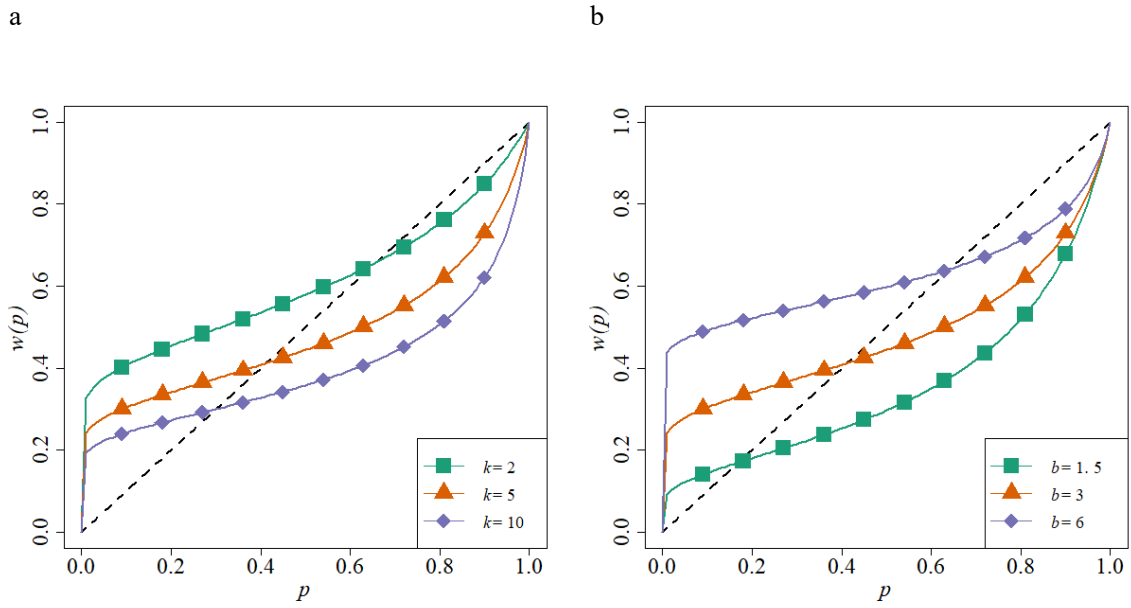


Figure4.3.9. 対数-一般化双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $b=3$  で固定, 右(b) :  $k=5$  で固定)

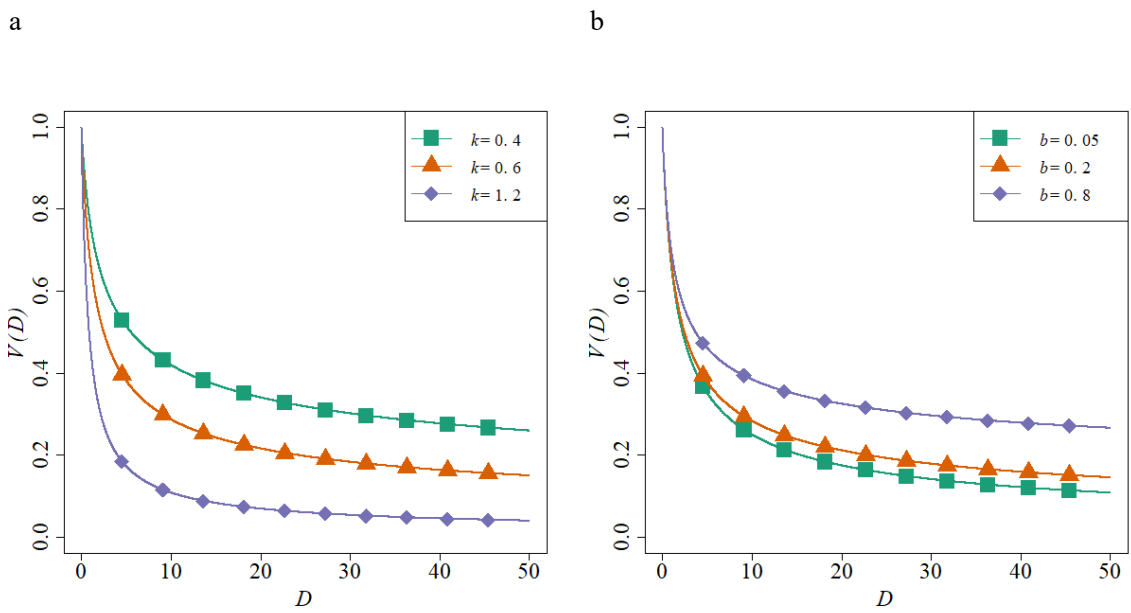


Figure4.3.10. 対数-一般化双曲線型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $b=0.2$  で固定, 右(b) :  $k=0.6$  で固定)

#### 4.3.4 対数 - 指数型の紹介

対数 - 指数型の確率加重関数 (Table4.3.1 モデル番号 6) は,

$$w(p) = \exp[-k \log(1/p)] \quad (4.3.7)$$

と表される。このモデルは、割引関数に指数型を、心理物理関数に対数関数を仮定することで導かれる。このモデルは竹村・村上（2018）で提案されたモデルである。対数 - 指数型の確率加重関数に対応する遅延割引関数は、

$$V(D) = \exp[-k \log(D + 1)] \quad (4.3.8)$$

である。なお、対数 - 指数型は、心理物理関数の型と割引関数の型を明示的に表すために(4.3.7)式, (4.3.8)式のように示したが、式を整理すると(4.3.7)式であれば  $\exp[-k \log(1/p)] = p^k$ , (4.3.8)式であれば  $\exp[-k \log(D + 1)] = (D + 1)^{-k}$  となる。確率加重関数と遅延割引関数のパラメータごとの形状の推移をそれぞれ Figure4.3.11 と Figure4.3.12 に示す。

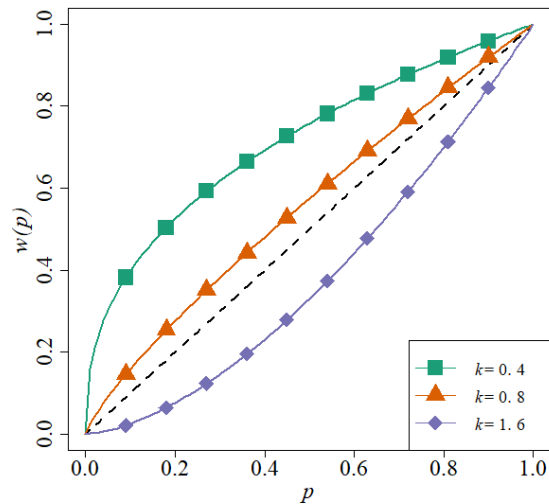


Figure4.3.11. 対数 - 指数型における確率加重関数のパラメータ毎の形状

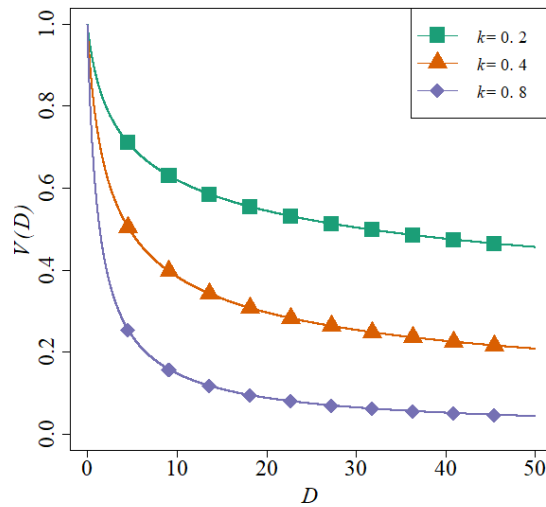


Figure4.3.12. 対数 - 指数型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状

#### 4.3.5 ベキ - 双曲線型とベキ - 一般化双曲線型の紹介

ベキ - 一般化双曲線型の確率加重関数 (Table4.3.1 モデル番号 8) は,

$$w(p) = [1 + bk((1/p-1)^a)]^{-1/b} \quad (4.3.9)$$

と表される。このモデルは、割引関数に一般化双曲線型を、心理物理関数にベキ関数を仮定することで導かれる。ベキ - 一般化双曲線型の確率加重関数に対応する遅延割引関数は,

$$V(D) = [1 + bk(D^a)]^{-1/b} \quad (4.3.10)$$

である。 $b=1$ とした場合がベキ - 双曲線型 (Table4.3.1 モデル番号 7) であり, Mazur (1987) が提案した。なお, ベキ - 双曲線型を  $a = 1$ とした場合には, 恒等 - 一般化双曲線型 (Table4.3.1 モデル番号 2), さらに  $b=1$ とした場合に恒等 - 双曲線型 (Table4.3.1 モデル番号 2) となる。ベキ - 双曲線型について, 確率加重関数と遅延割引関数のパラメータごとの形状の推移をそれぞれ Figure4.3.13 と Figure4.3.14 に示す。ベキ - 一般化双曲線型については, それぞれ Figure4.3.15 と Figure4.3.16 に示す。

パラメータ  $a$ に関する基本的な解釈について, ベキ - 双曲線型を例に述べる。パラメータ  $a$ は, 遅延時間に対する心理物理関数  $F(D) = D^a$  のパラメータであることから, 遅延時間の変化に対する敏感さあるいは感受性を表す。パラメータ  $a$ の値が 0 に近いほど, 現時点から近い時点の変化に敏感になり, 遠い時点になるほど変化に対して鈍感になる。遅延割引関数においては, パラメータ  $a$ の値が 0 に近いほど, 現時点から近い時点の変化に敏感であるため報酬の価値を大きく割り引き, 遠くなるほど変化に対して鈍感になることから割り引く程度は小さくなることを示している。Figure4.3.13b から, 確率加重関数においては, パラメータ  $a$ の値が 0 に近いほど, 確率 0 あるいは 1 付近における傾きが急になるこ

とから、端点付近の変化に対する敏感さを表している。したがって、パラメータ  $a$  は、遅延あるいは確率に対する敏感さを表していると解釈できる。なお、Gonzalez & Wu (1999) においても、パラメータに関する同様の解釈がなされている。

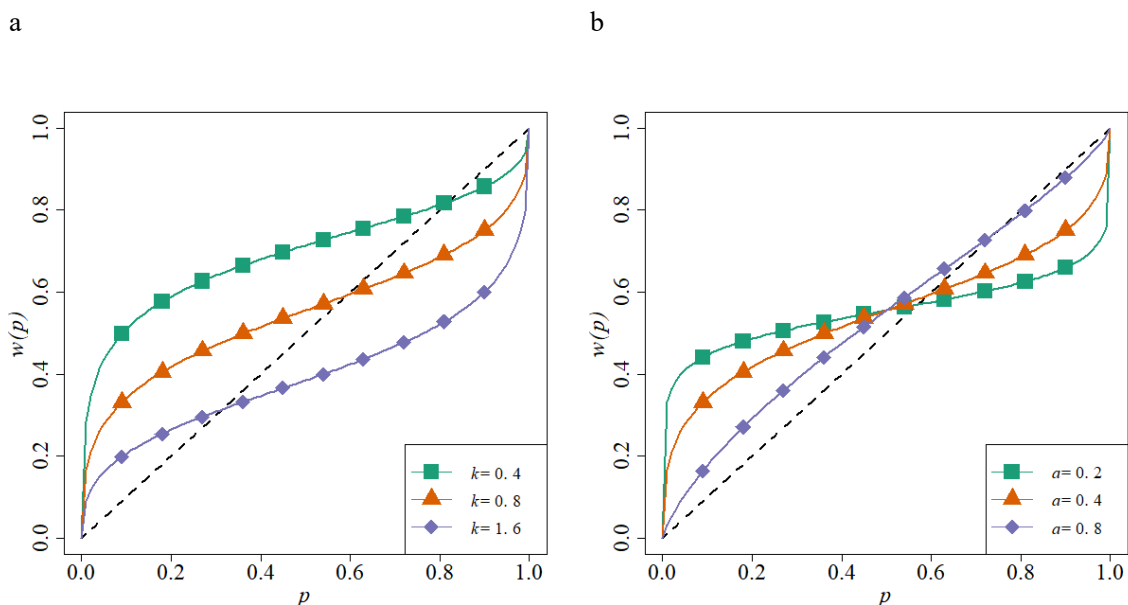


Figure4.3.13. ベキ - 双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $a=0.4$  で固定, 右(b) :  $k=0.8$  で固定)

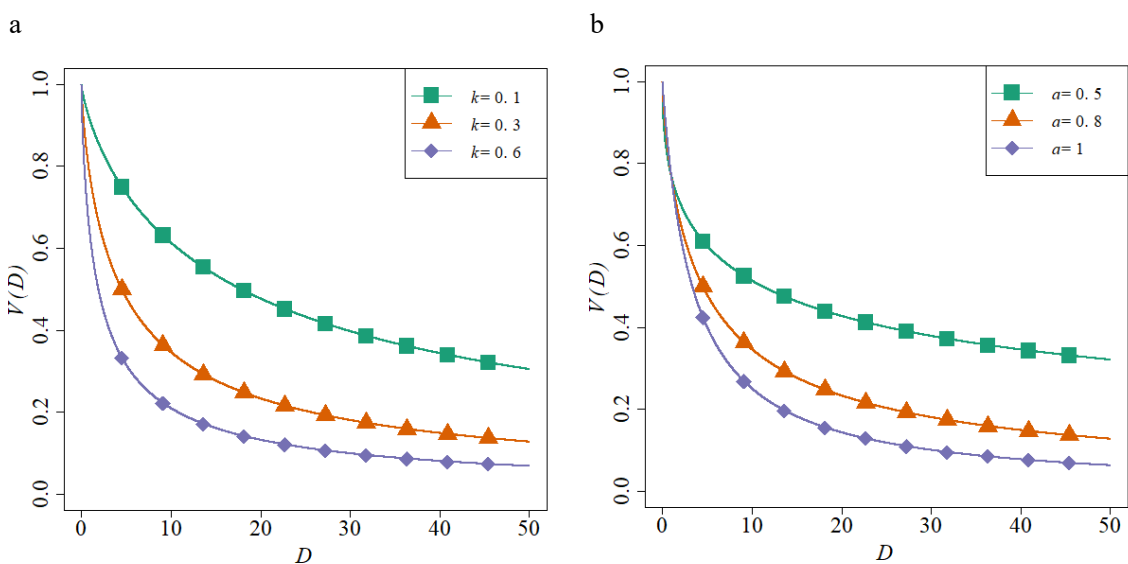
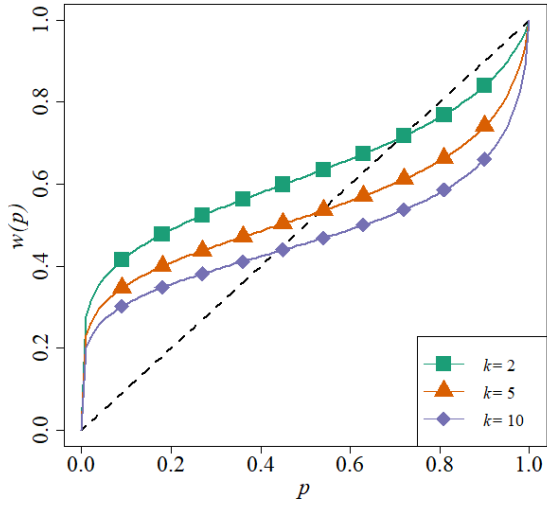
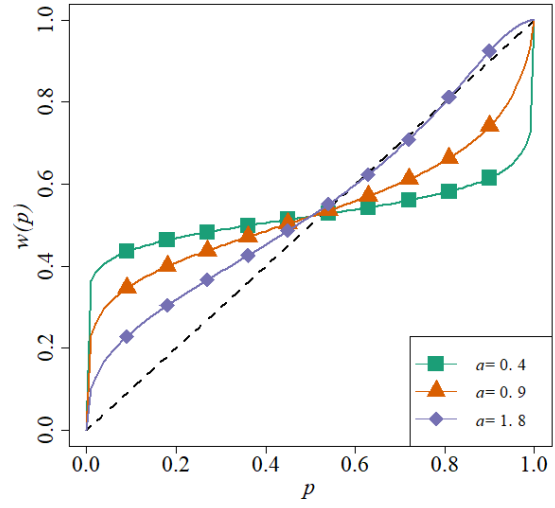


Figure4.3.14. ベキ - 双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状 (左 (a) :  $a=0.8$  で固定, 右(b) :  $k=0.3$  で固定)

a



b



c

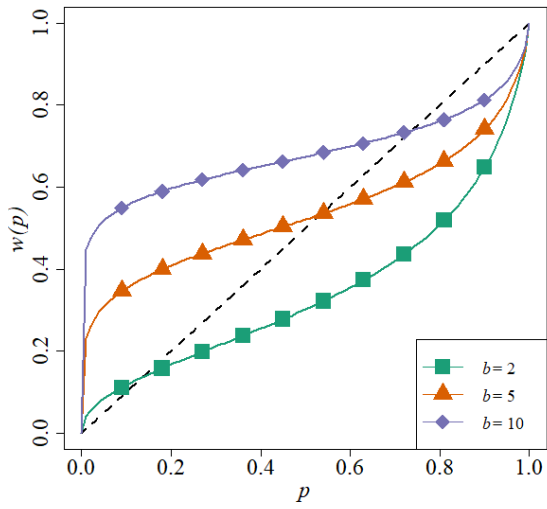


Figure4.3.15. ベキ - 一般化双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状 (左上 (a) :  $a=0.9$ ,  $b=5$  で固定, 右上(b) :  $k=5$ ,  $b=5$  で固定, 右下(c) :  $k=5$ ,  $a=0.9$  で固定)

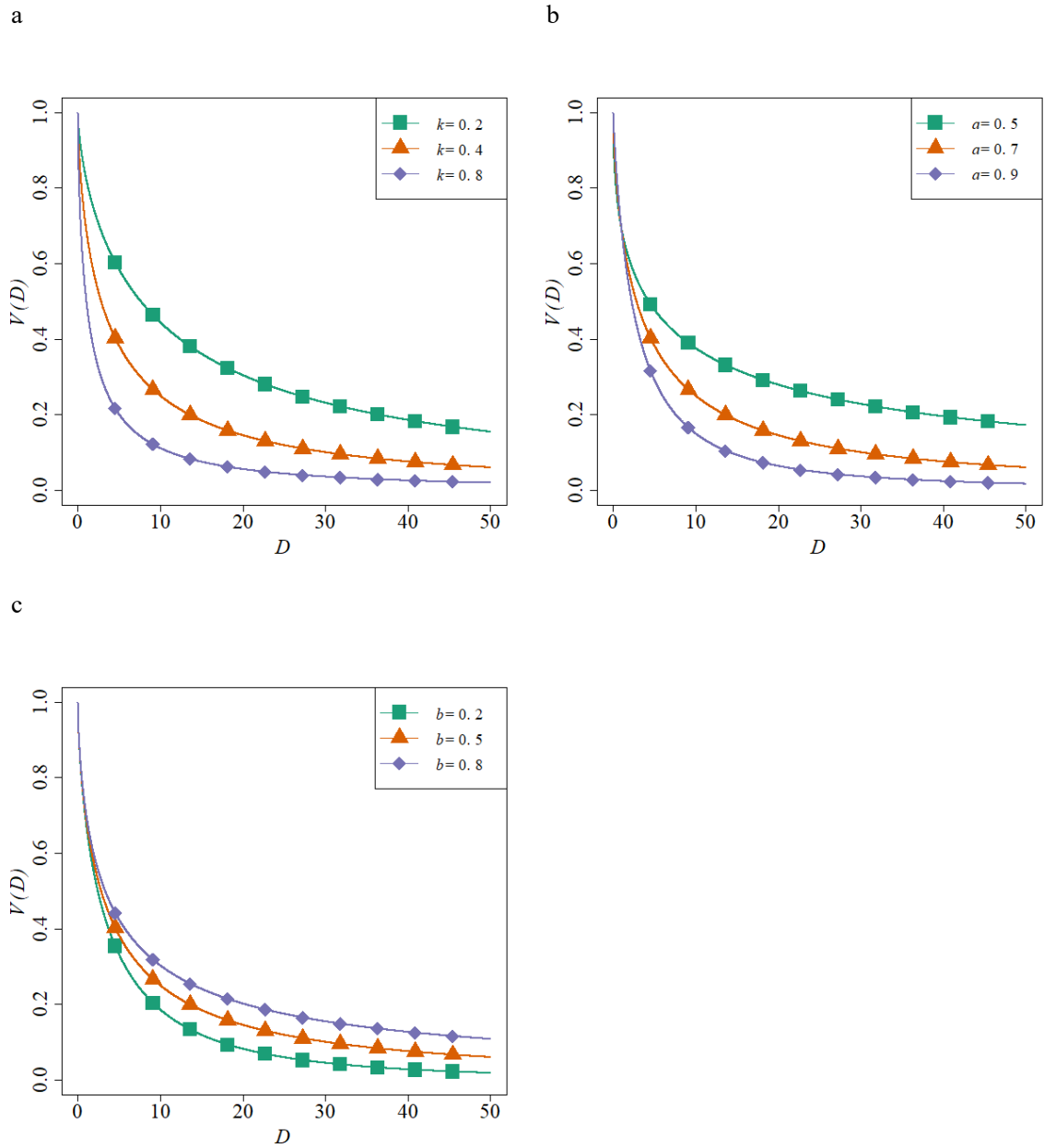


Figure4.3.16. ベキ - 一般化双曲線型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状 (左上 (a) :  $a=0.7$ ,  $b=0.5$  で固定, 右上(b) :  $k=0.4$ ,  $b=0.5$  で固定, 左下(c) :  $k=0.4$ ,  $a=0.7$  で固定)

#### 4.3.6 ベキ - 指数型の紹介

ベキ - 指数型の確率加重関数 (Table4.3.1 モデル番号 9) は,

$$w(p) = \exp[-k((1/p-1)^a)] \quad (4.3.11)$$

と表される。このモデルは Luce (2001) が提案したモデルである。このモデルは、割引関数に指数型を、心理物理関数にベキ関数を仮定することで導かれる。ベキ - 指数型の確率加重関数に対応する遅延割引関数は、

$$V(D) = \exp[-k(D^a)] \quad (4.3.12)$$

である。このモデルは Takahashi (2006) が提案したモデルである。また, Ebert & Prelec (2007) は  $V(D) = \exp[-(kD)^a]$  というモデルを提案している。ただし,  $V(D) = \exp[-(kD)^a] = \exp[-(k^a D^a)]$  であり,  $k^a = k'$  とおけば,  $V(D) = \exp[-k'(D^a)]$  となるので, 見た目上は同じモデルである。なお, ベキ - 指数型を  $a = 1$  とした場合には, 恒等 - 指数型 (Table 4.3.1 モデル番号 3) となる。ベキ - 指数型について, 確率加重関数と遅延割引関数のパラメータごとの形状の推移をそれぞれ Figure 4.3.17 と Figure 4.3.18 に示す。

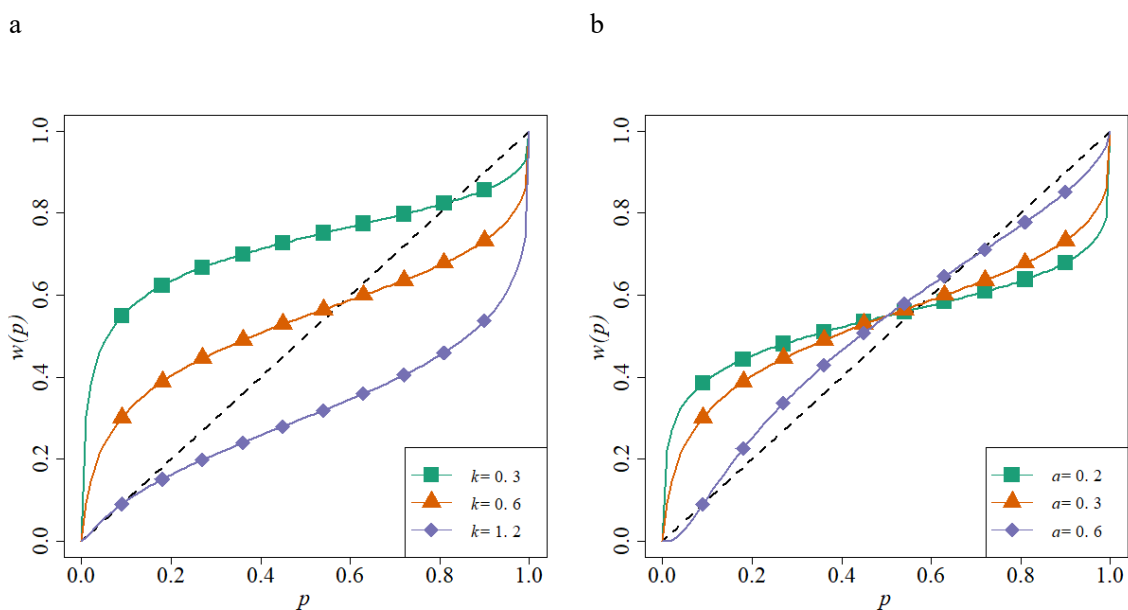


Figure 4.3.17. ベキ - 指数型における確率加重関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $a=0.3$  で固定, 右(b) :  $k=0.6$  で固定)



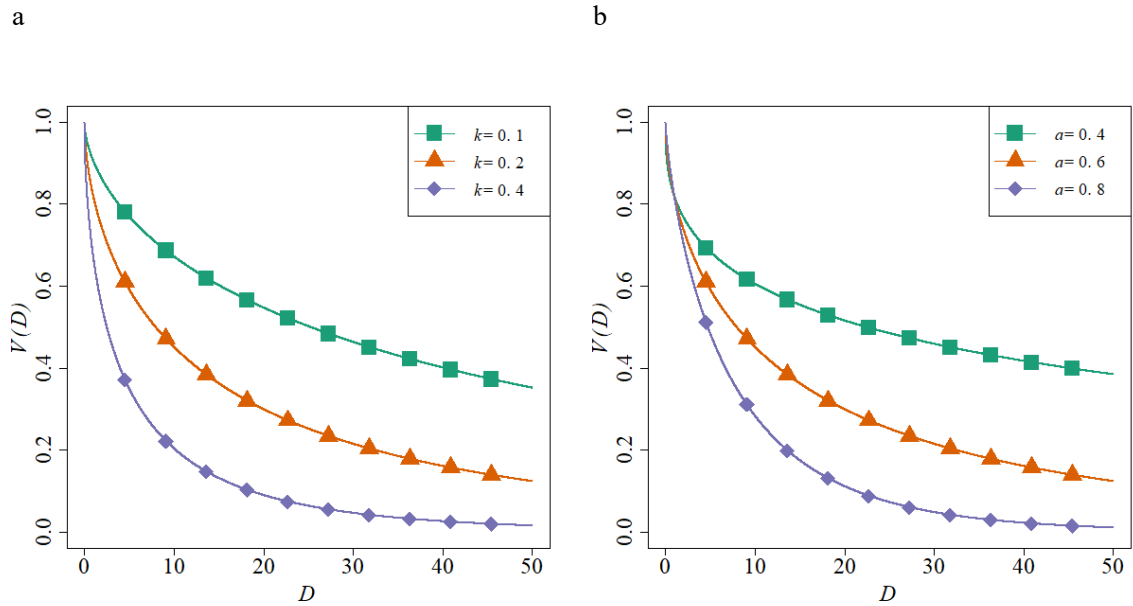


Figure4.3.18. ベキ - 指数型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $a=0.6$  で固定, 右(b) :  $k=0.2$  で固定)

#### 4.3.7 対数 + ベキ - 双曲線型と対数 + ベキ - 一般化双曲線型の紹介

対数 + ベキ - 一般化双曲線型の確率加重関数 (Table4.3.1 モデル番号 11) は,

$$w(p) = [1 + bk \{\log(1/p)\}^a]^{-1/b} \quad (4.3.13)$$

と表される。このモデルは、割引関数に一般化双曲線型を、心理物理関数に、対数関数とベキ関数を仮定することで導かれる。対数 + ベキ - 一般化双曲線型の確率加重関数に対応する遅延割引関数は,

$$V(D) = [1 + bk \{\log(D+1)\}^a]^{-1/b} \quad (4.3.14)$$

である。 $b=1$ とした場合が対数 + ベキ - 双曲線型 (Table4.3.1 モデル番号 10) である。また  $a=1$ とした場合には、対数 - 一般化双曲線型 (Table4.3.1 モデル番号 5), さらに  $b=1$ とした場合に対数 - 双曲線型 (Table4.3.1 モデル番号 4) となる。対数 + ベキ - 双曲線型について、確率加重関数と遅延割引関数のパラメータごとの形状の推移をそれぞれ Figure4.3.19 と Figure4.3.20 に示す。対数 + ベキ - 一般化双曲線型については、それぞれ Figure4.3.21 と Figure4.3.22 に示す。

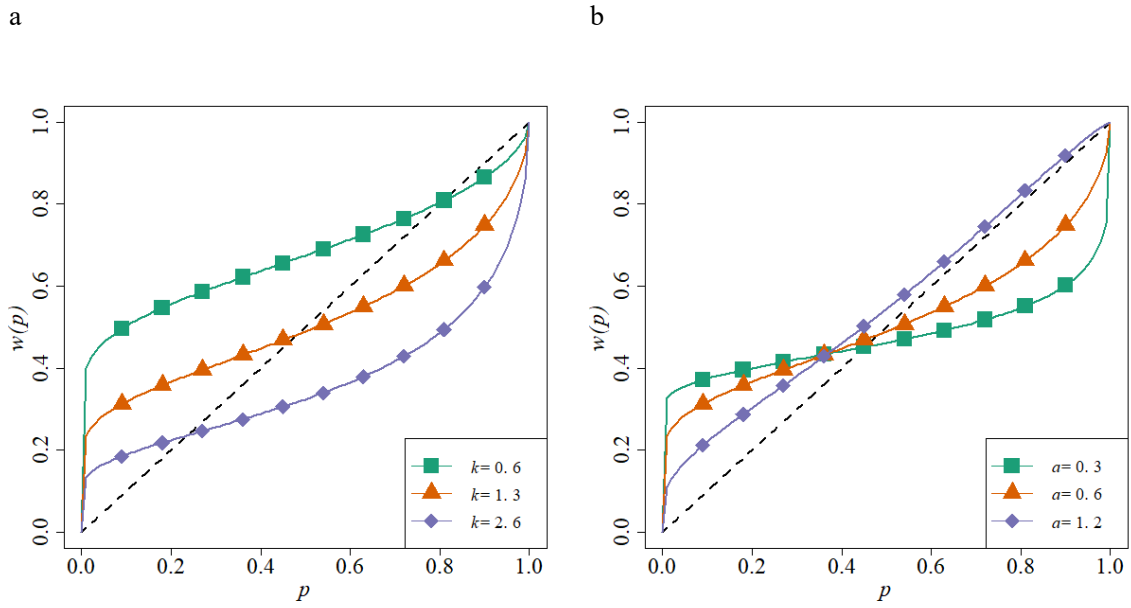


Figure4.3.19. 対数 + ベキ - 双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状 (左 (a) :  $a=0.6$  で固定, 右(b) :  $k=1.3$  で固定)

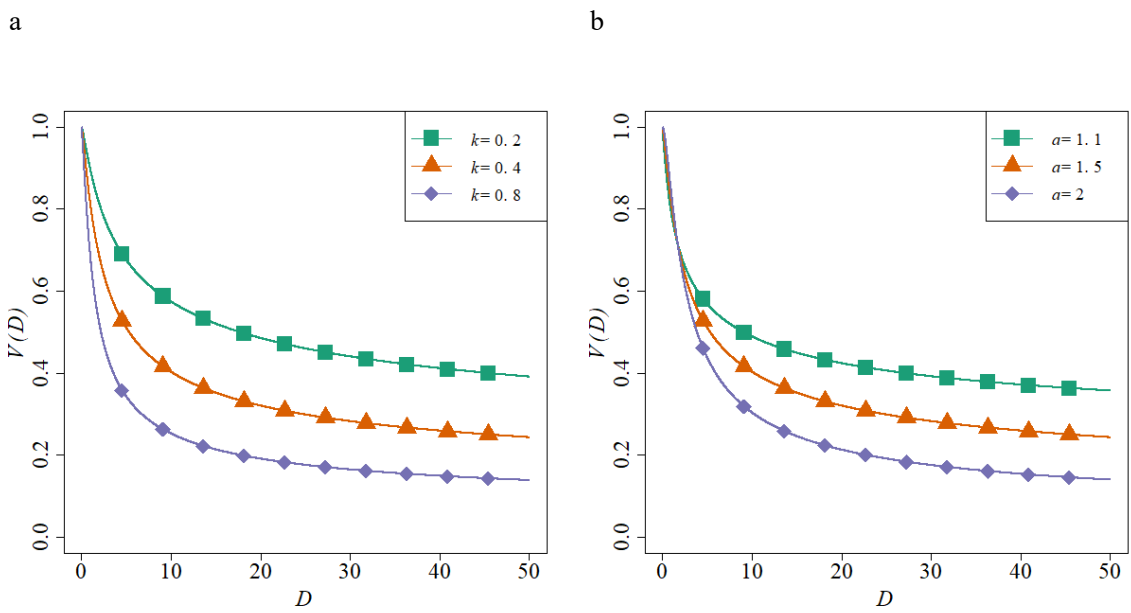
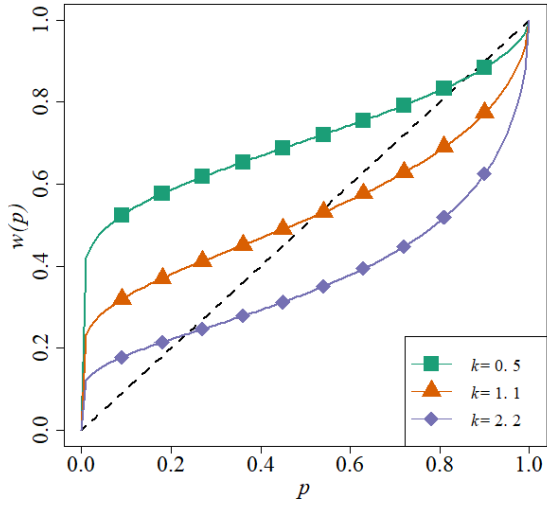
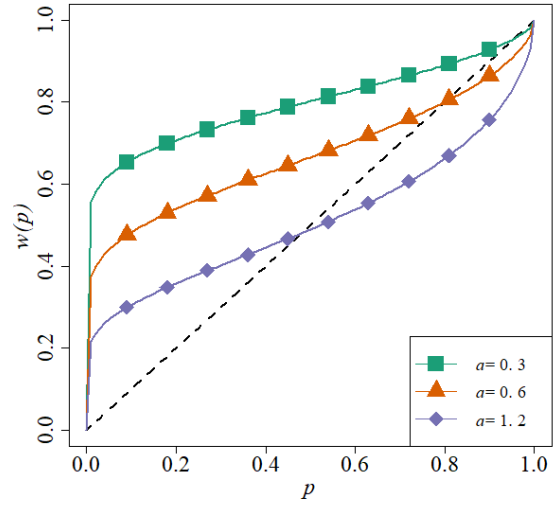


Figure4.3.20. 対数 + ベキ - 双曲線型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状 (左 (a) :  $a=1.5$  で固定, 右(b) :  $k=0.4$  で固定)

a



b



c

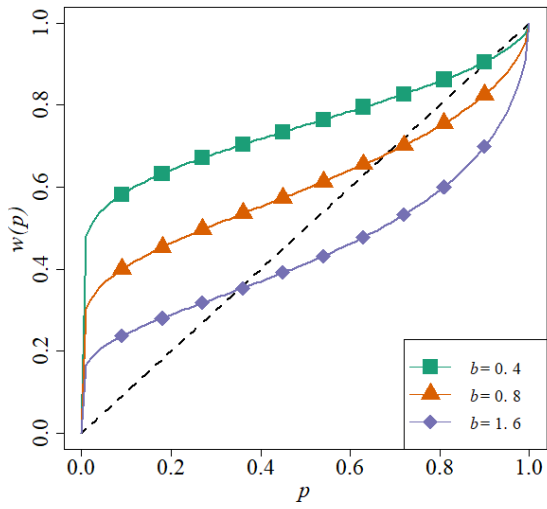


Figure4.3.21. 対数 + ベキ - 一般化双曲線型における確率加重関数のパラメータ毎の形状  
(左上(a) :  $a=0.6$ ,  $b=0.5$  で固定, 右上(b) :  $k=1.1$ ,  $b=0.8$  で固定, 左下(c) :  $k=1.1$ ,  $a=0.6$  で固定)

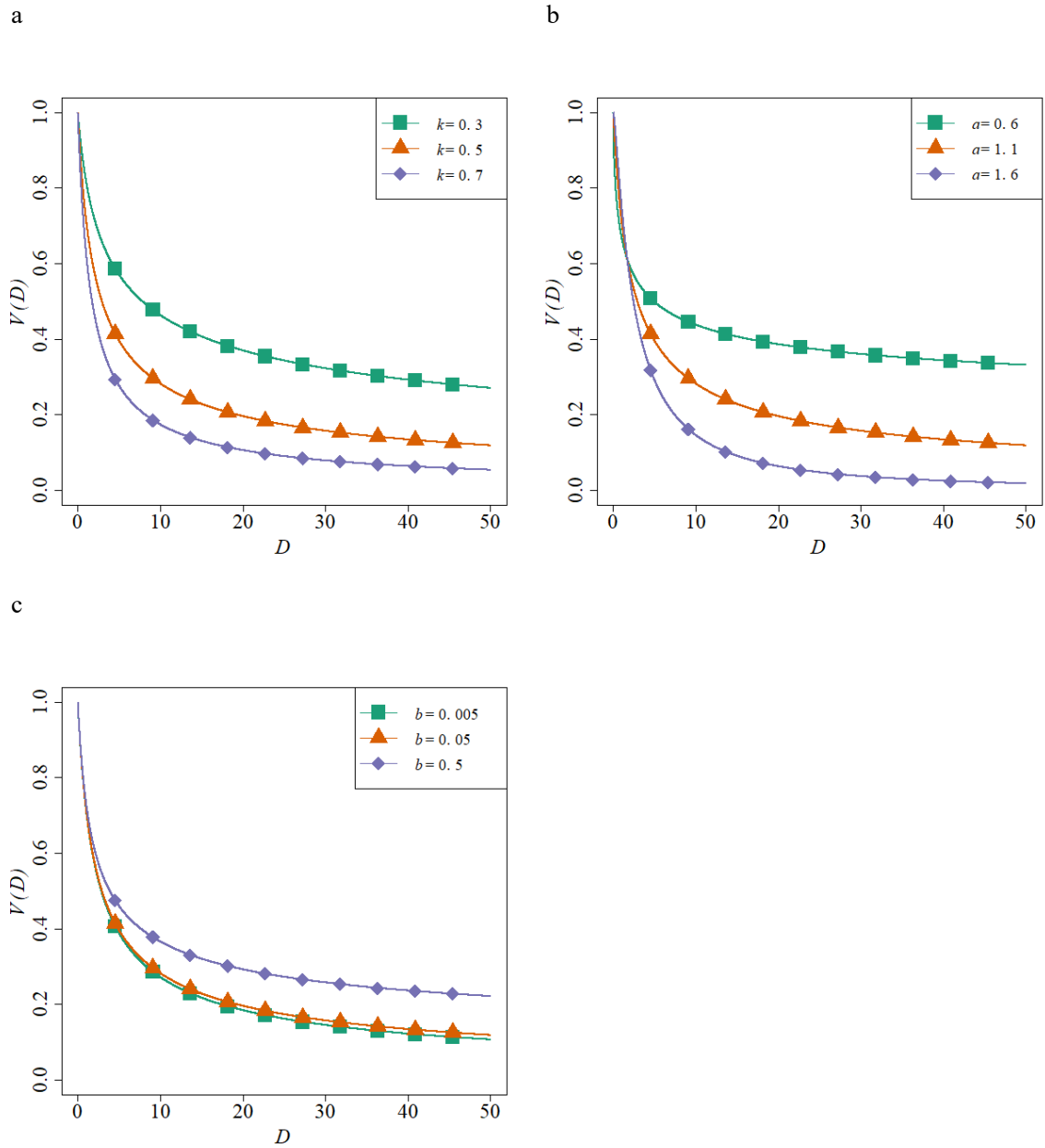


Figure4.3.22. 対数 + ベキ - 一般化双曲線型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状 (左上(a) :  $a=1.1$ ,  $b=0.05$  で固定, 右上(b) :  $k=0.5$ ,  $b=0.05$  で固定, 左下(c) :  $k=0.5$ ,  $a=1.1$  で固定)

#### 4.3.8 対数 + ベキ - 指数型の紹介

対数 + ベキ - 指数型の確率加重関数 (Table4.3.1 モデル番号 12) は,

$$w(p) = \exp[-k \{\log(1/p)^a\}] \quad (4.3.15)$$

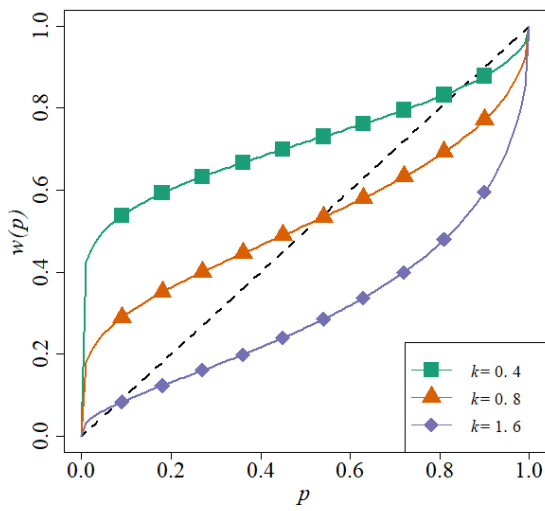
と表される。なお、上述のように Prelec (1998) が提案したモデルである。このモデルは、割引関数に指数型を、心理物理関数に、対数関数とベキ関数を仮定することで導かれる。

対数 + ベキ - 指数型の確率加重関数に対応する遅延割引関数は、

$$V(D) = \exp[-k \{\log(D+1)\}^a] \quad (4.3.16)$$

である。なお、対数 + ベキ - 指数型を  $a=1$  とした場合には、対数 - 指数型 (Table4.3.1 モデル番号 6) となる。対数 + ベキ - 指数型について、確率加重関数と遅延割引関数のパラメータごとの形状の推移をそれぞれ Figure4.3.23 と Figure4.3.24 に示す。

a



b

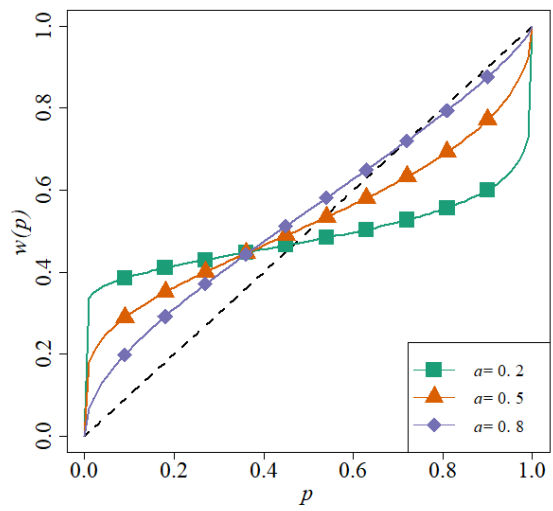
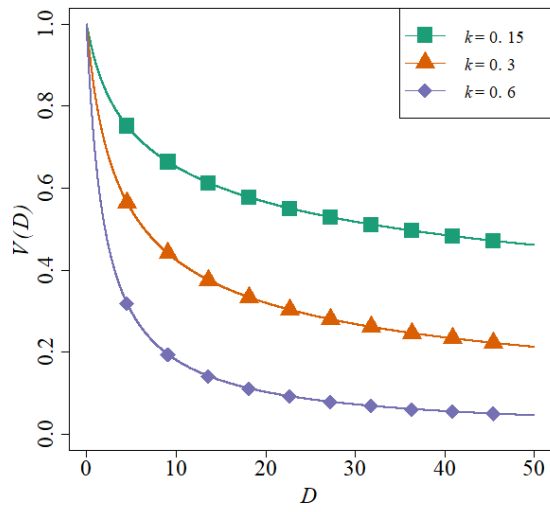


Figure4.3.23. 対数 + ベキ - 指数型における確率加重関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $a=0.5$  で固定, 右(b) :  $k=0.8$  で固定)

a



b

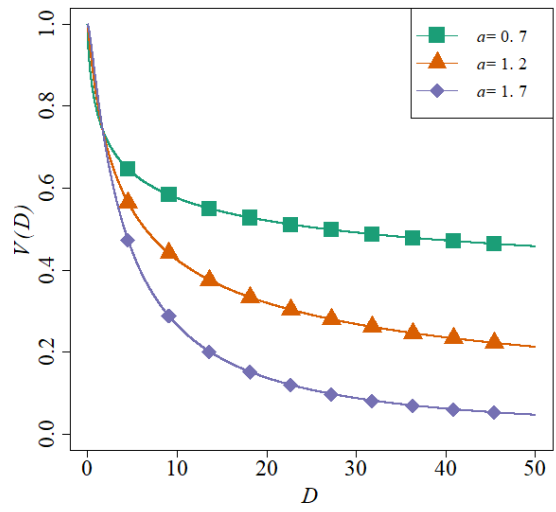


Figure4.3.24. 対数 + ベキ - 指数型における遅延割引関数のパラメータ毎の形状 (左(a) :  $a=1.2$  で固定, 右(b) :  $k=0.3$  で固定)

## 4.4 方法

以下では、4.4.1 節において、確率加重関数の推定実験について説明する。なお、この実験は Takemura & Murakami (2016) により行われたものである。次に、4.4.2 節では、確率加重関数のパラメータ推定について述べる。そして、4.4.3 節では、確率加重関数のパラメータ推定および推定に用いた先行研究のデータについて説明する。なお、推定方法には、マルコフ連鎖モンテカルロ法によるベイズ推定を用いた。

### 4.4.1 実験

**実験の概要** 実験の画面と実施例を Figure 4.4.1 に示す。課題では、確率と結果の情報が明示されたクジを画面左側に、画面右側に確実にもらえる金額の一覧を提示した。そして、実験参加者には、クジと確実にもらえる金額を一覧の上から順に比較させ、クジを選択する方が好ましいと感じた際の確実にもらえる金額を回答させた。

**手続き** 課題は、Tversky & Kahneman (1992) と Gonzalez & Wu (1999) の課題を簡易にした形式で行った。PC の画面左側には、クジ（たとえば、75%で 40,000 円、25%で 0 円をもらえる）を、右側には確実にもらえる金額の一覧を提示した。確実にもらえる金額の一覧は、クジの最高賞金額（たとえば 40,000 円）から最低賞金額（たとえば 0 円）までを、40,000, 38,400, 36,800...4,800, 3,200, 1,600, 0 と 4%間隔で 25 個とした。実験参加者は、一覧の最も高い金額（40,000 円）から順に、クジを引くことよりも好ましいかを一つずつ判断し、確実にお金をもらうことよりもクジを引くほうが好ましいと判断した時の金額（19,200 円）を回答した。実験参加者が回答すると、次の新しいクジと確実にもらえる金額の一覧を提示した。クジの提示順序は実験参加者間でランダムとした。

クジの確実同値額の推定値は、実験参加者がクジを引く方が好ましいと判断した金額の最高額（19,200円）と、確実にもらう方が好ましいと判断した金額の最低額（20,800円）との中点（20,000円）とした。また、確実にもらえる金額とクジを比較する際に、一覧の最も高い金額から順に判断を行っていく群と、最も低い金額から順に判断を行っていく群を設け、被験者間でカウンターバランスをとった。

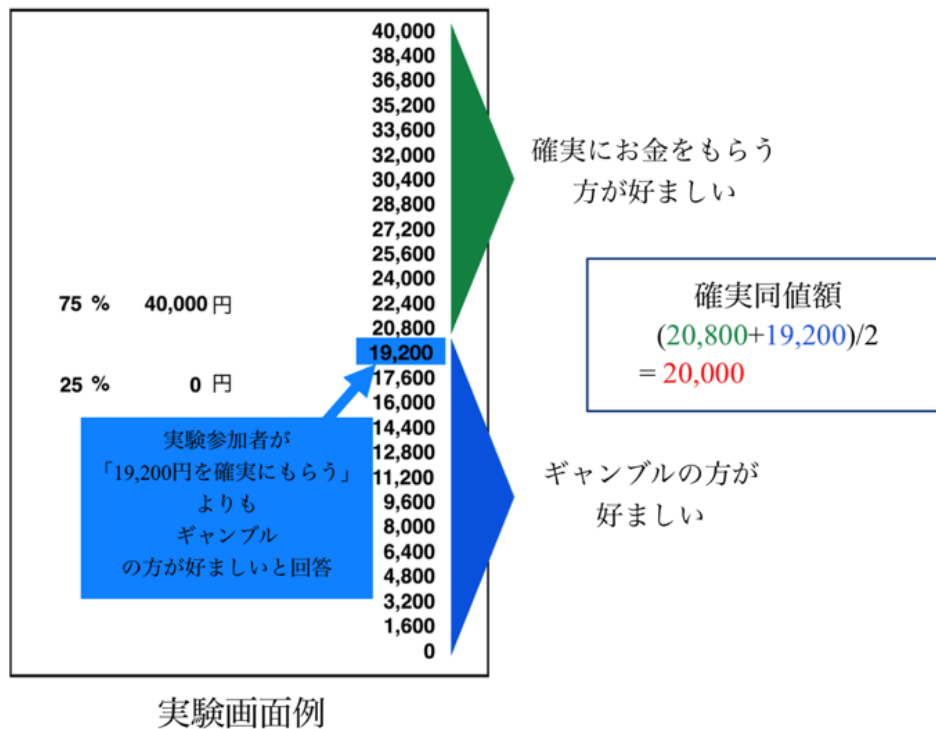


Figure 4.4.1. 実験画面の例と課題の説明

**刺激** 実験では 174 個のクジと確実にもらえる金額との選択データを得た。また 174 個中、165 個(結果 11 水準×確率 15 水準=165 種類)は推定用のデータに用いた。結果は、2,500-0, 5,000-0, 7,500-0, 10,000-0, 15,000-0, 20,000-0, 40,000-0, 80,000-0, 5,000-2,500, 7,500-5,000, 10,000-5,000, 15,000-5,000, 15,000-10,000, 20,000-10,000, 20,000-15,000 の 11 水準、確率は、0.01, 0.05, 0.10, 0.25, 0.40, 0.50, 0.60, 0.75, 0.90, 0.95, 0.99 の 15 水準を用いた。信頼性を測定するために、165 種類のクジのうちランダムに 9 種類を選び、繰り返し提示した。

**実験参加者** 実験参加者は 50 名(男性 15 名, 女性 35 名, 平均年齢 20.9 歳, SD=1.2)であった。信頼性を測定するために、繰り返し提示した九つのクジを用いて、級内相関係数を算出した。この際、九つのクジに対する確実に同値額を求めて、級内相関係数の算出に用いた。級内相関係数の中央値は 0.98 であった(最小値 0.36, 最大値は 1.00)。級内相関係数の値が 0.70 以下であった 4 名を除き、46 名(男性 15 名, 女性 31 名, 平均年齢 20.9 歳, SD=1.2)のデータを以降の分析対象とした。実験の所要時間は約 1 時間 30 分であった。なお、実験参加者 50 名中 10 名は口頭により回答を求め、実験者が回答を記録した。また、10 試行ごとに休憩の機会を設けた。謝礼は図書カード 2,000 円分とした。残りの 40 名についてはキ



一ボードを用いて回答を行った。また、43 あるいは 44 試行ごとに休憩時間を設けた。謝礼は図書カード 1,000 円分であった。

#### 4.4.2 確率加重関数のパラメータ推定

**パラメータ推定の概要** 推定は二つの段階で構成した。第 1 段階で、確率加重関数および価値関数に特定の関数（たとえば、ベキ関数  $v(x)=x^a$  など）を仮定せずに、11 水準の確率加重値と 8 水準の価値関数の値（以降、効用値と呼ぶ）を推定した（以降、推定手順 1 と呼ぶ）。第 2 段階では、第 1 段階で推定した確率加重値を用いて、確率加重関数のモデルのフリーパラメータの推定を行った（以降、推定手順 2 と呼ぶ）。

推定手順 1 では、Gonzalez & Wu (1999) および Takemura & Murakami (2016) の推定アルゴリズムを参考に、効用値 8 水準 ( $v(2,500)$ ,  $v(5,000)$ ,  $v(7,500)$ ,  $v(10,000)$ ,  $v(15,000)$ ,  $v(20,000)$ ,  $v(40,000)$ ,  $v(80,000)$ ), なお推定時には、 $v(2,500)$ ではなく 100 分の 1 にして  $v(25)$ , ...,  $v(800)$  について求めた) と確率加重値 11 水準 ( $w(0.01)$ ,  $w(0.05)$ ,  $w(0.10)$ ,  $w(0.25)$ ,  $w(0.40)$ ,  $w(0.50)$ ,  $w(0.60)$ ,  $w(0.75)$ ,  $w(0.90)$ ,  $w(0.95)$ ,  $w(0.99)$ ) を推定した。ただし、Gonzalez & Wu (1999) および Takemura & Murakami (2016) では、165 個の確実同値額を用いて推定していた。本研究では、クジあるいは確実に得られる金額の選択データを用いて推定を行った。

そして、推定手順 2 では、推定した 11 水準の確率加重値を用いて、確率加重関数のモデルのフリーパラメータを推定した。なお、推定手順 1, 2 のどちらにおいてもベイズ推定を用いた。以降では、推定手順 1 のデータ、具体的な推定方法、推定手順 2 のデータ、具体的な推定方法の順で述べる。

**推定手順 1 のデータ** クジ 165 種類（結果 11 水準×確率 15 水準）と確実にもらえる金額との選択データを用いた。クジ 1 種類につき、25 種類の確実にもらえる金額との選択データがあるため、実験参加者一人につき、総データ数は 4,125 個（クジ 165 種類×確実にもらえる金額 25 種類）であった。

**推定手順 1 の推定方法** 個人ごとに効用値 8 水準と確率加重値 11 水準の推定を行った。Gonzalez & Wu(1999)の推定アルゴリズムでは、プロスペクト理論の理論式  $v(CE) = w(p)v(X) + [1 - w(p)]v(Y)$  を仮定し、効用値 8 水準 ( $v(2,500)$ ,  $v(10,000)$  など) と確率加重値 11 水準 ( $w(0.01)$ ,  $w(0.50)$  など) を目的関数として推定していた。なお、 $X, Y$  は金額、 $p$  は  $X$  が生じる確率、 $CE$  は確率  $p$  で  $X$  円、残りの確率で  $Y$  円もらえるクジに対する確実同値額を表している。本研究の推定においても、プロスペクト理論の理論式により、 $j$  番目のクジの効用  $EU(\text{gamble}_j)$  を

$$EU(\text{gamble}_j) = w(p_n)v(X_l) + [1 - w(p_n)]v(X_m) \quad (4.4.1)$$

のように表した ( $j=1$  から 165 まで)。なお、 $p_k$  は、11 水準ある確率のうち第  $n$  水準 (たと

例えば,  $n=1$  なら  $p_1=1\%$ ,  $n=2$  なら  $p_2=5\%$  を,  $X_l$  は, 計 8 水準の金額の第  $l$  水準 (たとえば,  $l=1$  なら  $X_1=2500$  円,  $l=2$  なら  $X_2=5000$  円) を,  $X_m$  も  $X_l$  と同様に, 金額の第  $m$  水準を表している。

次に, 確実にもらえる金額の効用  $v(\text{sure})$  と  $j$  番目のクジの効用の差が正に大きいほど, 確実にもらえる金額を選びやすく, 逆に負に大きいほどクジを選びやすいことを表すために, (4.4.2)式のようにロジスティック関数を用いた。そして(4.4.2)式により得られた $\theta_i$ をパラメータとするベルヌーイ分布により, 選択データ (確実にもらえる金額を選択した場合  $\text{sure\_choice}_i=1$ , クジを選択した場合  $\text{sure\_choice}_i=0$ ) が生成されると仮定した。

$$\theta_i = \frac{1}{1 + \exp(-[v(\text{sure}_i) - EU(\text{gamble}_j)])} \quad (4.4.2)$$

$$\text{sure\_choice}_i \sim \text{Bernoulli}(\theta_i) \quad (4.4.3)$$

なお, 添え字  $i$  は,  $i$  番目の選択を表している ( $i=1$  から 4125 まで)。

上記のような仮定のもと, 選択データを生成するような効用値 8 水準 ( $v(X_l)$ ) と確率加重値 11 水準 ( $w(p_n)$ ) を推定した。効用値  $v(X_l)$  の事前分布として開区間  $(0, \infty)$  の一様分布を, 確率加重値  $w(p_n)$  の事前分布として開区間  $(0, 1)$  の一様分布を仮定した。また,  $\text{sure}_i$  は刺激として実験参加者に提示された確実にもらえる金額であるが, 確実にもらえる金額の効用  $v(\text{sure}_i)$  は価値関数  $v(\cdot)$  によって決まる値である。この  $v(\text{sure}_i)$  の値については, Gonzalez & Wu (1999) の推定アルゴリズムを参考に, 各イテレーションでの効用値  $v(X_l)$  から線形補間して求めた。

上記の推定方法に基づき, Stan を用いて推定を行った。長さ 23,000 のチェーンを五つ発生させ, バーンイン期間を 3,000 とし, 得られた 100,000 の乱数を利用した。実験参加者 46 名すべてで, どのパラメータの  $\hat{R}$  も 1.1 以下であったため, 事後分布に収束したと判断した。ここで用いた Stan のコードと実行時の設定を示した R のコードは付録 A.2 に載せた。

**推定手順 2 のデータ** 推定手順 1 で得られた確率加重値 11 水準  $w(p_n)$  に関する事後分布について, 事後期待値を求めた。推定手順 2 では, 実験参加者ごとの各水準の事後期待値を目的変数とする。

**推定手順 2 の推定方法** 推定手順 1 で得た確率加重値 11 水準の各事後期待値を用いて, 確率加重関数のモデルのフリーパラメータを推定した。この際, (4.4.4)から(4.4.8)式に示す階層ベイズモデルを用いた。目的変数である確率加重値 11 水準の各値を  $w_{pin}$ , パラメータ  $\theta_i$  を与えられたときの確率加重関数のモデルにおける 11 水準の値を  $w(p_n|\theta_i)$  と表記する。なお, 添え字の  $n$  は確率の水準を,  $i$  は実験参加者を表す。ボールド体はベクトルであることを示している。パラメータ  $\theta$  は確率加重関数のモデルによってはパラメータ数が三つの場合  $(k, a, b)$  から一つの場合  $(k)$  があるのでベクトル  $\theta = \{k, a, b\}$  や,  $\theta = \{k\}$  などを表し

ている。

$$\theta'_{\mu} \sim \text{normal}(0, 1) \quad (4.4.4)$$

$$\sigma_{\theta_i} \sim \text{normal}(0, 0.2) \quad (4.4.5)$$

$$\theta'_i \sim \text{normal}(0, 1) \quad (4.4.6)$$

$$\theta_i = \phi(\theta'_{\mu} + \sigma_{\theta_i} \times \theta'_i) \times \theta_{upper} \quad (4.4.7)$$

$$wp_{in} \sim \text{normal}(w(p_n | \theta_i), \sigma_{wp}) \quad (4.4.8)$$

(4.4.4)から(4.4.7)式は Ahn, Haines, & Zhang (2017) による遅延価値割引課題の階層ベイズモデルを参考にした。 $\theta'_{\mu}$ は、確率加重関数のモデルのパラメータのグループ平均であり、平均 0、標準偏差 1 の正規分布から生成されるとした。 $\sigma_{\theta_i}$ は、個人差の大きさを表し、平均 0、標準偏差 0.2 の半正規分布から生成されるとした。 $\theta'_i$ は、個人差に関するパラメータであり、平均 0、標準偏差 1 の正規分布から生成されるとした。(4.4.7)式において、(4.4.4)～(4.4.6)式のパラメータを個人ごとの確率加重関数のモデルのパラメータ $\theta_i$ に変換した。具体的には、 $\theta'_{\mu} + \sigma_{\theta_i} \times \theta'_i$ の値を標準正規累積分布関数 $\phi$ で 0 から 1 の値に変換し、モデルのパラメータの最大値に設定した値 $\theta_{upper}$ を掛けた。なお、パラメータの最大値は基本的には 100 とした。(4.4.8)式では、(4.4.7)式の $\theta_i$ を与えた確率加重関数のモデルにおける各水準の値 $w(p_n | \theta_i)$ を平均、 $\sigma_{wp}$ を標準偏差とした正規分布から、 $wp_{in}$ が生成されるとした。

一般化双曲線型の場合、たとえばベキ - 一般化双曲線型  $w(p) = [1 + bk((1/p - 1)^a)]^{-1/b}$  については、 $bk = k'$ のように一つのパラメータとして推定し、 $k = k'/b$ としてパラメータ  $k$  を求めた。また、パラメータ  $k'$ の最大値について、恒等 - 一般化双曲線型と対数 - 一般化双曲線型は 300、ベキ - 一般化双曲線型は 200 に設定し、パラメータ  $k$  は 0 以上とした。

上記の推定方法に基づき、Stan を用いて推定を行った。長さ 25,000 のチェーンを五つ発生させ、バーンイン期間を 5,000 とし、得られた 100,000 個の乱数を用いた。どのパラメータの収束判定指標 $\hat{R}$ も 1.1 以下であったため、事後分布に収束したと判断した。ここで用いた Stan のコードと実行時の設定を示した R のコードは付録 A.3 に載せた。

#### 4.4.3 遅延割引関数のパラメータ推定

**パラメータ推定の概要** 竹村・村上 (2018, 2019) と同様に、先行研究のデータを再分析した。分析に用いたデータの詳細については、次の節で述べる。また、確率加重関数の推定時とは違い、遅延割引の場合は選択データではなく、遅延報酬に対する現在報酬の主観的等価点のデータを用いた。このため、遅延割引関数の推定では、確率加重関数における推定手順 1 に対応する推定手順はなく、推定手順 2 に対応する推定を行った。以降では、推定に用いたデータ、推定方法の順に述べる。

**遅延割引関数の推定に用いたデータ** Table 4.4.1 に遅延割引関数の推定に用いたデータ

をまとめた (Estle, Green, Myerson, & Holt, 2006; Green, Myerson, & McFadden, 1997; Green, Myerson, & Ostaszewski, 1999; McKerchar, Green, Myerson, Pickford, Hill, & Stout, 2009; Murphy, Vuchinich, & Simpson, 2001; Myerson & Green, 1995; Myerson, Green, Hanson, Holt, & Estle, 2003; Odum & Rainaud, 2003; Rachlin et al., 1991; Simpson & Vuchinich, 2000)。先行研究のデータは、各論文の図に示されていた主観的等価点の中央値のプロットから、ソフトウェア PlotDigitizer X を用いて、数値化した。遅延期間に関しては、各論文に数値として記載されていた期間を用いた。Green et al. (1997), Murphy et al. (2001), Simpson & Vuchinich (2000) では、主観的等価点の中央値が数値で記載されていたため、その値を用いた。また、Green et al. (1997) では、主観的等価点を遅延報酬量で割った割合について小数点第 2 位までが記載されていた。このため、プロットから数値化した値および記載された数値についても、割合を求めた上で、小数点第 3 位で四捨五入した値を用いた。

論文に記載されていたデータに関して補足をする。Myerson & Green (1995) で用いられたデータは、Green, Fry, & Myerson (1994) で行われた世代層と遅延割引に関する実験で、大学生 12 名のデータである。Simpson & Vuchinich (2000) は遅延割引関数の実験結果の信頼性について検討されており、期間を空けて 2 回同じ課題を実施していた。ここでは 1 度目の課題の結果のみを用いた。

Table 4.4.1  
 遅延割引関数の推定に用いたデータの概要

使用したデータ	実験参加者数	遅延期間	分析時に用いられた遅延期間の単位	金額
1 Estle et al. (2006)	20名	1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 3年, 5年, 10年, 20年	月	\$200
2 Estle et al. (2006)				\$40,000
3 Estle et al. (2006)	27名	1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 3年, 5年, 8年, 12年, 20年		\$100
4 Estle et al. (2006)				\$20,000
5 Estle et al. (2006)				\$60,000
6 Green et al. (1997)	24名	3ヶ月, 6ヶ月, 1年, 3年, 5年, 10年, 20年		\$100
7 Green et al. (1997)				\$2,000
8 Green et al. (1997)				\$25,000
9 Green et al. (1997)				\$100,000
10 Green et al. (1999)	68名	1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 3年, 5年, 10年		\$500
11 Green et al. (1999)				\$10,000
12 Green et al. (1999)	30名			\$200
13 Green et al. (1999)				\$5,000
14 Green et al. (1999)				\$100,000
15 McKerchar et al. (2009)	64名	1日, 1週間, 1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 5年, 25年	日	\$1,000
16 Murphy et al. (2001)	28名	1週間, 1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 3年, 5年, 10年, 25年	月	\$500
17 Myerson & Green (1995)	12名	1週間, 1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 3年, 5年, 10年, 25年		\$1,000
18 Myerson & Green (1995)				\$10,000
19 Myerson et al. (2003)	101名	1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 2年, 5年, 8年, 12年		\$200
20 Myerson et al. (2003)	101名			\$40,000
21 Myerson et al. (2003)	171名	1週間, 1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 3年, 5年, 10年		\$200
22 Myerson et al. (2003)	171名			\$25,000
23 Odum & Rainaud (2003)	20名	1週間, 2週間, 1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 5年, 25年		\$100
24 Rachlin et al. (1991)	40名	1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 5年, 10年, 25年, 50年		\$1,000
25 Simpson & Vuchinich (2000)	17名	1週間, 1ヶ月, 6ヶ月, 1年, 3年, 5年, 10年, 25年		\$1,000

**推定方法** 遅延割引関数のモデルのフリーパラメータを推定した。推定方法は、基本的には確率加重関数に関する推定手順 2 と同様である。推定の際、(4.4.9)から(4.4.13)式に示す階層ベイズモデルを用いた。各データの主観的等価点を $dd_{it}$ 、パラメータ $\theta$ を与えられたときの遅延割引関数のモデルにおける各時点の値を $v(t|\theta_i)$ と表記する。なお、 $t$ は時点を、添え字の $i$ は先行研究のデータを表す。 $\theta$ は遅延割引関数のモデルのパラメータを表している。(4.4.9)から(4.4.13)式の階層ベイズモデルは、確率加重関数の推定(4.4.4)から(4.4.8)式を遅延割引関数のモデルに合わせて適宜、置き換えたものである。なお、一般化双曲線型の場合、前項の確率加重関数の推定と同様に $bk=k'$ のように一つのパラメータとして推定し、 $k=k'/b$ としてパラメータ $k$ を求めた。

$$\theta'_\mu \sim normal(0, 1) \quad (4.4.9)$$

$$\sigma_{\theta_i} \sim normal(0, 0.2) \quad (4.4.10)$$

$$\theta'_i \sim normal(0, 1) \quad (4.4.11)$$

$$\theta_i = \phi(\theta'_\mu + \sigma_{\theta_i} \times \theta'_i) \times \theta_{upper} \quad (4.4.12)$$

$$dd_{it} \sim normal(v(t|\theta_i), \sigma_{dd}) \quad (4.4.13)$$

上記の推定を行う際、すべてのデータについて、遅延期間の単位をそろえる必要がある。そこで、遅延期間の単位について 2 パターン（日、月）を用意し、それぞれについて推定を行った。

上記の推定方法に基づき、Stan を用いて推定を行った。長さ 25,000 のチェーンを五つ発生させ、バーンイン期間を 5,000 とし、得られた 100,000 の乱数を利用した。どのパラメータの収束判定指標 $\hat{R}$ も 1.1 以下であったため、事後分布に収束したと判断した。ここで用いた Stan のコードや実行時の設定を示した R のコードは付録 A.4 に載せた。なお、フリーパラメータの範囲は 0 から 20 とした。

## 4.5 結果

本節では、確率加重関数および遅延割引関数に関する推定結果を示す。4.6節で両関数の比較し、考察を行う。以下では、4.5.1において確率加重関数に関する推定手順1の結果、4.5.2で推定手順2の結果、4.5.3で遅延割引関数の結果について述べる。

### 4.5.1 確率加重関数に関する推定手順1の推定結果

推定手順1の推定結果を示す。Figure 4.5.1とFigure 4.5.2に、一例として、実験参加者1番の効用値8水準と確率加重値11水準をそれぞれ示す。横軸に実験参加者に提示された金額あるいは確率を、縦軸に効用値あるいは確率加重値の各水準の値を配した。なお、効用については0~1の値をとるように参加者ごとの最大値で割った値を用いた。破線は45度線を示している。また、実験参加者19番を除いた実験参加者45名の効用および確率加重値をプロットした結果と、各水準における平均値をFigure 4.5.3とFigure 4.5.4に示す。なお、個人ごとの値は白丸で、各水準における平均値は黒丸で示している。Figure 4.5.3とFigure 4.5.4から除いた実験参加者19番のプロットをFigure 4.5.5とFigure 4.5.6に示す。

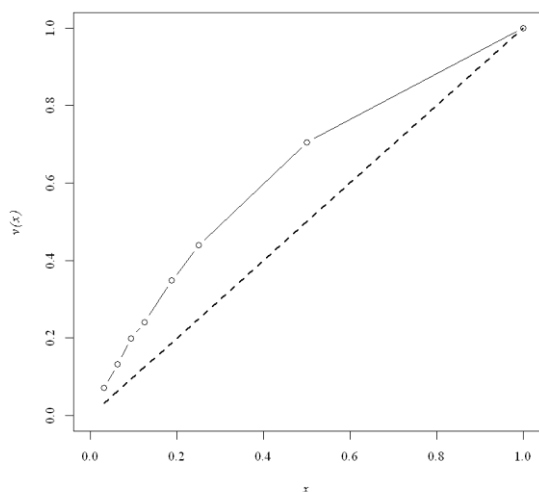


Figure 4.5.1. 実験参加者1番に関する効用値8水準のプロット

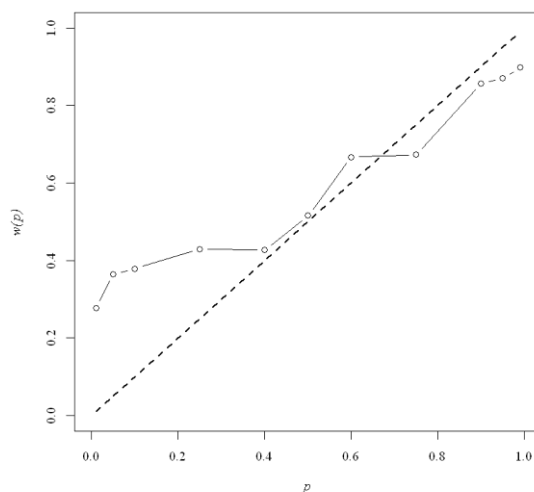


Figure 4.5.2. 実験参加者1番に関する確率加重値11水準のプロット

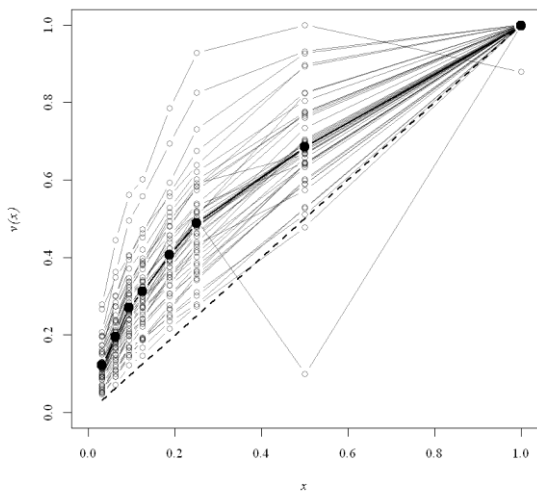


Figure 4.5.3. 実験参加者 45 名に関する効用値 8 水準のプロットと各水準の平均値 (白丸が個人, 黒丸が平均値を表している)

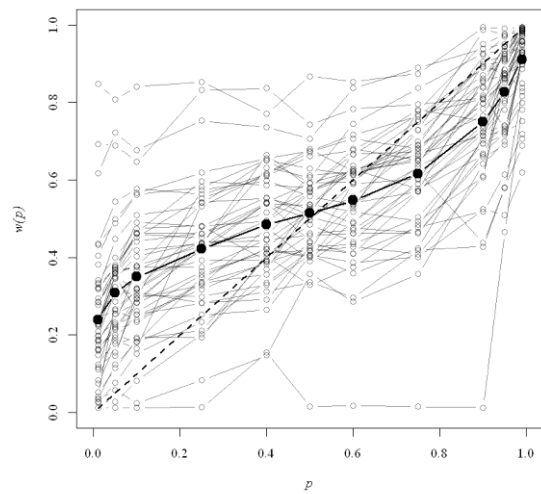


Figure 4.5.4. 実験参加者 45 名に関する確率加重値 11 水準のプロットと各水準の平均値 (白丸が個人, 黒丸が平均値を表している)

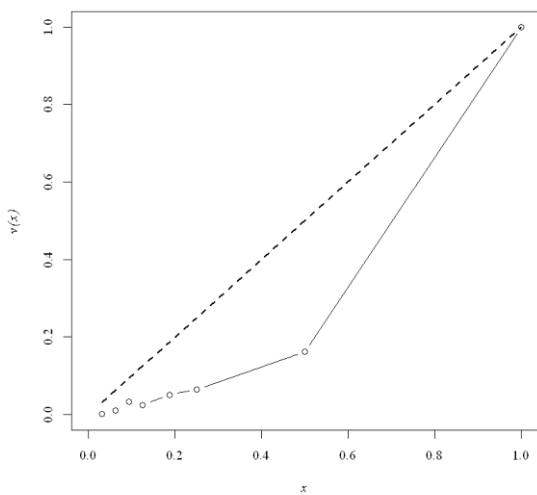


Figure 4.5.5. 実験参加者 19 番に関する効用値 8 水準のプロット

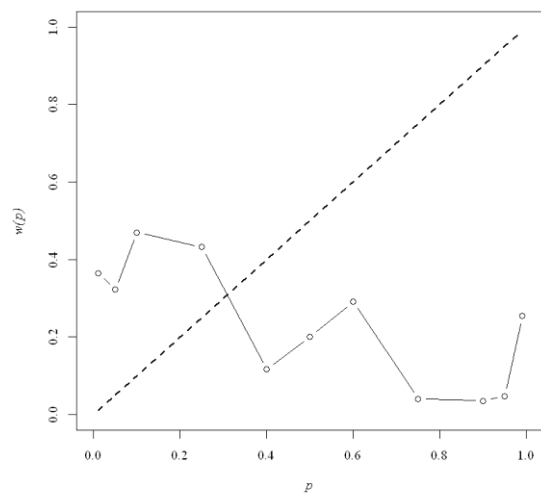


Figure 4.5.6. 実験参加者 19 番に関する確率加重値 11 水準のプロット

Figure 4.5.1 の実験参加者 1 番の効用値から, 価値関数は下に凹の形状であることが示された。Figure 4.5.2 の実験参加者 1 番の確率加重値から, およそ確率 0.4 まで過大評価し, 確率 0.8 以上から過小評価あるいは, 線形に近い評価をしていることが示された。実験参加者 1 番の価値関数は下に凹の形状であり, また確率加重関数は, 過小評価の傾向は小さいが,



およそ逆 S 字の形状を示した。実験参加者 1 番については両関数ともに、従来の研究で認められることの多い形状が示された。

実験参加者 45 名の効用を示した Figure 4.5.3 においても、およそ 45 度の線よりも左上にプロットされたことから、45 名の価値関数は下に凹の形状であった。45 名の確率加重値を示した Figure 4.5.4 では、逆 S 字以外にも、下に凹の形状や下に凸の形状が認められた。また、各水準における 45 名の平均値を示した黒丸は、従来の研究で報告されている逆 S 字の形状であった。ただし、45 度線との交点は 0.5 付近であり、Prelec (1998) のモデルで仮定されている交点  $\exp(-1) \approx 0.37$  よりも高い位置であった。

実験参加者 19 名の効用値のプロット (Figure 4.5.5) では、45 名の参加者とは異なり、下に凸の形状であった。また、確率加重値のプロットは、提示された確率が高くなるほど確率加重値が低くなる傾向が示された。一般に確率加重関数は単調性が仮定されているため、実験参加者 19 番については、推定手順 2 では用いなかった。

#### 4.5.2 確率加重関数のフリーパラメータの推定 (推定手順 2) の結果

推定手順 1 により推定した確率加重値 11 水準を用いて、確率加重関数のモデルのフリーパラメータを推定した推定手順 2 の結果を示す。以下では、まず、推定結果から各モデルをプロットし、心理物理関数の型および割引関数の型の観点から整理して示す。次に、WAIC を用いて、各モデルの評価を行った。そして、WAIC によるモデルの評価に基づいて順位付けを行い、心理物理関数の型および割引関数の型の観点から整理した結果を述べる。なお、下記の確率加重関数のプロットには、モデルのフリーパラメータの事後中央値を用いた。事後中央値を用いたのは、単にプロットの見た目上、事後期待値を用いた場合よりも事後中央値を用いた方が確率加重値 11 水準の値  $w_{p_{in}}$  との乖離が小さかったためである。また、凡例は、心理物理関数が恒等関数の場合「△」、対数関数は「+」、ベキ関数は「□」、対数 + ベキ関数は「◇」とした。割引関数については、双曲線型を実線あるいは青色、一般化双曲線型を点線あるいは紫色、指数型を破線あるいはオレンジ色で表した。

**各モデルの推定結果によるプロット** まず、Figure 4.5.7 に一例として実験参加者 1 番に関する各モデルと確率加重値のプロットを示す。すべての参加者のプロットは、付録 B.1 に示す。また、参加者レベルにおける各モデルの推定値のヒストグラムを付録 B.2 に示す。Figure 4.5.7 から、実験参加者 1 番については、割引関数が一般化双曲線型のときを除けば心理物理関数が恒等関数あるいは対数関数の場合に当てはまりが悪いことが示された。

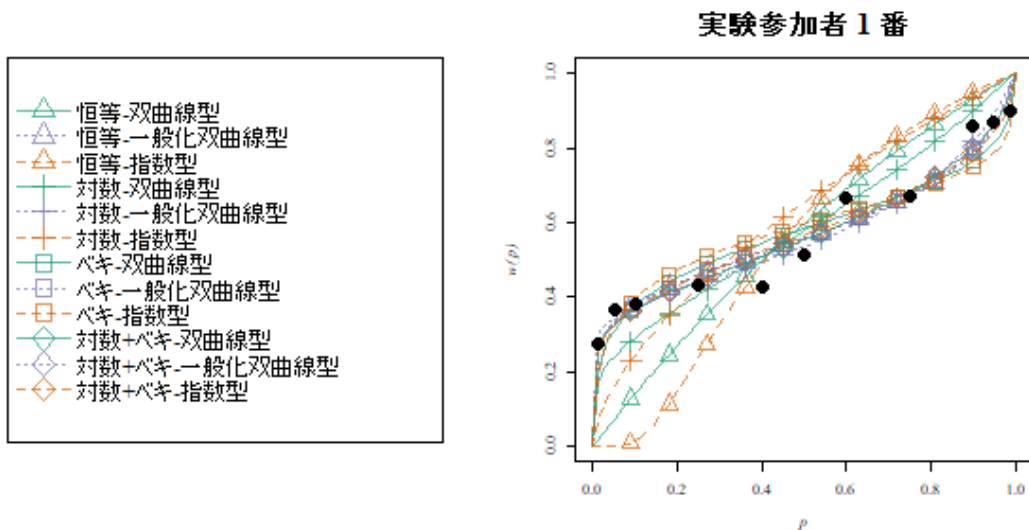


Figure 4.5.7 実験参加者1番の確率加重値と、12個のモデルのプロット（黒丸が確率加重値を表している）

各モデルのフリーパラメータに関するグループレベルのプロットを Figure 4.5.8 に示す。 $w(p) = p$  の場合を「+」などのマーカーをつけず黒い破線で表した。なお、具体的な推定値は付録 B.3 に示す。Figure 4.5.8 から、おおまかに恒等関数あるいは対数関数モデル（一般化双曲線型の場合を除く）と、それ以外のモデルで形状が分かっていた。また、逆 S 字の形状をとれるモデルについて、 $w(p) = p$  との交点位置は確率 0.5 から 0.6 付近であった。

Figure 4.5.8 を心理物理関数の型ごとに分割したプロットを Figure 4.5.9 に示す。Figure 4.5.9 の左上 a が恒等関数，右上 b が対数関数，左下 c がベキ関数，右下 d が対数 + ベキ関数である。Figure 4.5.9 から、心理物理関数の型が恒等関数あるいは対数関数の場合は、割引関数の型の種類によって形状が異なっていた。一方で、心理物理関数の型がベキ関数と対数 + ベキ関数では、割引関数の型による形状の違いはほぼなかった。心理物理関数の型ごとに割引関数の型による形状の違いをみてみると、恒等関数では一般化双曲線型のみが逆 S 字の形状となっていた。また、対数関数では双曲線型と一般化双曲線型が逆 S 字であったが、双曲線型の方が  $w(p) = p$  に近い形状であった。心理物理関数の型がベキ関数と対数 + ベキ関数では、割引関数の型によらず、ほぼ同じ形状であったが、確率 0.2 から 0.6 付近において、双曲線型の方が指数型よりも下にプロットされていた。また、ベキ関数の場合に、一般化双曲線型は双曲線型と指数型に比べると端点付近（確率 0 あるいは 1 付近）において、やや上方にプロットされていた。一方、対数 + ベキ関数では、一般化双曲線型は指数型とほぼ重なっていた。

次に、Figure 4.5.8 を割引関数の型ごとに分割したプロットを Figure 4.5.10 に示す。左上 a が双曲線型、右上 b が指数型、左下 c が一般化双曲線型である。Figure 4.5.10 から、双曲線型と指数型のどちらにおいても、心理物理関数が、ベキ関数と対数+ベキ関数の場合には、比較的類似した形状であった。恒等関数あるいは対数関数の場合では他のモデルとは異なる形状となった。一方、Figure 4.5.10 左下の一般化双曲線型では、心理物理関数の型によらず、逆 S 字の形状となっていた。特に端点付近の形状はほぼ違いがなかった。割引関数の型ごとに心理物理関数による形状の違いをみると、Figure 4.5.10 左上 a と右上 b の双曲線型と指数型から、ベキ関数の方が対数+ベキ関数よりも確率 0 付近で傾きが緩やかであったが、逆に確率 1 付近では傾きが急であった。また、確率 0.1 から 0.7 付近において、ベキ関数の方が対数+ベキ関数よりも上にプロットされていたことから、客観的な確率を過大評価する傾向が認められた。また、Figure 4.5.10 左下 c の一般化双曲線型のモデルについて、端点付近ではほぼ重なり合っているが、端点付近以外ではベキ関数が最も上方、対数関数が最も下方に位置していた。また恒等関数が対数関数のやや上方にあり、対数+ベキ関数は、およそ確率 0.5 までは恒等関数と、それ以降ではベキ関数とほぼ重なっていた。

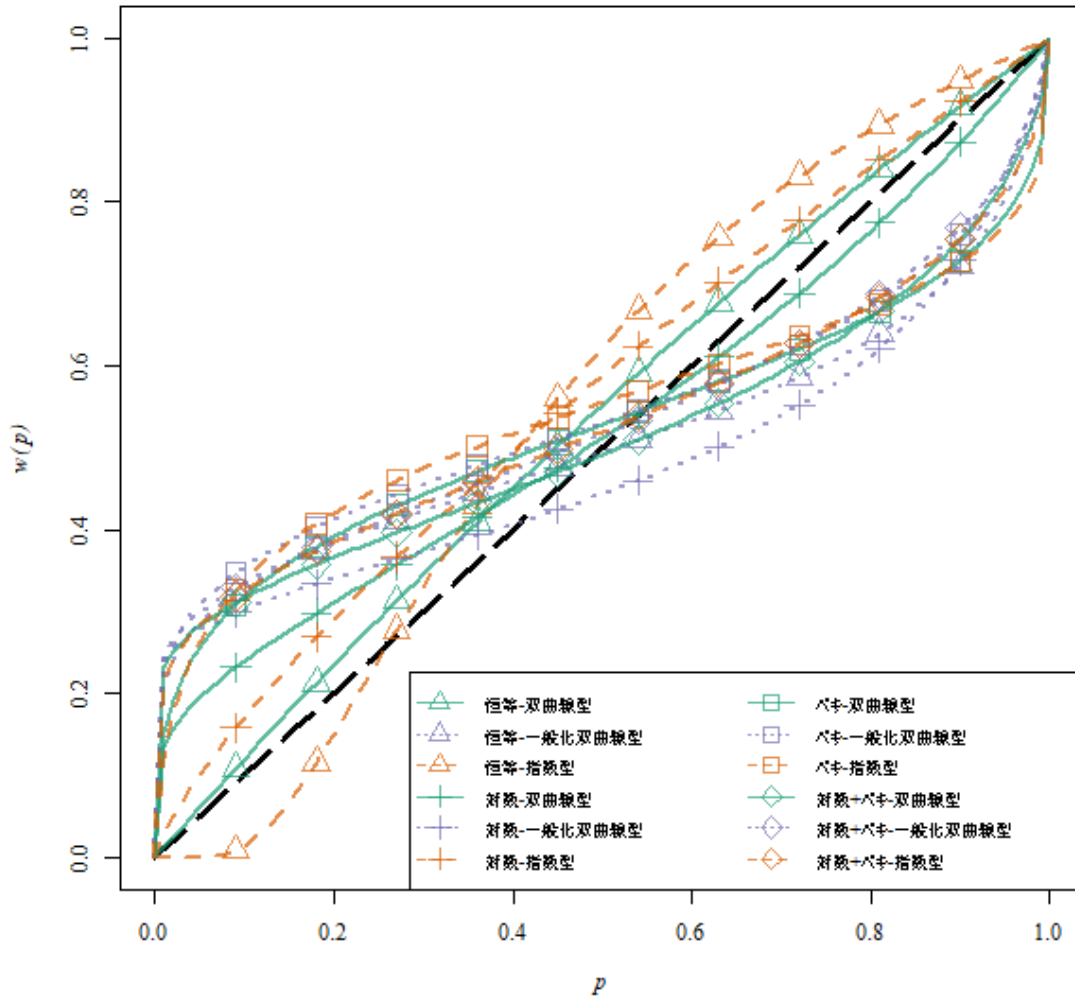
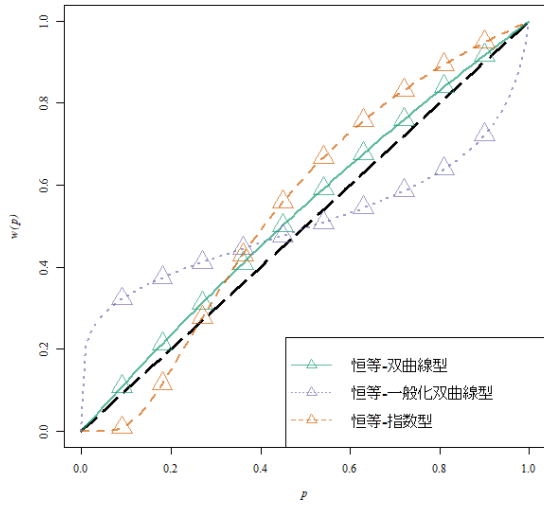
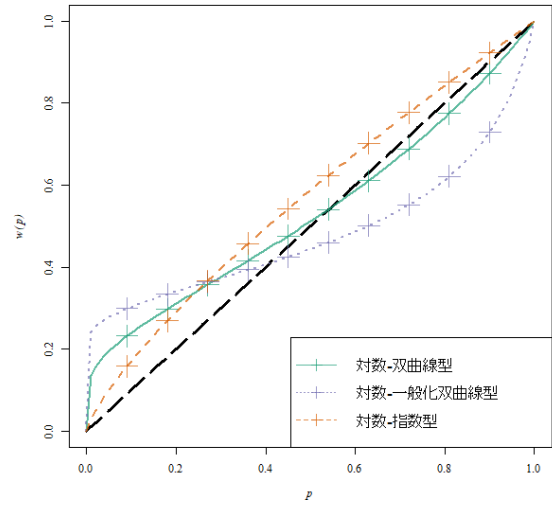


Figure 4.5.8 12個のモデル, それぞれのフリーパラメータに関するグループレベルの推定値を用いたプロット ( $w(p) = p$ の場合を黒い破線で表した)

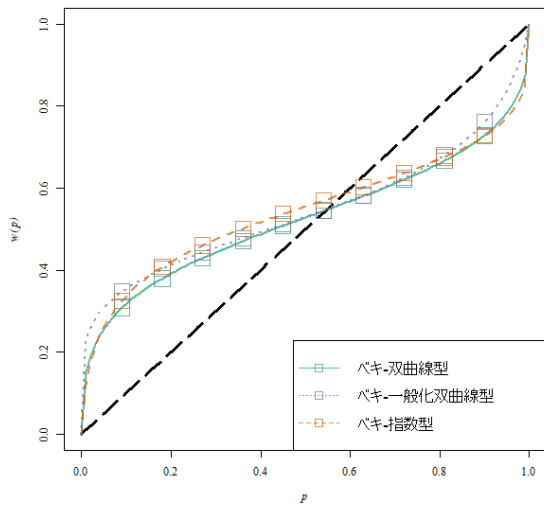
a



b



c



d

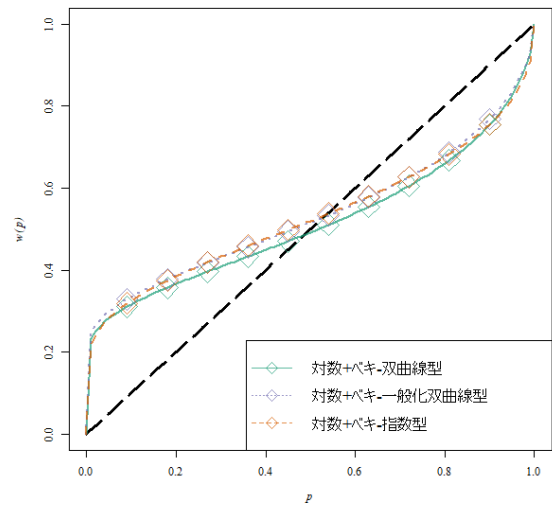
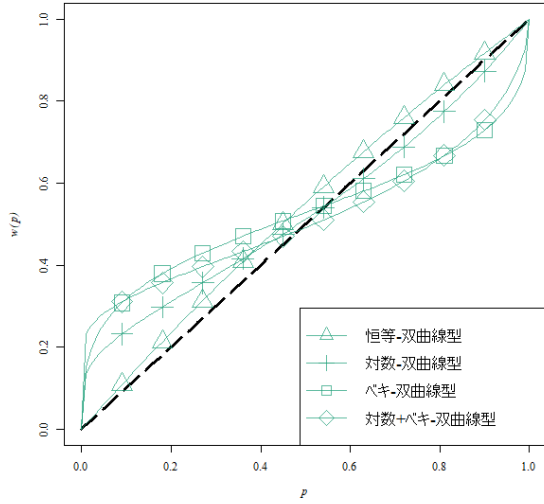
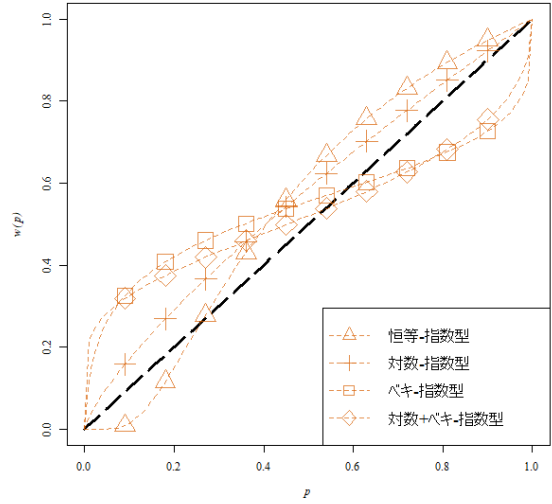


Figure 4.5.9 12個のモデル, それぞれのフリーパラメータに関するグループレベルの推定値を用いたプロット (心理物理関数の型の種類で分割: aが恒等関数, bが対数関数, cがべき関数, dが対数 + べき関数)

a



b



c

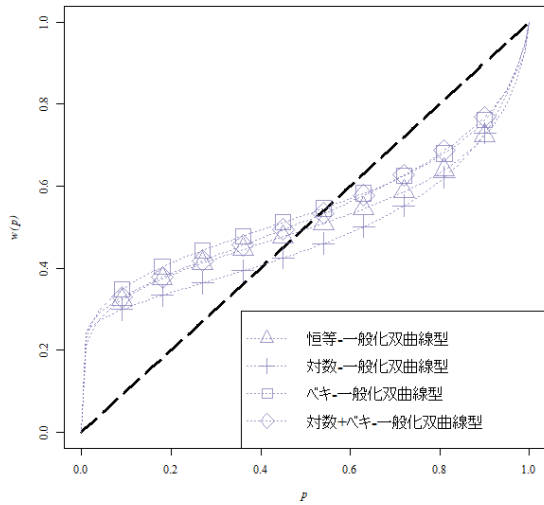


Figure 4.5.10 12 個のモデル，それぞれのフリーパラメータに関するグループレベルの推定値を用いたプロット（割引関数の型の種類で分割：a が双曲線型，b が指数型，c が一般化双曲線型）

**モデルの評価** Table 4.5.1 に，12 個のモデルの WAIC と WAIC による順位，また各モデルの心理物理関数と割引関数の型を示す。WAIC は低いほうが，予測精度が高く，当該モデルの評価が良いことを示している。WAIC を算出する際，Ahn et al. (2017) による遅延割引関数の WAIC の算出方法と同様に，参加者ごとに対数尤度を総和した値を用いた。次節の

遅延価値割引関数の推定結果においても同様の方法で WAIC を算出した。なお、Table 4.5.1 は、WAIC の順位が良い順にモデルを並び変えて示した。Table 4.5.1 から、ベキ - 一般化双曲線型が最も評価が良く、次に対数 + ベキ - 一般化双曲線型、恒等 - 一般化双曲線型の順に良いことが示された。

Table 4.5.1

各モデルの WAIC と WAIC による順位, および各モデルの心理物理関数と割引関数の型

WAIC による順位	WAIC	モデル名			
		心理物理関数の型		割引関数の型	
1	-1424.28	ベキ	—	一般化	双曲線型
2	-1404.69	対数+ベキ	—	一般化	双曲線型
3	-1391.00	恒等	—	一般化	双曲線型
4	-1387.18	対数+ベキ	—		双曲線型
5	-1385.64	対数+ベキ	—		指数型
6	-1323.07	対数	—	一般化	双曲線型
7	-1260.82	ベキ	—		双曲線型
8	-1106.25	ベキ	—		指数型
9	-754.21	対数	—		双曲線型
10	-419.72	対数	—		指数型
11	-314.87	恒等	—		双曲線型
12	-83.02	恒等	—		指数型

次に、心理物理関数と割引関数のそれぞれの型について WAIC の順位を比較しやすくするために、Table 4.5.2 に心理物理関数の型を行、割引関数の型を列に配した表を示す。行と列の末尾にそれぞれの型ごとの順位の中央値を示した。順位の中央値を用いると、心理物理関数の型では対数 + ベキ (4 位)、ベキ (7 位)、対数 (9 位)、恒等 (11 位) の順に WAIC による評価が良かった。また、割引関数の型では、一般化双曲線 (2.5 位)、双曲線 (8 位)、指数 (9 位) の順に評価が良かった。

順位の中央値を用いずに、個々の順位をみると、双曲線型、指数型の一般型である一般化双曲線型を除いた場合、心理物理関数の型と割引関数の型の順位に次のような規則性が認められる。まず心理物理関数の型について、双曲線型と指数型によらず、対数 + ベキ (双曲線 4 位、指数 5 位、以降でも双曲線、指数の順に示す)、ベキ (7 位、8 位)、対数 (9 位、

10位), 恒等(11位, 12位)の順に上位に位置していた。また割引関数の型では, 一貫して双曲線型の方が指数型よりも上位にあった。一方で, 一般化双曲線型についてみると, 心理物理関数の型において上記の規則性は認められず, 対数 + ベキとベキ, 対数と恒等の順位がそれぞれ入れ替わり, ベキ(1位), 対数 + ベキ(2位), 恒等(3位), 対数(6位)の順に上位にあった。割引関数の型については, 心理物理関数が同じ型のなかであれば, 一般化双曲線は双曲線と指数よりも上位にあった。

最後に, 心理物理関数と割引関数の型に関する評価についてまとめる。心理物理関数の型ではベキあるいは対数 + ベキの評価が良い傾向があった。割引関数の型では, 一般化双曲線, 双曲線, 指数の順に評価が良いことが示された。

Table 4.5.2

各モデルの心理物理関数と割引関数の型によりまとめた WAIC の順位と各型に関する順位の中央値

		割引関数の型			順位の 中央値
		双曲線	一般化双曲線	指数	
心理物理 関数の型	恒等	11	3	12	11
	対数	9	6	10	9
	ベキ	7	1	8	7
	対数 + ベキ	4	2	5	4
順位の中央値		8	2.5	9	



### 4.5.3 遅延割引関数のフリーパラメータの推定結果

遅延割引関数のモデルのフリーパラメータを推定した結果を示す。以下では、4.5.2 と同様に、まず、推定結果から各モデルをプロットし、心理物理関数の型および割引関数の型の観点から整理して示す。次に、各モデルの評価について検討するために、WAICに基づきモデルの順位付けを行い、心理物理関数の型および割引関数の型の観点から整理して結果を述べる。なお、プロットの際には、4.5.2 の確率加重関数の推定結果と同様、事後中央値を用いた。また、凡例についても、4.5.2 の確率加重関数の推定結果と同じである。

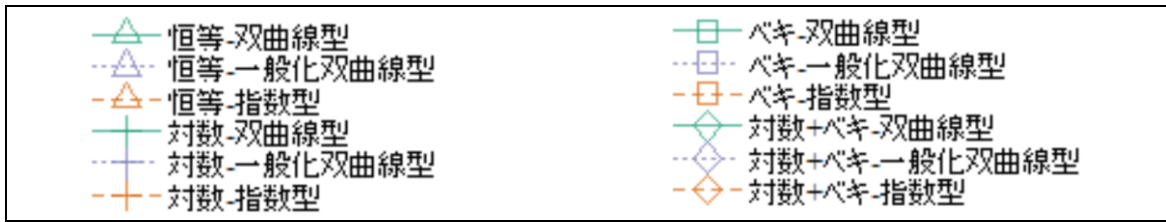
**各モデルの推定結果によるプロット** まず、Figure 4.5.11 に一例として、先行研究のデータ 1 番に関する各モデルのプロットを示す。すべての先行研究のデータに関するプロットは、付録 B.1 に示す。また、各モデルのフリーパラメータの推定値に関するヒストグラムは付録 B.2 に示す。Figure 4.5.11 から、データ 1 番については、遅延期間の単位が日あるいは月のどちらの場合でも、恒等 - 指数型、心理物理関数が対数関数のモデルの当てはまりが悪い傾向があった。

各モデルのフリーパラメータに関するグループレベルのプロットを Figure 4.5.12 に示す。なお、具体的な推定値は付録 B.3 に示す。遅延期間の単位が月の場合よりも日の場合において、心理物理関数が対数関数のモデルは遅延時間  $D$  が大きいときに割り引く程度が小さくなる（曲線が上方にプロットされる）傾向があった。また、恒等 - 指数型は遅延期間の単位に関わらず、他のモデルよりも、遅延時間  $D$  が短い場合には小さく割り引き（曲線が上方にプロットされ）、長い場合には大きく割り引く（曲線が下方にプロットされる）傾向が認められた。

心理物理関数の型の種類ごとに Figure 4.5.12 を分割したプロットを Figure 4.5.13 と Figure 4.5.14 に示す。なお、Figure 4.5.13 は遅延期間の単位が日の場合、Figure 4.5.14 は遅延期間の単位が月の場合である。左上 a が恒等関数、右上 b が対数関数、左下 c がベキ関数、右下 d が対数 + ベキ関数である。比較のために、どのプロットにおいても、恒等 - 双曲線型をマーカーなしの黒い点線、恒等 - 指数型をマーカーなしの黒い破線で示した。Figure 4.5.13 と Figure 4.5.14 から、遅延期間の単位による違いはほぼ認められなかった。また、心理物理関数が恒等関数の場合、上述のように割引関数が指数型のモデルは双曲線型および一般化双曲線型よりも、遅延時間  $D$  が短い場合には小さく割り引き、長い場合には大きく割り引く傾向があった。また、遅延時間  $D$  が長い場合には一般化双曲線、双曲線、指数の順に大きく割り引かれていた。ベキ関数、対数関数、対数 + ベキ関数の場合、遅延時間  $D$  が短い場合には割引関数に関わらず、似た形状になっていた。一方で、遅延時間  $D$  が長い場合には双曲線、一般化双曲線、指数の順に大きく割り引かれていた。

次に、割引関数の型ごとに Figure 4.5.12 を分割したプロットは Figure 4.5.15 と Figure 4.5.16

に示す。Figure 4.5.15 は遅延時間が日の場合、Figure 4.5.16 は月の場合である。Figure 4.5.15 および Figure 4.5.16 の左上 a が双曲線型、右上 b が指数型、左下 c が一般化双曲線型である。こちらにも恒等 - 双曲線型と恒等 - 指数型をそれぞれマーカーなしの黒い点線と破線で示した。Figure 4.5.15 と Figure 4.5.16 から、遅延期間の単位による違いとして、割引関数が指数型と一般化双曲線型の場合において、対数 + ベキ関数は単位が月の場合よりも日の場合に、対数関数やベキ関数のモデルと比べて上方にプロットされていた。各割引関数についてみると、双曲線型では遅延時間  $D$  が長い場合に対数、対数 + ベキ、ベキ、恒等の順に大きく割り引かれていた。指数型では、単位が日の場合は遅延時間  $D$  が長いとき対数 + ベキとベキがほぼ重なっており、対数、対数 + ベキあるいはベキ、恒等の順に大きく割り引かれ、単位が月の場合は双曲線型と同様の傾向が認められた。一般化双曲線型では、対数以外のモデルは、比較的、似た形状となっていたが、単位が日の場合、遅延時間  $D$  が長いとき、対数、恒等、ベキあるいは対数 + ベキの順、単位が月の場合には対数、対数 + ベキ、恒等、ベキの順に大きく割り引かれていた。



a

b

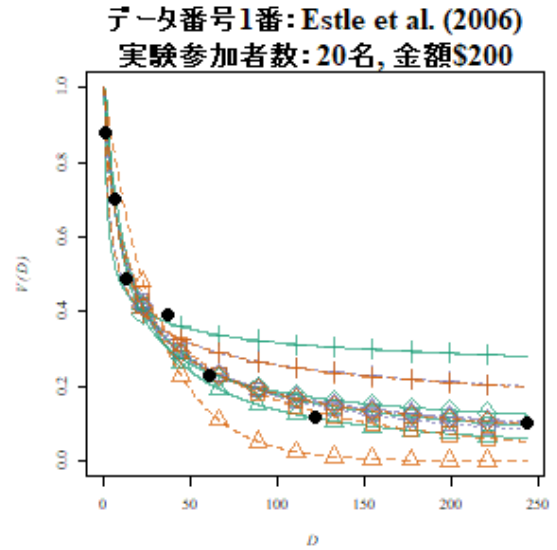
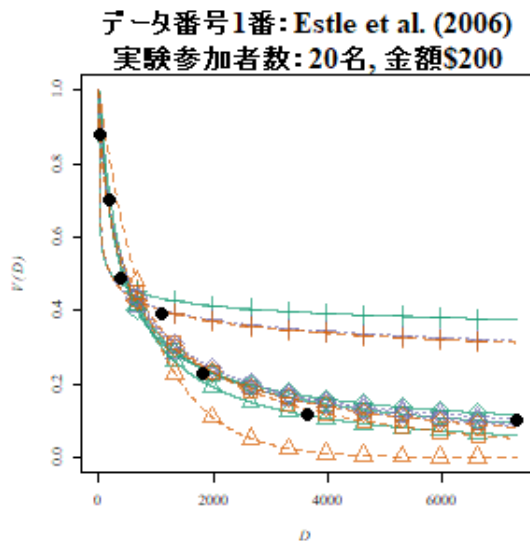
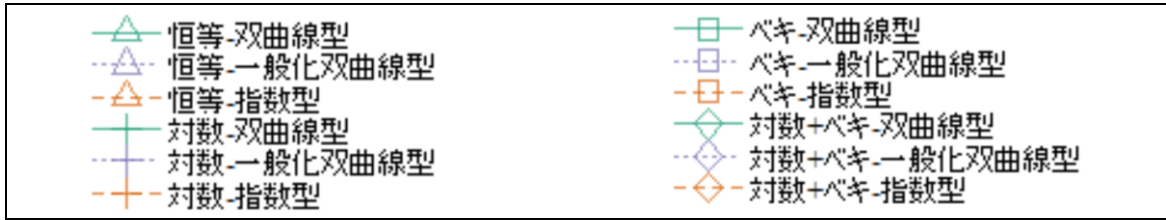


Figure 4.5.11. 先行研究のデータ1番の主観的等価点と、12個のモデルのプロット（黒丸は主観的等価点を表している。また、遅延期間の単位で分けており、aが日、bが月である）



a

b

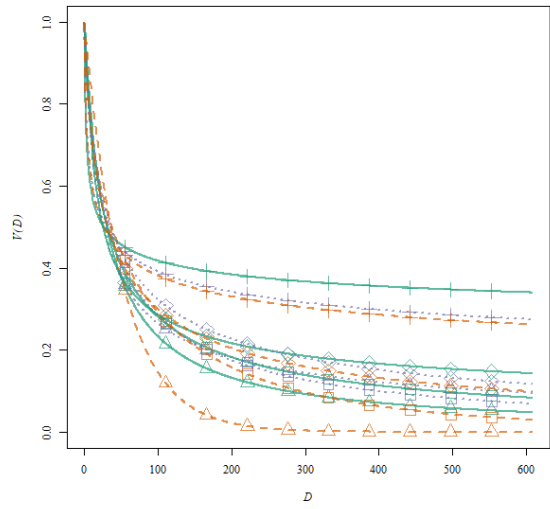
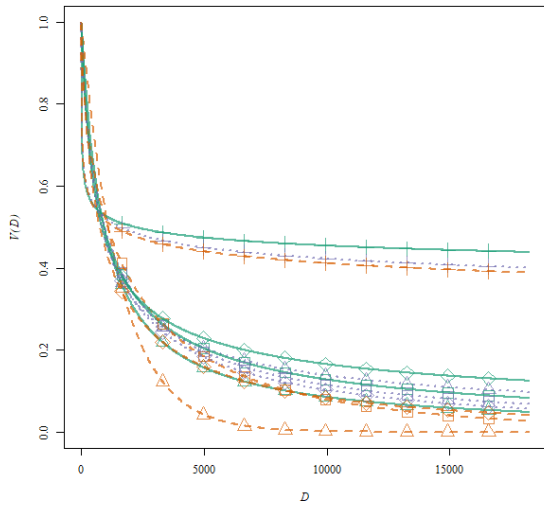
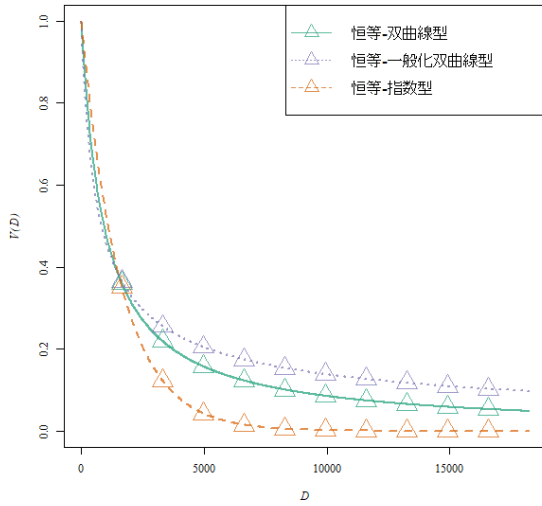
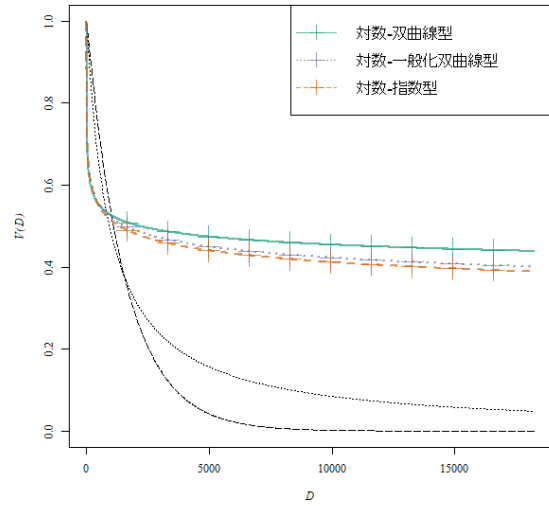


Figure 4.5.12. 12個のモデル, それぞれのフリーパラメータに関するグループレベルの推定値を用いたプロット (aが日, bが月である)

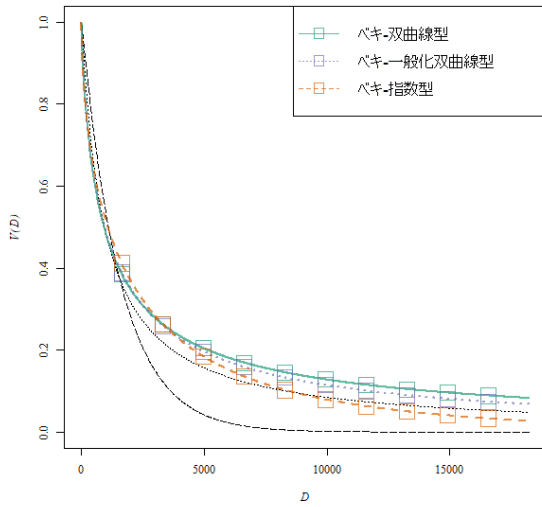
a



b



c



d

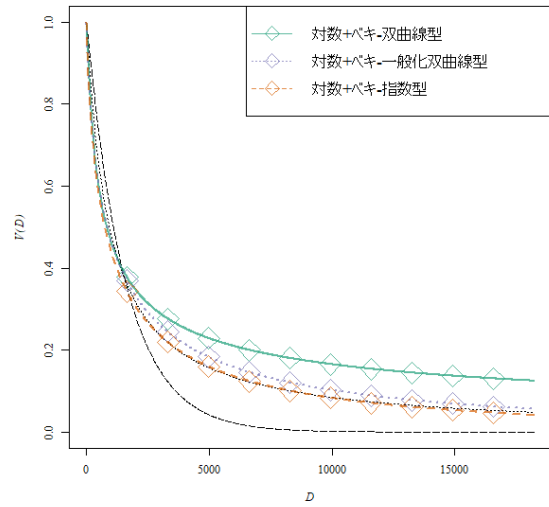
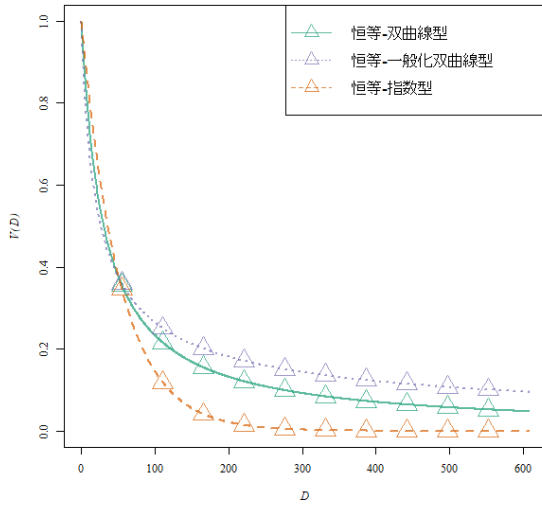
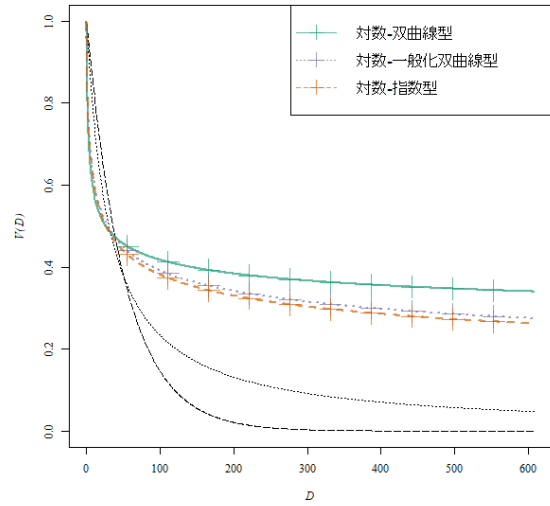


Figure 4.5.13. 遅延期間の単位が日の場合の 12 個のモデル，それぞれのフリーパラメータに関するグループレベルの推定値を用いたプロット（心理物理関数の型の種類ごとに分割：a が恒等関数，b が対数関数，c がベキ関数，d が対数 + ベキ関数である。マーカーのない黒い点線が双曲線型，マーカーのない黒い破線が指数型を表している）

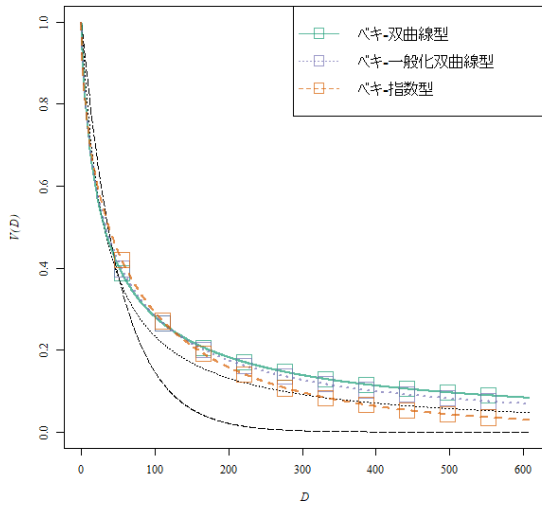
a



b



c



d

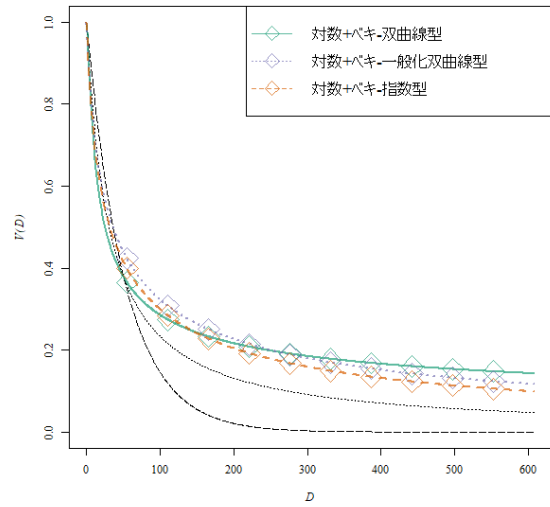
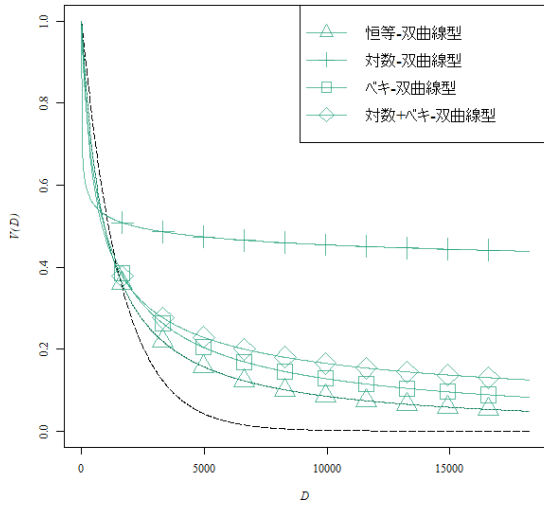
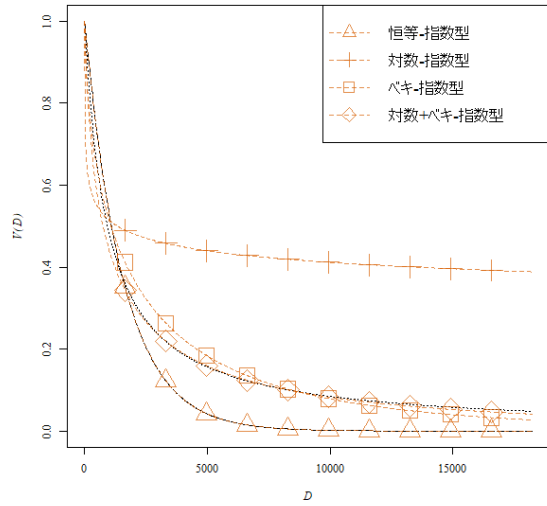


Figure 4.5.14. 遅延期間の単位が月の場合の 12 個のモデル，それぞれのフリーパラメータに関するグループレベルの推定値を用いたプロット（心理物理関数の型の種類ごとに分割：a が恒等関数，b が対数関数，c がべき関数，d が対数 + べき関数である。マーカーのない黒い点線が双曲線型，マーカーのない黒い破線が指数型を表している）

a



b



c

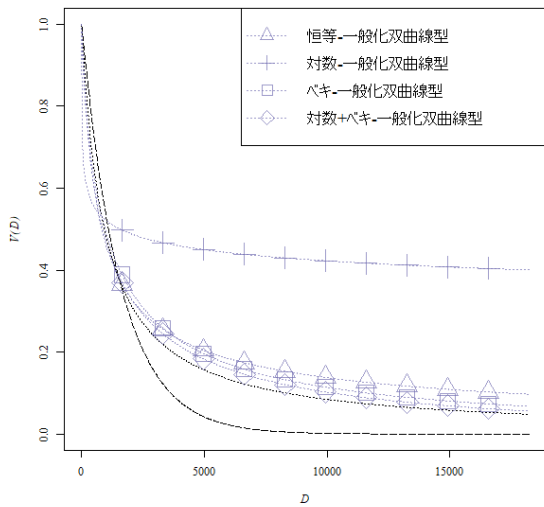


Figure 4.5.15. 遅延期間の単位が日の場合の 12 個のモデル，それぞれのフリーパラメータに関するグループレベルの推定値を用いたプロット（割引関数の型の種類ごとに分割：a が双曲線型，b が指数型，c が一般化双曲線型である。マーカーのない黒い点線が双曲線型，マーカーのない黒い破線が指数型を表している）

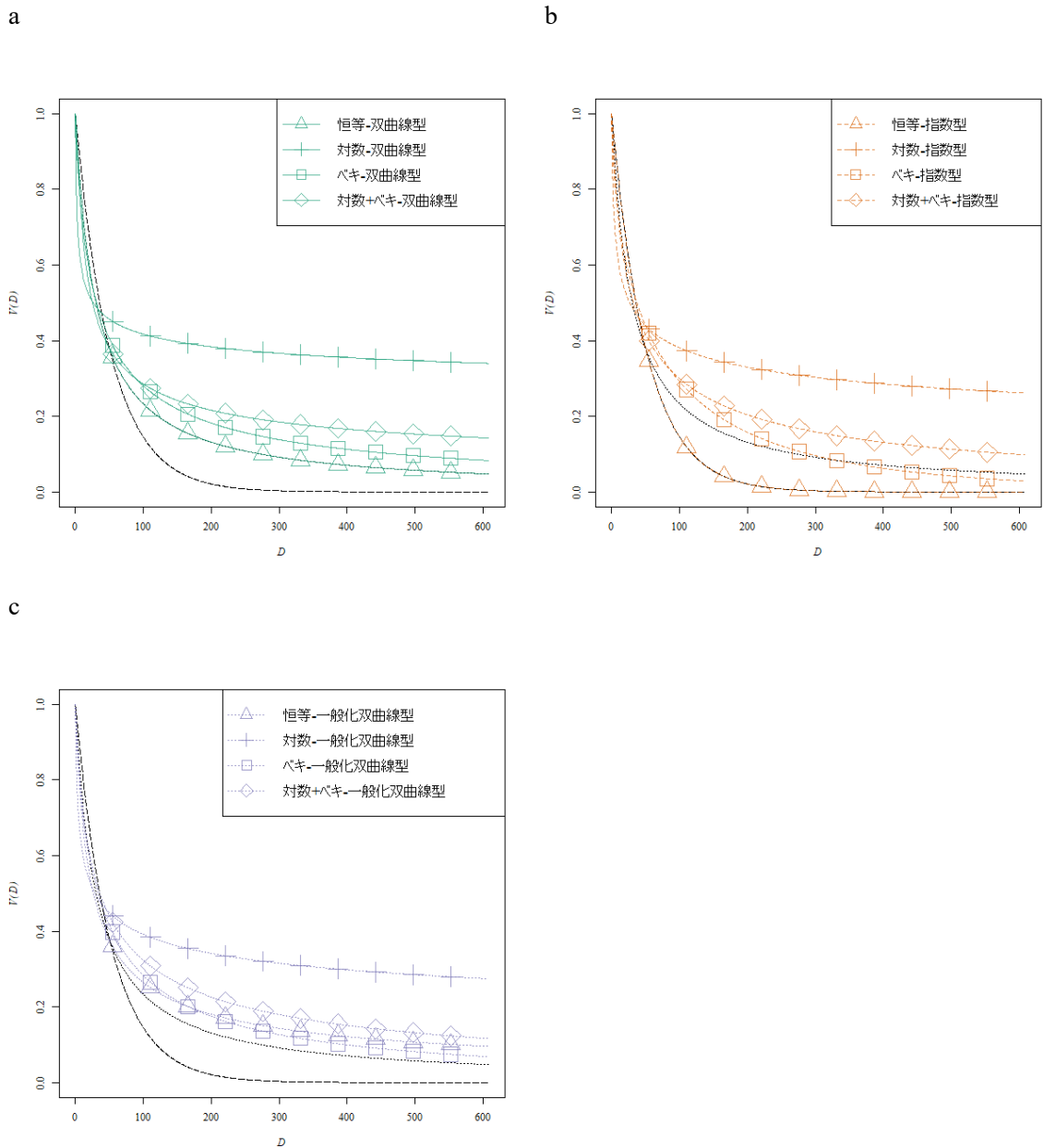


Figure 4.5.16. 遅延期間の単位が月の場合の 12 個のモデル，それぞれのフリーパラメータに関するグループレベルの推定値を用いたプロット（割引関数の型の種類ごとに分割：a が双曲線型，b が指数型，c が一般化双曲線型である。マーカーのない黒い点線が双曲線型，マーカーのない黒い破線が指数型を表している）

**モデルの評価** Table 4.5.3 に，12 個のモデルの WAIC と WAIC による順位，また各モデルの心理物理関数と割引関数の型を示す。なお，モデルごとに遅延期間の単位が日と月の場合，それぞれで WAIC と WAIC による順位を求めた。また，日と月の順位についてモデ



ルごとに中央値を求め、Table 4.5.3 に示した。たとえば対数+ベキ-一般化双曲線型であれば、日（5位）、月（6位）の中央値である 5.5 を示した。Table 4.5.3 は、順位の中央値が良いモデル順に並び変えて示した。

Table 4.5.3 から、各遅延期間の単位に関わらず、WAIC による順位 of 1 位から 3 位は、ベキ - 一般化双曲線型、ベキ - 双曲線型、ベキ - 指数型であった。また、4 位あるいは 5 位に入っていたモデルは、各遅延期間の単位により異なり、対数+ベキ - 指数型（日：4 位、月：5 位）、恒等 - 一般化双曲線型（日：6 位、月：4 位）、対数+ベキ - 一般化双曲線型（日：5 位、月：6 位）であった。

次に、心理物理関数と割引関数のそれぞれ型について WAIC の順位を比較しやすくするために、確率加重関数の際に用いた Table 4.5.2 と同様の表を Table 4.5.4 に示す。なお、Table 4.5.4 で示した順位は、Table 4.5.3 に示した順位 of 中央値を用いた。確率加重関数の際と同様に、Table 4.5.3 の行と列の末尾に示した各型に関する順位 of 中央値を用いると、心理物理関数の型では、ベキ（2 位）、対数+ベキ（5.5 位）、恒等（7 位）、対数（11 位）の順に評価が良かった。また、割引関数の型では、一般化双曲線（5.25 位）、指数（6.75 位）、双曲線（7.5 位）の順に WAIC の順位が良かった。

順位 of 中央値を用いずに、個々の順位をみると、心理物理関数の型ではベキが最もよく、対数が最も悪いということは一貫していた。また、双曲線型と一般化双曲線型であれば、ベキ、恒等、対数+ベキ、対数の順で上位にあり、指数では、恒等と対数+ベキの順位が入れ替わり、ベキ、対数+ベキ、恒等、対数の順で評価が良かった。一方で、割引関数の型では、ベキ関数と恒等関数については、一般化双曲線、双曲線、指数の順に評価が良く、対数+ベキ関数と対数関数については、指数、一般化双曲線、双曲線の順に評価が良かった。

最後に、心理物理関数と割引関数の型に関する評価についてまとめる。心理物理関数の型ではベキ関数の評価が良かった。割引関数の型では、ベキと恒等については一般化双曲線型、対数+ベキと対数については指数型の評価が良く、心理物理関数の型によって評価の良い型が異なっていた。

Table 4.5.3

遅延割引関数のモデルに関する遅延期間の単位ごとの WAIC と WAIC による順位, また各モデルの心理物理関数と割引関数の型

モデル名			WAIC		WAIC による順位		
心理物理関数の型		割引関数の型	日	月	日	月	中央値
ベキ	-	一般化 双曲線型	-657.85	-668.63	1	1	1
ベキ	-	双曲線型	-641.76	-653.28	2	2	2
ベキ	-	指数型	-639.14	-646.37	3	3	3
対数+ベキ	-	指数型	-635.61	-576.33	4	5	4.5
恒等	-	一般化 双曲線型	-597.72	-596.50	6	4	5
対数+ベキ	-	一般化 双曲線型	-624.84	-568.94	5	6	5.5
恒等	-	双曲線型	-489.90	-490.02	7	7	7
対数+ベキ	-	双曲線型	-477.51	-432.31	8	8	8
恒等	-	指数型	-276.82	-276.73	9	9	9
対数	-	指数型	-93.51	-266.49	10	10	10
対数	-	一般化 双曲線型	-88.12	-261.44	11	11	11
対数	-	双曲線型	-51.19	-181.51	12	12	12

Table 4.5.4

各モデルの心理物理関数と割引関数の型でまとめた WAIC の順位 (モデルごとの順位の中央値) と各型に関する順位の中央値

心理物理関数の型		割引関数の型			順位の中央値
		双曲線	一般化双曲線	指数	
恒等		7	5	9	7
対数		12	11	10	11
ベキ		2	1	3	2
対数+ベキ		8	5.5	4.5	5.5
順位の中央値		7.5	5.25	6.75	

#### 4.6 確率加重関数と遅延割引関数の関係に関する考察

研究3では、確率加重関数の推定実験と遅延割引に関する先行研究の実験結果を分析し、WAICによるモデル評価の観点から確率加重関数と遅延割引関数の共通点と相違点を検討することで、確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて考察することを目的としていた。また確率を遅延時間に置き換えているという両関数を関係付ける心理的なメカニズムがあるならば、両関数で共通の導出過程を持つモデルがそれぞれの実験結果でモデルの評価が良くなると考えた。4.5.2節と4.5.3節で、確率加重関数と遅延割引関数のそれぞれに関する結果を述べた。本節では、二つの関数の推定結果をもとに、両関数の関係について考察を行う。以下では、まず、確率加重関数と遅延割引関数の結果について簡単に述べる。そして、両関数のWAICによる評価順位の共通点と相違点について、単純に評価が最も良かったモデルの観点および、心理物理関数の型と割引関数の型による観点から考察を行う。具体的には、まず両関数の共通点について述べる。次に、両関数で異なっていた点を挙げ、その相違点が生じた理由について考察する。特に確率と遅延時間の変換関係について、相違点から本研究で仮定していたものとは別の変換関係が考えられることを示す。最後に、確率加重関数と遅延割引関数の共通点と相違点に関する考察をまとめる。

**確率加重関数と遅延割引関数の結果に関するまとめ** まず、両関数でWAICによる評価が最も良かったモデルについて述べる。確率加重関数のモデルに関して、45名のデータを用いて推定を行ったところ、ベキ一般化双曲線型がWAICによる評価が最も良かった。遅延割引関数のモデルに関して、先行研究25件の主観的等価点を用いて推定したところ、ベキ一般化双曲線型の評価が最も良かった。このように、確率加重関数と遅延割引関数ともにベキ一般化双曲線型の評価が最も良く、確率加重関数と遅延割引関数が対応関係にあることを示唆する結果が得られた。

次に心理物理関数と割引関数の型について、各型のWAICによる順位の中央値を用い、確率加重関数と遅延割引関数の結果について整理した表をTable 4.6.1に示す。Table 4.6.1では上段に心理物理関数、下段に割引関数を配した。なお、Table 4.5.2とTable 4.5.4に示した各型の順位の中央値をそのまま使うと比較しづらいため、順位の小さい順に(WAICに基づく評価が良い順に)心理物理関数では1~4位、割引関数では1~3位に変換した。

Table 4.6.1

確率加重関数と遅延割引関数それぞれの、心理物理関数と割引関数の  
WAIC による順位の中央値

		確率加重関数	遅延割引関数
心理物理関数の型	恒等	4	3
	対数	3	4
	ベキ	2	1
	対数+ベキ	1	2
割引関数の型	双曲線型	2	3
	一般化双曲線型	1	1
	指数型	3	2

Table 4.6.1 から、心理物理関数の型では、確率加重関数では対数+ベキ、ベキ、対数、恒等の順、遅延割引関数ではベキ、対数+ベキ、恒等、対数の順に評価が良かった。ここで、恒等はベキを  $a=1$  とした場合、対数は対数+ベキを  $a=1$  とした場合であった。つまり、確率加重関数と遅延割引関数の両関数において、一般形（対数+ベキとベキ）の方が、その特別な場合（対数と恒等）よりも評価が良いという点では共通していた。一方で一般形（対数+ベキとベキ）と、特殊形（対数と恒等）内で、それぞれ順位が異なっていた。割引関数の型については、確率加重関数と遅延割引関数ともに一般化双曲線が最も良かったが、双曲線と指数の順位が異なっていた。

**確率加重関数と遅延割引関数の共通点** 上述の確率加重関数と遅延割引関数の結果に関するまとめから両関数で共通していた点として、特定のモデルとしてはベキ - 一般化双曲線型の評価が最も良く、また、心理物理関数と割引関数の型についてまとめた場合でも、それぞれ対数+ベキとベキ、一般化双曲線の評価が良いという大まかな傾向が認められた。

**確率加重関数と遅延割引関数の相違点** 心理物理関数と割引関数の型の観点で、確率加重関数と遅延割引関数には次の相違点が認められた。一つ目に心理物理関数の型において対数+ベキとベキ、対数と恒等のそれぞれの順位が異なっており、二つ目に割引関数の型において双曲線と指数の順位が異なっていたことが挙げられる。このような心理物理関数と割引関数の型の観点で、確率加重関数と遅延割引関数に差異が生じた原因として下記の2点が考えられる。一つには確率加重関数では Takemura & Murakami (2016) による実験のデータを用い、遅延割引関数では先行研究 25 件のデータを用いていた。このように確率加重関数と遅延割引関数で異なる実験参加者のデータを用いて、両関数の対応関係を検討したため、おおまかな傾向については共通した点が認められたものの、差異が生じた可能性は

ある。

別の可能性として、ここで生じた差異が本研究で仮定したのとは別の心的なメカニズム、特に確率と遅延時間の変換関係に関するメカニズムを反映していることも考えられる。たとえば、心理物理関数の型について確率加重関数と遅延割引関数では、一般形（ベキと対数+ベキ）、特殊形（恒等と対数）の中で、それぞれ順位が入れ替わっていた。この順位の入れ替わりについて言い換えれば、確率加重関数と遅延割引関数で順位は逆になるが、一般形の順位がその特別な場合（ $a=1$ とした場合）においても保存されていたとも考えられる。つまり、一般形とその特別な場合を問わず、確率加重関数においては心理物理関数に對数を用いたモデルの方が上位にあり、遅延割引関数では逆に對数を用いていない方が上位にあることが示された。このような対照的な関係を説明する考え方の一つとして、本研究で仮定した確率  $p$  と遅延時間  $D$  の変換関係  $D = (1/p)-1$  の修正が挙げられる。

本研究では、Table 4.3.1 に示したように、確率と遅延時間に  $D = (1/p)-1$  という関係を仮定して確率加重関数に対応する遅延割引関数のモデルを挙げた。しかし、上述の對数関数に関する確率加重関数と遅延割引関数の対照的な関係が、心理的なメカニズムを反映した結果であるとするならば、確率と遅延時間が  $D = \log [(1/p)-1]$  という関係にあると考えることで両関数の対照的な関係を説明ができる。具体例を用いて説明すると、確率加重関数の對数 - 双曲線型  $[1+k \log(1/p)]^{-1}$  に対応する遅延割引関数のモデルは、 $D = (1/p)-1$  により置き換えた  $[1+k \log(D+1)]^{-1}$  ではなく、 $D = \log [(1/p)-1]$  により置き換えた恒等 - 双曲線型  $[1+kD]^{-1}$  とする。つまり、確率を遅延時間に変換するときフェヒナーの法則が働くことを仮定する。このような仮定をおけば、心理物理関数について、確率加重関数の對数+ベキに対応する遅延割引関数はベキであり、確率加重関数の對数に対応する遅延割引関数は恒等であると考えられることになる。したがって、確率加重関数において心理物理関数に對数を用いた方が上位にあり、遅延割引関数では逆に對数を用いていない方が上位にあったことは、確率と遅延時間に  $D = \log [(1/p)-1]$  という関係があるとすれば、確率加重関数と遅延割引関数の対応関係を示唆する結果であったと考えられる。

割引関数の型について、Table 4.5.2 から確率加重関数では一般化双曲線、双曲線、指数の順に評価が良かった。Table 4.5.4 から遅延割引関数において、心理物理関数の型がベキあるいは恒等の場合であれば、それぞれ一般化双曲線（ベキ：1位、恒等：5位）、双曲線（ベキ：2位、恒等：7位）、指数（ベキ：3位、恒等：9位）の順に評価が良く、確率加重関数における順位と一致していた。このように遅延割引関数において心理物理関数に對数を用いていない場合は確率加重関数の順位と一致しており、上述の確率と遅延時間の関係を支持しているとも考えられる。なお、遅延割引関数において心理物理関数の型が對数と對数+ベキの場合は、それぞれ指数、一般化双曲線、双曲線の順に評価が良く、指数の順位が

他の型の場合とは異なり、最も評価が良かった。つまり、遅延時間について対数を取り、さらに指数をとったモデル（簡易に書けば  $\exp[-\log(D+1)]$ ）が、双曲線あるいはそれらの一般形をとったモデル（簡易に書けば  $[\log(D+1)]^{-1}$ ）よりも WAIC の順位は上にあることが示された。遅延時間について対数を取り、さらに指数をとったモデルとは、つまり遅延時間を恒等に置き直したようなモデル（つまり  $\exp[-\log(D+1)]=[D+1]^{-1}$ ）、あるいは対数スケールをとった遅延時間を元のスケールに直したようなモデルである。遅延割引関数では心理物理関数に対数を用いないモデルの方が評価は良かったことから、対数と対数+ベキは指数の評価が最も良くなったと考えられる。ただし、対数+ベキに指数をとっても、遅延時間が完全に元のスケールに戻るわけではない、あるいは恒等関数にはならない点で不十分な説明ではある。

上述の確率と遅延時間の  $D = \log [(1/p)-1]$  という変換関係を仮定する考え方は、1.5 節で述べたように Ebert & Prelec (2007) においても指摘されている。Ebert & Prelec (2007) では確率  $p$  と遅延時間  $D$  との関係は、 $p = \exp(-D)$  で表せる ( $D$  について解けば、 $\log(1/p) = D$ ) と仮定した。そして、確率と遅延割引の選択においてコンセプトとしては同様の公理を満たせば、確率加重関数では対数+ベキ - 指数型、遅延割引関数ではベキ - 指数型となることを導いている。

このように、心理物理関数と割引関数の型で認められた確率加重関数と遅延割引関数の相違点は、確率と遅延時間に  $D = \log [(1/p)-1]$  という変換関係を認めれば、確率加重関数と遅延割引関数の対応関係を考えることはできる。しかし、この確率と遅延時間の変換関係を認めた場合には、ベキ - 一般化双曲線型が確率加重関数と遅延割引関数の両方において最も評価が良かったことについて説明ができなくなる。つまり、 $D = \log [(1/p)-1]$  であれば、確率加重関数においては対数+ベキ - 一般化双曲線型、遅延割引関数ではベキ - 一般化双曲線型の評価が良くなるはずである。以降ではこのような問題点も含めて、これまでの考察についてまとめを行う。

**確率加重関数と遅延割引関数の共通点と相違点に関するまとめ** ここまでの考察をまとめると、まず、確率加重関数と遅延割引関数のモデルを WAIC に基づく評価順位で比較すると、最も評価の良いモデルは両関数で共通していた。また心理物理関数および割引関数の型の観点で整理した場合にも、心理物理関数では一般形（ベキと対数+ベキ）の方がその特別な場合（恒等と対数）よりも WAIC に基づく順位は上にある点、割引関数では一般化双曲線が最も評価が良い点、確率加重関数と遅延割引関数で共通していた。次に、心理物理関数および割引関数の型の観点で、確率加重関数と遅延割引関数で異なっていた点について考察し、確率と遅延時間に  $D = \log [(1/p)-1]$  という変換関係がある可能性を示した。しかし、この変換関係を考えた場合には、確率加重関数と遅延割引関数で最も評価の良い

モデルがベキ - 一般化双曲線型であったことに説明がつかなくなる。ここまでを上記では考察した。ここで、この  $D = \log [(1/p)-1]$  という変換関係を仮定した場合の問題点は、一般化双曲線型のモデルを含めた場合に生じる点であることを付け加えて言及する。一般化双曲線型を除いてみた場合には、確率加重関数においては対数+ベキ - 双曲線型、遅延割引関数ではベキ - 双曲線型の評価が最も良いことが示されていた。つまり、一般化双曲線型を除いた場合には、確率と遅延時間の  $D = \log [(1/p)-1]$  という変換関係は上述の問題点が生じることなく、示唆される。

このように本研究の結果からおよそ確率加重関数と遅延割引関数に対応関係があることは示唆された。つまり、一般化双曲線型を含めると確率と遅延時間に  $D = (1/p)-1$  という関係を仮定してもある程度、確率加重関数と遅延割引関数に対応関係が認められた。また、一般化双曲線型を除いた場合には、確率と遅延時間に  $D = \log [(1/p)-1]$  という変換関係があると考えれば、両関数に比較的相違点の少ない対応関係が認められた。これらのことは、確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて確率を遅延時間に置き換えているというような確率と遅延時間を結びつける考え方を支持する結果であると考えられる。ただし、確率と遅延時間の変換関係が  $D = \log [(1/p)-1]$  か  $D = (1/p)-1$  であるか、また割引関数に一般化双曲線型という一般形を用いた場合に  $D = \log [(1/p)-1]$  という変換関係が認められなくなる理由については本研究の結果だけでは推測できない。本研究で生じたこれら未解決な点に示唆を与えるような研究が今後必要となるだろう。

## 第5章 総合考察

本論文は、確率加重関数の理論的・経験的な前提に関する研究を行い、その前提について検討を経た上で、確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて検討することを目的としていた。具体的には、第2章の研究1では、確率加重関数の理論的な前提に関する研究として、確率加重関数を導入した理論であるランク依存型期待効用理論の主要な公理について検証を行った。ただしランク依存型期待効用理論は、期待効用理論を拡張した理論であるため、仮にその公理と実際の人々の判断あるいは意思決定との乖離が小さかったとしても、確率加重関数を導入することの意義あるいは必要性が示されるわけではない。このため、第3章の研究2では、確率加重関数の経験的な前提に関する研究として、従来の研究で報告されてきたように、実際に人の確率加重関数の形状が非線形であるかをWu & Gonzalez (1996, 1998)の方法を用いて検討した。ここで仮に確率加重関数の形状が非線形であった場合、その意思決定を期待効用理論では説明できないことが示唆される。つまり、少なくとも確率加重関数を導入した方がよいことが示唆される。研究1と2により、確率加重関数を導入した理論の検証および確率加重関数を導入することの意義が示唆された。そのうえで、第4章の研究3では確率加重関数の形状を生み出す心理的なメカニズムについて検討を行った。具体的には確率加重関数と遅延割引関数について、確率を遅延時間に置き換えているという仮定を置いたモデルを比較する実験及び先行研究の実験の再分析を行い、両関数の対応関係について検討した。以下では、まず研究1, 2, 3から示唆されたことについてまとめる。そして、確率加重関数のメカニズムについて検討した研究3について今後の展望を述べる。

### 5.1 本研究の知見のまとめ

本節では、研究1, 2, 3から示唆されたことに関するまとめと、これらの研究が意思決定研究に与える示唆について述べる。具体的にはまず、各研究のまとめとそこからどのような示唆があるかを述べる。最後に本研究で認められた個人の確率加重関数の形状に関する考察を行う。

**研究1のまとめ** 研究1ではNakamura (1992) および中村 (personal communication, 2014年11月)によるランク依存型期待効用理論の主要な公理について、クジの確率を刺激として用いて検証を行った<sup>1</sup>。意思決定研究において、アレのパラドックスに代表されるように、ある公理により構築された理論に対して、その公理が実際の人々の意思決定と矛盾していないかを検証することは重要な研究課題の一つである。代表的な例としてアレのパラドックスは、期待効用理論の公理系の一つである独立性の公理に対して実際の人々の意思決定が満



たさないことを示唆した。このような公理と実際の意味決定との乖離を示すことで、その後、その乖離を説明可能とする理論が提唱される契機の一つとなった。このように意思決定研究において、理論の基礎となっている公理と実際の人の判断あるいは意思決定との乖離を調べることは研究を発展させていく上で重要となる。また、理論で仮定されている公理が実際の人の判断あるいは意思決定とあまり矛盾がないことを示せば、その理論は実際の人の意思決定に即していることが示唆される点でも意義はある。このような研究上の意義のもとで、研究 1 では Nakamura (1992) および中村 (personal communication, 2014 年 11 月) により考案されたランク依存型期待効用理論の公理系について、その主要な公理であるランク双対称性が実際の人の判断と対応しているかを検証した<sup>1</sup>。検証の結果、その主要な公理は 10 種類の刺激セットのうち 8 種類の刺激セットで満たされていた。また  $(a \circ b) \bullet (c \circ d)$  と  $(a \circ c) \bullet (b \circ d)$  の差の程度とその確率について検討したところ、差の絶対値が 4% 未満である確率は少なくとも 95% 以上であった。これらのことから、確率加重関数を導入する上で必要な理論の主要な公理は、実際の人の判断とある程度、矛盾しないことが示唆された。

このように研究 1 では、ランク依存型期待効用理論の公理系のうち主要な公理について検証を行い、およそ実際の人の判断と矛盾していないことが示された。ただし、ランク依存型期待効用理論は期待効用理論を拡張したものであるため、期待効用理論で説明可能な意思決定あるいは判断を行っていてもランク依存型期待効用理論の公理を満たすことができる。つまり、実際の人の判断がランク依存型期待効用理論の公理を満たしていたことと、期待効用理論を拡張させた理論、具体的には確率加重関数を導入することの必要性あるいは意義は独立である。このため、確率加重関数を導入することの必要性あるいは意義については、改めて検討を行う必要がある。そこで、研究 2 では、Wu & Gonzalez (1996, 1998) による方法で個人及びグループレベルでの確率加重関数の形状を推測し、その形状が非線形であるかを検討した。

**研究 2 のまとめ** 確率加重関数の形状を推測する方法については、これまでに様々な方法が提案されている。たとえば、Gonzalez & Wu (1999) ではクジとその確実同値額を用いて、確率加重値と効用値の各水準を目的関数として非線形最小二乗法により推定を行う方法が提案されている。Abdellaoui (2000) では、Gonzalez & Wu (1999) のような推定手法は用いずに、クジの選択課題から効用関数および確率加重関数の形状を取得する方法が考案されている。Wu & Gonzalez (1996, 1998) は、3.2 節で説明したようにクジの選択結果から確率加重関数の二階差分を評価し、その形状を推測する方法を考案した。Wu & Gonzalez (1996, 1998) による方法では、確率加重関数の形状に関して、選択結果から凹あるいは凸であるかというおおまかな形状の推測が可能である。一方で、Gonzalez & Wu (1999) と

Abdellaoui (2000) による方法では、効用値と確率加重値を得られるため、より具体的に効用関数と確率加重関数の形状を求めることができる。ただし、具体的な形状を得られる分、一定の仮定なども必要となる。Gonzalez & Wu (1999) による方法では確実同値額の効用値を線形補間などにより内挿することなどが必要であり、Abdellaoui (2000) による方法では、効用関数を得るための課題を行った上でその効用値を用いて確率加重関数を求めるため、効用関数を取得する際に生じた誤差は確率加重関数を求める際にも影響を与える。

研究 2 では、Wu & Gonzalez (1996, 1998) の比較的簡易な仮定に基づいた方法を用いて確率加重関数の形状を推測した。また、Wu & Gonzalez (1996, 1998) においては、個人のクジの選択結果を集計したデータを用いて確率加重関数の形状を推測したが、個人の形状について推測は行われていなかった。一方、研究 2 では、研究 1 のデータと、各実験参加者に対して繰り返しクジの選択課題を行ったデータを用いて、個人の形状についても推測を行い、どの程度、非線形の形状が認められるかを調べた。形状の推測を行った結果、研究 1 のデータからは  $w(p)=p$  であると推測されるものは観察されず、クジの選択実験からは、4 割程度で確率加重関数の形状は非線形であることが示された。このことから、確率加重関数を導入することには一定の意義があることが示唆された。

**研究 3 のまとめ** 研究 1 と 2 により、確率加重関数を導入した理論の検証および確率加重関数を導入することに対する意義が示唆された。研究 3 では、どのような心理的なメカニズムにより確率加重関数の形状が生み出されるのかについて、その心理的なメカニズムを仮定したモデルを用いて検討した。具体的には確率加重関数のメカニズムについて、確率を遅延時間あるいは待ち時間に置き換えているという考えから、遅延時間に関する心理物理関数の型と割引関数の型を組み合わせ、確率加重関数とそれに対応する遅延割引関数のモデルを導出した。そして、確率加重関数の実験と、これまでの遅延割引の実験結果について、両関数のモデルの WAIC に基づく評価から、両関数の対応関係について検討した。

1.4 節と 4.2 節で述べたように、確率と遅延時間を結びつけて考えた研究は、これまでも報告されている。特に Rachlin et al. (1991) は、確率は遅延時間に変換されていると考え、確率割引と遅延割引に関する実験を行った。そして、確率割引と遅延割引は同種のモデルにより説明できることから、それらの関係性を示した。ただし、確率割引と遅延割引の対応関係については、報酬額を変えた場合にそれらの挙動が一致しないという批判もある（たとえば Green et al., 1999; Myerson et al., 2003）。また、Ebert & Prelec (2007) では、確率加重関数と遅延割引関数について対応関係を理論的に示している。具体的には確率  $p$  と遅延時間  $D$  に  $p = \exp(-D)$  という関係を仮定した上で、遅延時間に関しては定数倍した場合、確率については  $p$  を  $N$  乗した場合でも選好関係は変わらないというコンセプトとしては同種の

公理(たとえば遅延時間  $D$  に定数  $N$  を掛けた  $ND$  は  $p = \exp(-D)$  より  $\exp(-ND) = [\exp(-D)]^N = p^N$  となるため) を設けた。そして、その公理を満たした場合に、確率加重関数と遅延割引関数のそれぞれについて特定のモデルが導かれることを示した。研究 3 では、確率を遅延時間に変換していることを仮定するモデルを確率加重関数と遅延割引関数のそれぞれについて示し、両関数の対応関係について検討した。またデータについては、Takemura & Murakami (2016) による確率加重関数の実験データと、遅延割引に関する先行研究のデータ 25 件を用いた。確率加重関数の実験と、これまでの遅延割引の実験結果を用いて WAIC を算出し、両関数のモデルの WAIC に基づく評価から、両関数の対応関係について検討した。この結果、確率と遅延時間の変換関係が  $D = \log [(1/p)-1]$  か  $D = (1/p)-1$  であるか、また割引関数に一般化双曲線型という一般形を用いた場合に  $D = \log [(1/p)-1]$  という変換関係が認められなくなるというようにいくつか未解決な点は残ったものの、およそ確率加重関数と遅延割引関数に対応関係があることは示唆された。このように研究 3 では、確率加重関数と遅延割引関数の関係について具体的にどのような関係があるかについては可能性を示すにとどまった。ただし、少なくとも確率加重関数と遅延割引関数の対応関係があることは示唆されたため、確率と遅延時間に関する議論に対しては、それらに対応関係があるとする心理的なメカニズムを支持し得ると考えられる。

**個人の確率加重関数の形状に関するまとめ** 最後に本研究で、個人の確率加重関数の形状について逆 S 字以外の形状も多く認められたことについて述べる。研究 2 と 3 の個人の確率加重関数の形状では、逆 S 字以外の形状も認められた。逆 S 字以外の形状については、個人の形状について検討した Abdellaoui (2000) でも認められている。研究 2 と 3 において、グループレベルにおいては逆 S 字が認められやすいが、個人レベルで考えた場合には必ずしも逆 S 字の形状が多いわけではないことが示された。このことから、確率加重関数の形状は逆 S 字であることが指摘されているが、あくまでグループレベルにおける傾向であり、必ずしも個人レベルの形状を反映した結果ではない可能性がある。この可能性については、今後、より多くの人々を対象に確率加重関数の形状を測定する調査を行い、確認する必要がある。ここで示された個人とグループレベルでの違いについては、実用上の意義は大きいと思われる。つまり、低い確率を過大評価し、高い確率を過小評価するという傾向が実際とは合っていない場合には、このような傾向に基づいて方針などを決めても想定しているほどの結果は得られないことが予想される。

## 5.2 今後の展望

研究 3 に関する今後の展望を述べる。4.6 節においても述べたように、研究 3 では、確率加重関数については Takemura & Murakami (2016) による実験データを、遅延割引関数につ

いては遅延割引に関する先行研究 25 件のデータを用いて、確率加重関数と遅延割引関数の対応関係について検討し、およそ両関数の対応関係が認められた。このように確率加重関数と遅延割引関数で異なる実験参加者のデータを用いて、なお両関数の対応関係が示唆されたことから、確率加重関数と遅延割引関数に共通する心理的なメカニズムがある可能性は高いと考えられる。一方で、研究 3 ではその心理的なメカニズムについていくつか未解決な点が残されていた。研究 3 により生じた未解決な点に示唆を与える研究が今後必要となる。たとえば、研究 3 では確率加重関数と遅延割引関数で異なる実験参加者のデータを用いていたが、同一の参加者に対して確率加重関数と遅延割引関数の推定実験を実施することが考えられる。このような実験を実施することで、同一参加者内で確率加重関数と遅延割引関数、それぞれについて WAIC 基準で良いモデルを調べ、両関数を対応付ける関係について検討できると期待される。

また、確率と遅延時間を結びつける考え方に対しては、報酬量の水準によって割引率が変わる報酬量効果が、確率割引と遅延割引で一致しないという批判がある（佐伯，2011）。この点についても確率と遅延時間の関係についてより深く理解する上で重要であり、今後、さらに検討する必要がある。以上のように、今後、リスク下の意思決定と異時点間における選択行動の関係について、さらなる検討を行っていくことは、人の意思決定をより深く理解する上で重要であると考えられる。

また、研究 1, 2, 3 のそれぞれで、クジの表示形式は異なっていた。具体的には、研究 1 では文字と円グラフを、研究 2 の実験 2 では棒グラフを、研究 3 では文字のみでクジの情報を表示していた。研究 1 あるいは研究 2 においてグラフを用いて表示したのは、クジの結果が多い場合には三つあり、実験参加者にとってわかりやすくすることを意図していたためであった。このように少なくとも、わかりやすくすることを意図して、表示形式を変えたことから、表示方法の違いによる影響についても考慮する必要があるだろう。このような表示形式の違いも本研究の今後の課題の一つであると思われる。

## 引用文献

- Abdellaoui, M. (2000). Parameter-free elicitation of utility and probability weighting functions. *Management Science*, *46*, 1497-1512.
- Ahn, W.-Y., Haines, N., & Zhang, L. (2017). Revealing neuro-computational mechanisms of reinforcement learning and decision-making with the hBayesDM package. *Computational Psychiatry*, *1*, 24-57.
- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In B. N. Petrov and F. Csaki (Eds.) *2nd International Symposium on Information Theory*, Budapest: Akademiai Kiado, pp.267-281.
- Allais, M. (1953). Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risqué: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine, *Econometrica*, *21*, 503-546.
- Cajueiro D. O. (2006). A note on the relevance of the q-exponential function in the context of intertemporal choices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *364*, 385-388.
- Coombs, C. H., Dawes, R. M., & Tversky, A. (1970). *Mathematical psychology: An elementary introduction*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc. (クームス C.H., ドーズ R.M., & トヴァスキー A. 小野 茂 (訳) (1974). 数理心理学序説 第1版 新曜社)
- Cross, D. V. (1965). *Metric properties of multidimensional stimulus control*. Unpublished Ph.D. thesis, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.
- Ebert, J. E., & Prelec, D. (2007). The fragility of time: Time-insensitivity and valuation of the near and far future. *Management Science*, *53*, 1423-1438.
- Estle, S. J. Green, L., Myerson, J., & Holt, D. D. (2006). Differential effects of amount on temporal and probability discounting of gains and losses. *Memory & Cognition*, *34*, 914-928.
- Fishburn, P. C. (1988). *Nonlinear preference and utility theory*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Gonzalez, R., & Wu, G. (1999). On the shape of the probability weighting function. *Cognitive Psychology*, *38*, 129-166.
- Green, L., Fry, A. F., & Myerson, J. (1994). Discounting of delayed rewards: A life-span comparison. *Psychological Science*, *5*, 33-36.
- Green, L., Myerson, J., & McFadden, E. (1997). Rate of temporal discounting decreases with amount of reward. *Memory & Cognition*, *25*, 715-723.
- Green, L., Myerson, J., & Ostraszewski, P. (1999). Amount of reward has opposite effects on the discounting of delayed and probabilistic outcomes. *Journal of Experimental Psychology*:

- Learning, Memory, and Cognition*, 25, 418-427.
- 広田すみれ・増田真也・坂上貴之 (2002). 心理学が描くリスクの世界——行動的意思決定論—— 慶応義塾出版株式会社
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47, 263-292.
- 久保拓哉 (2012). データ解析のための統計モデリング入門——一般化線形モデル・階層ベイズモデル・MCMC—— 岩波書店
- Loewenstein, G., & Prelec, D. (1992). Anomalies in intertemporal choice: Evidence and interpretation. *The Quarterly Journal of Economics*, 107, 573-597.
- Luce, R. D. (2001). Reduction invariance and Prelec's weighting functions. *Journal of Mathematical Psychology*, 45, 167-179.
- 松浦健太郎 (2016). Stan と R でベイズ統計モデリング 共立出版
- Mazur, J. E. (1987). An adjusting procedure for studying delayed reinforcement. In M. L. Commons, J. E. Mazur, J. A. Nevin, & H. Rachlin (Eds.), *Quantitative analysis of behavior; Vol. 5. The effect of delay and of intervening events on reinforcement value* (pp. 55-73). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- McElreath, R. (2016). *Statistical rethinking: A Bayesian course with examples in R and Stan*. Boca Raton FL: Chapman and Hall/CRC Press.
- McKerchar, T. L., Green, L., Myerson, J., Pickford, T. S., Hill, J. C., & Stout, S. C. (2009). A comparison of four models of delay discounting in humans. *Behavioural Processes*, 81, 256-259.
- 村上 始・井出野 尚・大久保 重孝・玉利 祐樹・竹村和久(2014). 意思決定課題における変動係数を用いた注意の誘導方法の提案——眼球運動測定による検討—— 日本感性工学会論文誌, 13, 527-534.
- Murphy, J. G., Vuchinich, R. E., & Simpson, C. A. (2001). Delayed reward and cost discounting. *The Psychological Record*, 51, 571-588.
- Myerson, J., & Green, L. (1995). Discounting of delayed rewards: Models of individual choice. *Journal of Experimental Analysis of Behavior*, 64, 263-276.
- Myerson, J., Green, L., Hanson, J. S., Holt, D. D., & Estle, S. J. (2003). Discounting delayed and probabilistic rewards: Processes and traits. *Journal of Economic Psychology*, 24, 619-635.
- Nakamura, Y. (1992). Multisymmetry Structures and non-expected utility. *Journal of Mathematical Psychology*, 36, 375-395.
- Odum, A. L., & Rainaud, C. P. (2003). Discounting of delayed hypothetical money, alcohol, and

- food. *Behavioural Processes*, 64, 305-313.
- Ostaszewski, P., Green, L., & Myerson, J. (1998). Effects of inflation on the subjective value of delayed and probabilistic rewards. *Psychonomic Bulletin & Review*, 5, 324-333.
- Pfanzagl, J. (1959). A general theory of measurement: Applications to utility. *Naval Research Logistics Quarterly*, 6, 283-294.
- Prelec, D. (1998). The probability weighting function. *Econometrica*, 66, 497-527.
- Prelec, D. (2004). Decreasing impatience: A criterion for non-stationary time preference and “hyperbolic” discounting. *Scandinavian Journal of Economics*, 106, 511-532.
- Prelec, D. & Loewenstein, G. (1991). Decision making over time and under uncertainty: a common approach. *Management Science*, 37, 770-786.
- Rachlin, H., Raineri, A. & Cross, D. (1991). Subjective probability and delay. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 55, 233-244.
- 佐伯大輔 (2001). 遅延報酬の価値割引と時間選好 行動分析学研究, 16, 154-169.
- 佐伯大輔 (2011). 価値割引の心理学——動物行動から経済現象まで—— 昭和堂
- 芝 正太郎 (2017). リスク選好と時間選好の統合に向けて *WINPEC Working paper Series*, No. J1701, 1-40.
- Simpson, C. A., & Vuchinich, R. E. (2000). Reliability of a measure of temporal discounting. *The Psychological Record*, 50, 3-16.
- Takahashi, T. (2006). Time-estimation error following Weber-Fechner law may explain subadditive time-discounting. *Medical hypotheses*, 67, 1372-1374.
- Takahashi, T. (2007). A probabilistic choice model based on Tsallis’ statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 386, 335-338.
- Takahashi, T. (2011). Psychophysics of the probability weighting function. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 390, 902-905.
- Takahashi, T., Ikeda, K., & Hasegawa, T. (2007). A hyperbolic decay of subjective probability of obtaining delayed rewards. *Behavioral and Brain Functions*, 3. doi:10.1186/1744-9081-3-52
- Takahashi, T., Oono, H., & Radford, M. H. B. (2008). Psychophysics of time perception and intertemporal choice models. *Physica A*, 387, 2066-2074.
- Takemura, K. (2004). Probability weighting function derived from the mental ruler model. *Paper Presented at the 28<sup>th</sup> International Congress of Psychology* (Beijing, China), doi:10.1080/00207594.2004.20040813
- 竹村和久 (2009). 行動意思決定論——経済行動の心理学—— 日本評論社.
- Takemura, K., & Murakami, H. (2016). Probability weighting functions derived from hyperbolic

- time discounting: psychophysical models and their individual level testing. *Frontiers in Psychology*, 7, doi: 10.3389/fpsyg.2016.00778.
- Takemura, K., & Murakami, H. (2018). A testing method of probability weighting functions from an axiomatic perspective. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics, section Quantitative Psychology and Measurement*, 4, doi: 10.3389/fams.2018.00048
- 竹村和久・村上始 (2018). 意思決定における確率荷重関数と時間割引関数 竹村和久 (編) 選好形成と意思決定 西條辰義 (監修) フロンティア実験社会科学 (pp. 195-223) 勁草書房
- 竹村和久・村上始 (2019). 心理学と行動経済学——古典的心理学と確率荷重関数の関係を中心に—— 行動経済学, 12, 37-50.
- 田中良久 (1973). 距離尺度および比尺度の直接構成法 八木冕 (編) 心理学研究法 16 尺度構成 (pp. 101-114) 東京大学出版会
- 豊田秀樹 (2015). 基礎からのベイズ統計学——ハミルトンモンテカルロ法による実践的入門—— 朝倉書店
- 豊田秀樹 (2016). はじめての統計データ分析——ベイズ的<ポスト  $p$  値時代>の統計学—— 朝倉書店
- 豊田秀樹 (2017). 実践ベイズモデリング——解析技法と認知モデル—— 朝倉書店
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323.
- von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1994, 1947). *Theory and games and economic behavior*. Princeton: Princeton University Press.
- Wakker, P. (2010). *Prospect theory: For risk and ambiguity*. New York: Cambridge University Press.
- Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. *Journal of Machine Learning Research*, 11, 3571-3594.
- Wu, G., & Gonzalez, R. (1996). Curvature of the probability weighting function. *Management Science*, 42, 1676-1690.
- Wu, G., & Gonzalez, R. (1998). Common consequence conditions in decision making under risk. *Journal of Risk and Uncertainty*, 16, 115-139.



## 脚注

<sup>1</sup>中村 (personal communication, 2014 年 11 月) は, 研究 1 のランク依存型期待効用理論の公理系および主要な公理の検証方法, 研究 2 の 3.3 節における研究 1 のデータを用いた確率加重関数の形状の推測方法について, e メールにおいてご教示いただいた。

## 付録 A stan code と R の実行関数

### A.1 2.3.2 項のランク双対称性の検証で用いたモデルの推定

2.3.2 項では R のパッケージ `brms` を用いてマルコフ連鎖モンテカルロ法によるベイズ推定を行った。下記にその際に用いた R の実行関数のコードを示す。なお、下記のコードにおける変数について、`val` はステップ 3 における  $(aob) \bullet (cod)$  あるいはステップ 6 における  $(aoc) \bullet (bod)$  の値、`step_n` はステップ 3 あるいはステップ 6 であるか、`stim_num` は刺激セットの番号、`participant` は実験参加者番号を表している。

```
## R の実行関数のコード
```

```
n_warmup = 5000
```

```
n_iter = 25000
```

```
n_chain = 5
```

```
mycw_noPrior <- brm(val ~ step_n*stim_num + (1|participant) +  
(1|participant:step_n) + (1|participant:stim_num),  
  data=dat,  
  prior= c(set_prior("", class = "b"),  
           set_prior("", class = "Intercept"),  
           set_prior("", class = "sd"),  
           set_prior("", class = "sigma")  
  ),  
  chains=n_chain, warmup=n_warmup, iter=n_iter,  
  cores=5, control = list(adapt_delta=0.999, max_treedepth = 15))
```

## A.2 3.4.2 項の確率加重関数の形状の推測で用いたモデルの推定

3.4.2 項では R のパッケージ `brms` を用いてマルコフ連鎖モンテカルロ法によるベイズ推定を行った。下記にその際に用いた R の実行関数のコードを示す。なお、下記のコードにおける変数について、`choice_count` はリスクなクジの選択回数、`rung_fct` はクジの対の番号、`par_num` は実験参加者番号を表している。

```
## R の実行関数のコード
```

```
n_warmup = 5000
```

```
n_iter = 25000
```

```
n_chain = 5
```

```
mycw_noPrior <- brm(choice_count|trials(5) ~ rung_fct + (1|par_num),  
  family = "binomial",  
  data=dat_brms_binom,  
  prior= c(  
    set_prior("", class = "Intercept"),  
    set_prior("", class = "sd")  
  ),  
  chains=n_chain, warmup=n_warmup, iter=n_iter,  
  cores=5,  
  control = list(adapt_delta=0.999, max_treedepth = 15))
```

### A.3 効用値と確率加重値の推定

下記に、Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。

```
## Stan のコード
//  $v(\text{sure}_i)$ の値を各イテレーションでの効用値  $v(X_i)$ から線形補間する関数
functions{
  vector interpolate( int nT, int nV, vector a_, vector vx_, int[]
vx_ind_lower_, int[] vx_ind_upper_ ){
    vector[nT] sure_inter_;
    vector[nV+1] vx_0_;
    vx_0_ = append_row(0, vx_);
    for( i in 1:nT){
      sure_inter_[i] = vx_0_[vx_ind_lower_[i]] +
a_[i]*( vx_0_[vx_ind_upper_[i]] - vx_0_[vx_ind_lower_[i]] );
    }
    return(sure_inter_);
  }
}
data {
  int nT; //総データ数 4,125 個 (クジ 165 種類×確実にもらえる金額 25 種類)
  int nY; //クジの結果  $y$  が 0 円であるクジの数
  int nV; //効用値の水準数
  int nP; //確率加重値の水準数
  real<lower=0> x[nT]; //クジの結果  $x$ 
  real<lower=0> y[nT]; //クジの結果  $y$ 
  vector<lower=0>[nV] x_lev; //クジの結果 8 水準 (0 円を含めず, 2,500 円から 80,000
円まで)。なお推定時には 100 分の 1 の値を用いた
  vector<lower=0>[nT] coef_a; //  $v(\text{sure}_i)$ の値を効用値  $v(X_i)$ から線形補間する際に用い
た係数
  int<lower=0, upper=nV+1> lower_ind[nT]; //  $v(\text{sure}_i)$ の値を効用値  $v(X_i)$ から線形補
間する際に用いた定義域の区間  $[x_0, x_1]$ における下限  $x_0$  の水準番号。なお, クジの結果は
x_lev では 8 水準としたが, 線形補間の際には 0 も含めたため, 9 水準である。
  int<lower=0, upper=nV+1> upper_ind[nT]; // //  $v(\text{sure}_i)$ の値を効用値  $v(X_i)$ から線
```

形補間する際に用いた定義域の区間 $[x_0, x_I]$ における上限  $x_I$  の水準番号。

```
int<lower=-1, upper=1> chioce_sure[nT]; //選択結果。確実にもらえる方を選んだ場合に 1, クジを選んだ場合は 0 とした
```

```
int<lower=0, upper=nV> xID[nT]; //クジの結果 x の水準番号
```

```
int<lower=0, upper=nV> yID[nT]; //クジの結果 y の水準番号
```

```
int<lower=0, upper=12> pID[nT]; //クジの確率の水準番号
```

```
}
```

```
parameters {
```

```
vector<lower=0>[nV] vx; //効用値 8 水準
```

```
real<lower=0, upper=1> wp[nP]; //確率加重値 11 水準
```

```
}
```

```
transformed parameters {
```

```
real<lower=0> EU_Gamble[nT]; //クジの効用値
```

```
real<lower=0> EU_Sure[nT]; //確実にもらえる金額の効用値
```

```
vector<lower=0>[nT] sure; //  $v(\text{sure}_i)$  の値
```

```
sure = interpolate(nT, nV, coef_a, vx, lower_ind, upper_ind);
```

```
//t stim
```

```
for (t in 1:nY){
```

```
EU_Gamble[t] = wp[pID[t]]*vx[xID[t]];
```

```
EU_Sure[t] = sure[t];
```

```
}
```

```
for ( t in (nY+1) : nT ){
```

```
EU_Gamble[t] = wp[pID[t]]*(vx[xID[t]]-vx[yID[t]]) + (vx[yID[t]]);
```

```
EU_Sure[t] = sure[t];
```

```
}
```

```
}
```

```
model {
```

```
for( t in 1:nT){
```

```
      chioce_sure[t] ~ bernoulli_logit( EU_Sure[t] - EU_Gamble[t] );
    }

}
generated quantities{
}

## R の実行関数のコード
fit <- sampling( stanmodel, data=dat_list_current,
                warmup=2000, iter=22000, chains = 5,
                pars = c( "wp", "vx" ) )
```

## A.4 確率加重関数のモデルに関するフリーパラメータの推定

下記に、Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。モデルのパラメータが一つの場合として、恒等 - 双曲線型，パラメータが二つの場合として、ベキ - 双曲線型，パラメータが三つの場合として、ベキ - 一般化双曲線型を例として示す。Stan のコードにおいて、他のモデルとの違いは、モデル式を記述した部分のみであり、網掛けで示す。なお、一般化双曲線型の場合には、 $k$  と  $b$  の積を一つのパラメータとして推定したあとに、generated quantities において、 $k$  を計算している箇所が一般化双曲線型以外のモデルとは異なる。また参加者ごとの対数尤度の総和および WAIC の算出は R にて行った。

### A.4.1 恒等 - 双曲線型

下記に、Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。

```
## Stan のコード
//確率加重関数のモデル：恒等 - 双曲線型による予測値（確率加重値）を求める関数
functions{
  row_vector wp_model( int nP_, vector p_lev_, real para_1 ){
    row_vector[nP_] wp_;

    for( i in 1:nP_){
      wp_[i] = (1+para_1*( 1/p_lev_[i] ) - 1 )^(-1) ;
    }

    return(wp_);
  }
}
data {
  int nSub; //実験参加者の数
  int nP; //確率加重値の水準数
  matrix<lower=0, upper=1>[nSub, nP] wp_dat; //実験参加者 45 名の確率
加重値
  vector<lower=0, upper=1>[nP] p_lev; //確率 11 水準
  real para_1_upper_; //確率加重関数のモデルのフリーパラメータの上限
}
```

```

parameters {
  // グループレベルのパラメータ
  real para_1_mu_pr;
  real<lower=0>para_1_sigma;

  // 個人レベルのパラメータ
  vector[nSub] para_1_pr;

  // 確率加重関数のモデルに関する標準偏差
  real<lower=0> s_wp;
}

transformed parameters {

  // 個人レベルのパラメータ
  vector<lower=0, upper=para_1_upper_>[nSub] para_1;
  matrix<lower=0, upper=1>[nSub, nP] wp; //確率加重関数のモデルにおける
  各実験参加者の各水準の確率加重値

  for( i in 1:nSub){
    para_1[i] = Phi_approx(para_1_mu_pr + para_1_sigma *
para_1_pr[i])*para_1_upper_;
    wp[i,] = wp_model( nP, p_lev, para_1[i]);
  }

}

model {
  // グループレベルのパラメータ
  para_1_mu_pr ~ normal(0, 1);
  para_1_sigma ~ normal(0, 0.2);

  // 個人レベルのパラメータ
  para_1_pr ~ normal(0, 1);

```



```

    for( i in 1:nSub){
      wp_dat[i,] ~ normal( wp[i,], s_wp );
    }

  }
generated quantities{
  // グループレベルのパラメータ
  real<lower=0, upper=para_1_upper_> para_1_mu;

  // 対数尤度
  matrix[nSub, nP] log_lik_norm;

  para_1_mu = Phi_approx(para_1_mu_pr)*para_1_upper_;

  for (i in 1:nSub){
    for (tp in 1:nP ) {
      log_lik_norm[i,tp] = 0;
      log_lik_norm[i,tp] = normal_lpdf( wp_dat[i,tp] | wp[i,tp],
s_wp );
    }
  }
}

## R の実行関数のコード
n_warmup = 5000
n_iter = 25000
n_chain = 5
stanmodel <- stan_model( model_code = stan_code )
fit = sampling( stanmodel, data=dat_list,
               warmup=n_warmup, iter=n_iter, chains = n_chain,
               pars = c( "wp", "para_1", "para_1_mu", "s_wp",
"log_lik_norm"),

```

```
control = list(adapt_delta = 0.999, max_treedepth = 15) )
```

#### A.4.2 ベキ - 双曲線型

下記に, Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。

```
## Stan のコード
//確率加重関数のモデル: ベキ - 双曲線型による予測値 (確率加重値) を求める関数
functions{
  row_vector wp_model( int nP_, vector p_lev_, real para_1, real para_2 ){
    row_vector[nP_] wp_;

    for( i in 1:nP_){
      wp_[i] = (1+para_1*(((1/p_lev_[i]) - 1)^para_2))^( -1) ;
    }

    return(wp_);
  }
}
data {
  int nSub; //実験参加者の数
  int nP; //確率加重値の水準数
  matrix<lower=0, upper=1>[nSub, nP] wp_dat; //実験参加者 45 名の確率
加重値
  vector<lower=0, upper=1>[nP] p_lev; //確率 11 水準
  //確率加重関数のモデルのフリーパラメータの上限
  real para_1_upper_;
  real para_2_upper_;
}
parameters {
  // グループレベルのパラメータ
  real para_1_mu_pr;
  real<lower=0>para_1_sigma;
  real para_2_mu_pr;
```

```

    real<lower=0>para_2_sigma;

    // 個人レベルのパラメータ
    vector[nSub] para_1_pr;
    vector[nSub] para_2_pr;

    // 確率加重関数のモデルに関する標準偏差
    real<lower=0> s_wp;
}
transformed parameters {
    // 個人レベルのパラメータ
    vector<lower=0, upper=para_1_upper_>[nSub] para_1;
    vector<lower=0, upper=para_2_upper_>[nSub] para_2;
    matrix<lower=0, upper=1>[nSub, nP] wp; //確率加重関数のモデルにおける
各実験参加者の各水準の確率加重値

    for( i in 1:nSub){
        para_1[i] = Phi_approx(para_1_mu_pr + para_1_sigma *
para_1_pr[i])*para_1_upper_;
        para_2[i] = Phi_approx(para_2_mu_pr + para_2_sigma *
para_2_pr[i])*para_2_upper_;
        wp[i,] = wp_model( nP, p_lev, para_1[i], para_2[i]);
    }
}
model {
    // グループレベルのパラメータ
    para_1_mu_pr ~ normal(0, 1);
    para_2_mu_pr ~ normal(0, 1);
    para_1_sigma ~ normal(0, 0.2);
    para_2_sigma ~ normal(0, 0.2);

    // 個人レベルのパラメータ
    para_1_pr ~ normal(0, 1);

```

```

para_2_pr ~ normal(0, 1);

for( i in 1:nSub){
  wp_dat[i,] ~ normal( wp[i,], s_wp );
}

}

generated quantities{
  // グループレベルのパラメータ
  real<lower=0, upper=para_1_upper_> para_1_mu;
  real<lower=0, upper=para_2_upper_> para_2_mu;

  // 対数尤度
  matrix[nSub, nP] log_lik_norm;

  para_1_mu = Phi_approx(para_1_mu_pr)*para_1_upper_;
  para_2_mu = Phi_approx(para_2_mu_pr)*para_2_upper_;

  for (i in 1:nSub){
    for (tp in 1:nP ) {
      log_lik_norm[i,tp] = 0;
      log_lik_norm[i,tp] = normal_lpdf( wp_dat[i,tp] | wp[i,tp],
s_wp );
    }
  }
}

## R の実行関数のコード
n_warmup = 5000
n_iter = 25000
n_chain = 5

```

```

fit = sampling( stanmodel, data=dat_list,
               warmup=n_warmup, iter=n_iter, chains = n_chain,
               pars = c( "wp", "para_1", "para_2",
                         "para_1_mu", "para_2_mu", "s_wp", "log_lik_norm"),
               control = list(adapt_delta = 0.999, max_treedepth = 15) )

```

#### A.4.3 ベキ - 一般化双曲線型

下記に、Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。

```

## Stan のコード
//確率加重関数のモデル：ベキ - 一般化双曲線型による予測値（確率加重値）を求める関数
functions{
  row_vector wp_model( int nP_, vector p_lev_, real para_1, real para_2, real
para_3 ){
    row_vector[nP_] wp_;

    for( i in 1:nP_){
      wp_[i] = (1+para_1*(((1/p_lev_[i]) - 1)^para_2))^( -1/para_3 ) ;
    }

    return(wp_);
  }
}

data {
  int nSub; //実験参加者の数
  int nP; //確率加重値の水準数
  matrix<lower=0, upper=1>[nSub, nP] wp_dat; //実験参加者 45 名の確率
加重値
  vector<lower=0, upper=1>[nP] p_lev; //確率 11 水準
  //確率加重関数のモデルのフリーパラメータの上限
  real para_1_upper_;
}

```

```

        real para_2_upper_;
        real para_3_upper_;
    }
parameters {
    // グループレベルのパラメータ
    real para_1_mu_pr;
    real<lower=0>para_1_sigma;
    real para_2_mu_pr;
    real<lower=0>para_2_sigma;
    real para_3_mu_pr;
    real<lower=0>para_3_sigma;

    // 個人レベルのパラメータ
    vector[nSub] para_1_pr;
    vector[nSub] para_2_pr;
    vector[nSub] para_3_pr;

    // 確率加重関数のモデルに関する標準偏差
    real<lower=0> s_wp;

}
transformed parameters {
    // 個人レベルのパラメータ
    vector<lower=0, upper=para_1_upper_>[nSub] para_1;
    vector<lower=0, upper=para_2_upper_>[nSub] para_2;
    vector<lower=0, upper=para_3_upper_>[nSub] para_3;
    matrix<lower=0, upper=1>[nSub, nP] wp; //確率加重関数のモデルにおける
各実験参加者の各水準の確率加重値
    for( i in 1:nSub){
        para_1[i] = Phi_approx(para_1_mu_pr + para_1_sigma *
para_1_pr[i])*para_1_upper_;
        para_2[i] = Phi_approx(para_2_mu_pr + para_2_sigma *
para_2_pr[i])*para_2_upper_;

```

```

        para_3[i] = Phi_approx(para_3_mu_pr + para_3_sigma *
para_3_pr[i])*para_3_upper_;
        wp[i,] = wp_model( nP, p_lev, para_1[i], para_2[i], para_3[i]);
    }
}
model {
    // グループレベルのパラメータ
    para_1_mu_pr ~ normal(0, 1);
    para_2_mu_pr ~ normal(0, 1);
    para_3_mu_pr ~ normal(0, 1);
    para_1_sigma ~ normal(0, 0.2);
    para_2_sigma ~ normal(0, 0.2);
    para_3_sigma ~ normal(0, 0.2);

    // 個人レベルのパラメータ
    para_1_pr ~ normal(0, 1);
    para_2_pr ~ normal(0, 1);
    para_3_pr ~ normal(0, 1);

    for( i in 1:nSub){
        wp_dat[i,] ~ normal( wp[i,], s_wp );
    }

}
generated quantities{
    // グループレベルのパラメータ
    real<lower=0, upper=para_1_upper_> para_1_mu;
    real<lower=0, upper=para_2_upper_> para_2_mu;
    real<lower=0, upper=para_3_upper_> para_3_mu;
    real<lower=0, upper=para_1_upper_/para_3_upper_> para_k_mu;

    // 個人レベルのパラメータ
    vector<lower=0,upper=para_1_upper_/para_3_upper_>[nSub] para_k;

```

```

// 対数尤度
matrix[nSub, nP] log_lik_norm;

para_1_mu = Phi_approx(para_1_mu_pr)*para_1_upper_;
para_2_mu = Phi_approx(para_2_mu_pr)*para_2_upper_;
para_3_mu = Phi_approx(para_3_mu_pr)*para_3_upper_;

para_k_mu = para_1_mu/para_3_mu;
para_k = para_1 ./ para_3;

for (i in 1:nSub){
  for (tp in 1:nP ) {
    log_lik_norm[i,tp] = 0;
    log_lik_norm[i,tp] = normal_lpdf( wp_dat[i,tp] | wp[i,tp],
s_wp );
  }
}

## R の実行関数のコード
n_warmup = 5000
n_iter = 25000
n_chain = 5
fit = sampling( stanmodel, data=dat_list,
  warmup=n_warmup, iter=n_iter, chains = n_chain,
  pars = c( "wp", "para_1", "para_k", "para_2", "para_3",
"para_1_mu", "para_k_mu", "para_2_mu", "para_3_mu",
"s_wp", "log_lik_norm"),
  control = list(adapt_delta = 0.999, max_treedepth = 15) )

```



## A.5 遅延割引関数のモデルに関するフリーパラメータの推定

下記に、Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。モデルのパラメータが一つの場合として、恒等 - 双曲線型，パラメータが二つの場合として、ベキ - 双曲線型，パラメータが三つの場合として、ベキ - 一般化双曲線型を例として示す。Stan のコードにおいて、他のモデルとの違いは、基本的にはモデル式を記述した部分のみであり、網掛けで示す。なお、一般化双曲線型の場合には、 $k$  と  $b$  の積を一つのパラメータとして推定したあとに、generated quantities において、 $k$  を計算している箇所が一般化双曲線型以外のモデルとは異なる。また先行研究データごとの対数尤度の総和および WAIC の算出は R にて行った。

### A.5.1 恒等 - 双曲線型

下記に、Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。

```
## Stan のコード
//遅延割引関数のモデル：恒等 - 双曲線型による予測値を求める関数
functions{
  real dd_model( real time_i_, real para_1 ){
    real dd_;
    dd_ = (1+para_1*(time_i_))(-1) ;
    return(dd_);
  }
}
data {
  int nlen; // 全データ数
  int nDat; //データの ID の個数
  int<lower=0, upper=nDat> ID[nlen]; //データの ID
  vector<lower=0, upper=1>[nlen] x; // 主観的等価点
  vector<lower=0>[nlen] time; //遅延時間
  real para_1_upper_; //遅延割引関数のモデルのフリーパラメータの上限
}
parameters {
  // グループレベルのパラメータ
  real para_1_mu_pr;
  real<lower=0>para_1_sigma;
```

```

// 個人レベルのパラメータ
vector[nDat] para_1_pr;

// 遅延割引関数のモデルに関する標準偏差
real<lower=0> s_dd;
}

transformed parameters {

// 個人レベルのパラメータ
vector<lower=0, upper=para_1_upper_>[nDat] para_1;
vector<lower=0, upper=1>[nlen] dd; //遅延割引関数のモデルにおける各
実験参加者の各水準の主観的等価点

for( i in 1:nlen){
    para_1[ID[i]] = Phi_approx(para_1_mu_pr + para_1_sigma *
para_1_pr[ID[i]])*para_1_upper_;
    dd[i] = dd_model( time[i], para_1[ID[i]] );
}

}

model {
// グループレベルのパラメータ
para_1_mu_pr ~ normal(0, 1);
para_1_sigma ~ normal(0, 0.2);

// 個人レベルのパラメータ
para_1_pr ~ normal(0, 1);

for( i in 1:nlen){
    x[i] ~ normal( dd[i], s_dd );
}
}

```

```

generated quantities{
  // グループレベルのパラメータ
  real<lower=0, upper=para_1_upper_> para_1_mu;

  // 対数尤度
  vector[nlen] log_lik;

  para_1_mu = Phi_approx(para_1_mu_pr)*para_1_upper_;

  for (i in 1:nlen){
    log_lik[i] = 0;
    log_lik[i] = normal_lpdf( x[i] | dd[i], s_dd );
  }
}

## R の実行関数のコード
n_warmup = 5000
n_iter = 25000
n_chain = 5

fit = sampling( stanmodel, data=dat_list,
               warmup=n_warmup, iter=n_iter, chains = n_chain,
               pars = c( "dd", "para_1", "para_1_mu", "s_dd",
               "log_lik_norm"),
               control = list(adapt_delta = 0.999, max_treedepth = 15))

```

### A.5.2 ベキ - 双曲線型

下記に、Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。

```

## Stan のコード
//遅延割引関数のモデル：ベキ - 双曲線型による予測値を求める関数
functions{
  real dd_model( real time_i_, real para_1, real para_2 ){

```

```

real dd_;
dd_ = (1+para_1*(time_i^para_2))(-1) ;
return(dd_);
}
}
data {
  int nlen; // 全データ数
  int nDat; //データの ID の個数
  int<lower=0, upper=nDat> ID[nlen]; //データの ID
  vector<lower=0, upper=1>[nlen] x; // 主観的等価点
  vector<lower=0>[nlen] time; //遅延時間
  //遅延割引関数のモデルのフリーパラメータの上限
  real para_1_upper_;
  real para_2_upper_;
}
parameters {
  // グループレベルのパラメータ
  real para_1_mu_pr;
  real<lower=0>para_1_sigma;
  real para_2_mu_pr;
  real<lower=0>para_2_sigma;

  // 個人レベルのパラメータ
  vector[nDat] para_1_pr;
  vector[nDat] para_2_pr;

  // 遅延割引関数のモデルに関する標準偏差
  real<lower=0> s_dd;
}
transformed parameters {
  // 個人レベルのパラメータ
  vector<lower=0, upper=para_1_upper_>[nDat] para_1;

```

```

vector<lower=0, upper=para_2_upper_>[nDat] para_2;
vector<lower=0, upper=1>[nlen] dd; //遅延割引関数のモデルにおける各実
験参加者の各水準の主観的等価点

for( i in 1:nlen){
  para_1[ID[i]] = Phi_approx(para_1_mu_pr + para_1_sigma *
para_1_pr[ID[i]])*para_1_upper_;
  para_2[ID[i]] = Phi_approx(para_2_mu_pr + para_2_sigma *
para_2_pr[ID[i]])*para_2_upper_;
  dd[i] = dd_model( time[i], para_1[ID[i]], para_2[ID[i]] );
}

}
model {
  // グループレベルのパラメータ
  para_1_mu_pr ~ normal(0, 1);
  para_2_mu_pr ~ normal(0, 1);
  para_1_sigma ~ normal(0, 0.2);
  para_2_sigma ~ normal(0, 0.2);

  // 個人レベルのパラメータ
  para_1_pr ~ normal(0, 1);
  para_2_pr ~ normal(0, 1);

  for( i in 1:nlen){
    x[i] ~ normal( dd[i], s_dd );
  }

}

generated quantities{
  // グループレベルのパラメータ
  real<lower=0, upper=para_1_upper_> para_1_mu;

```

```

    real<lower=0, upper=para_2_upper_> para_2_mu;

    // 対数尤度
    vector[nlen] log_lik;

    para_1_mu = Phi_approx(para_1_mu_pr)*para_1_upper_;
    para_2_mu = Phi_approx(para_2_mu_pr)*para_2_upper_;

    for (i in 1:nlen){
        log_lik[i] = 0;
        log_lik[i] = normal_lpdf( x[i] | dd[i], s_dd );
    }
}

## R の実行関数のコード
n_warmup = 5000
n_iter = 25000
n_chain = 5

fit = sampling( stanmodel, data=dat_list,
               warmup=n_warmup, iter=n_iter, chains = n_chain,
               pars = c( "dd", "para_1", "para_2",
                         "para_1_mu", "para_2_mu", "s_dd", "log_lik_norm"),
               control = list(adapt_delta = 0.999, max_treedepth = 15))

```

### A. 5.3 ベキ - 一般化双曲線型

下記に、Stan のコードと R の実行関数のコードを示す。

```

## Stan のコード
//遅延割引関数のモデル：ベキ - 一般化双曲線型による予測値を求める関数
functions{
    real dd_model( real time_i_, real para_1, real para_2, real para_3 ){
    real dd_;

```

```

dd_ = (1+para_1*(time_i_^para_2))^( -1/para_3) ;

return(dd_);
}
}
data {
  int nlen; // 全データ数
  int nDat; //データの ID の個数
  int<lower=0, upper=nDat> ID[nlen]; //データの ID
  vector<lower=0, upper=1>[nlen] x; // 主観的等価点
  vector<lower=0>[nlen] time; //遅延時間
  //遅延割引関数のモデルのフリーパラメータの上限
  real para_1_upper_;
  real para_2_upper_;
  real para_3_upper_;
}
parameters {
  // グループレベルのパラメータ
  real para_1_mu_pr;
  real<lower=0>para_1_sigma;
  real para_2_mu_pr;
  real<lower=0>para_2_sigma;
  real para_3_mu_pr;
  real<lower=0>para_3_sigma;
  // 個人レベルのパラメータ
  vector[nDat] para_1_pr;
  vector[nDat] para_2_pr;
  vector[nDat] para_3_pr;

  // 遅延割引関数のモデルに関する標準偏差
  real<lower=0> s_dd;

```

```

    }
transformed parameters {

    // 個人レベルのパラメータ
    vector<lower=0, upper=para_1_upper_>[nDat] para_1;
    vector<lower=0, upper=para_2_upper_>[nDat] para_2;
    vector<lower=0, upper=para_3_upper_>[nDat] para_3;
    vector<lower=0, upper=1>[nlen] dd; //遅延割引関数のモデルにおける各実
    験参加者の各水準の主観的等価点

    for( i in 1:nlen){
        para_1[ID[i]] = Phi_approx(para_1_mu_pr + para_1_sigma *
para_1_pr[ID[i]])*para_1_upper_;
        para_2[ID[i]] = Phi_approx(para_2_mu_pr + para_2_sigma *
para_2_pr[ID[i]])*para_2_upper_;
        para_3[ID[i]] = Phi_approx(para_3_mu_pr + para_3_sigma *
para_3_pr[ID[i]])*para_3_upper_;
        dd[i] = dd_model( time[i], para_1[ID[i]], para_2[ID[i]],
para_3[ID[i]] );
    }

}

model {

    // グループレベルのパラメータ
    para_1_mu_pr ~ normal(0, 1);
    para_2_mu_pr ~ normal(0, 1);
    para_3_mu_pr ~ normal(0, 1);
    para_1_sigma ~ normal(0, 0.2);
    para_2_sigma ~ normal(0, 0.2);
    para_3_sigma ~ normal(0, 0.2);

    // 個人レベルのパラメータ
    para_1_pr ~ normal(0, 1);

```



```

para_2_pr ~ normal(0, 1);
para_3_pr ~ normal(0, 1);

for( i in 1:nlen){
  x[i] ~ normal( dd[i], s_dd );
}

}

generated quantities{
  // グループレベルのパラメータ
  real<lower=0, upper=para_1_upper_> para_1_mu;
  real<lower=0, upper=para_2_upper_> para_2_mu;
  real<lower=0, upper=para_3_upper_> para_3_mu;
  real<lower=0> para_k_mu;

  // 個人レベルのパラメータ
  vector<lower=0>[nDat] para_k;

  // 対数尤度
  vector[nlen] log_lik;

  para_1_mu = Phi_approx(para_1_mu_pr)*para_1_upper_;
  para_2_mu = Phi_approx(para_2_mu_pr)*para_2_upper_;
  para_3_mu = Phi_approx(para_3_mu_pr)*para_3_upper_;
  para_k_mu = para_1_mu/para_3_mu;
  para_k = para_1 ./ para_3;

  for (i in 1:nlen){
    log_lik[i] = 0;
    log_lik[i] = normal_lpdf( x[i] | dd[i], s_dd );
  }
}

```

```
## R の実行関数のコード
n_warmup = 5000
n_iter = 25000
n_chain = 5

fit = sampling( stanmodel, data=dat_list,
               warmup=n_warmup, iter=n_iter, chains = n_chain,
               pars = c( "dd", "para_1", "para_k", "para_2", "para_3",
                         "para_1_mu", "para_k_mu", "para_2_mu", "para_3_mu",
                         "s_dd", "log_lik_norm"),
               control = list(adapt_delta = 0.999, max_treedepth = 15) )
```

付録 B 確率加重関数の推定結果

B.1 実験参加者 45 名の確率加重値と, 12 個のモデルのプロット

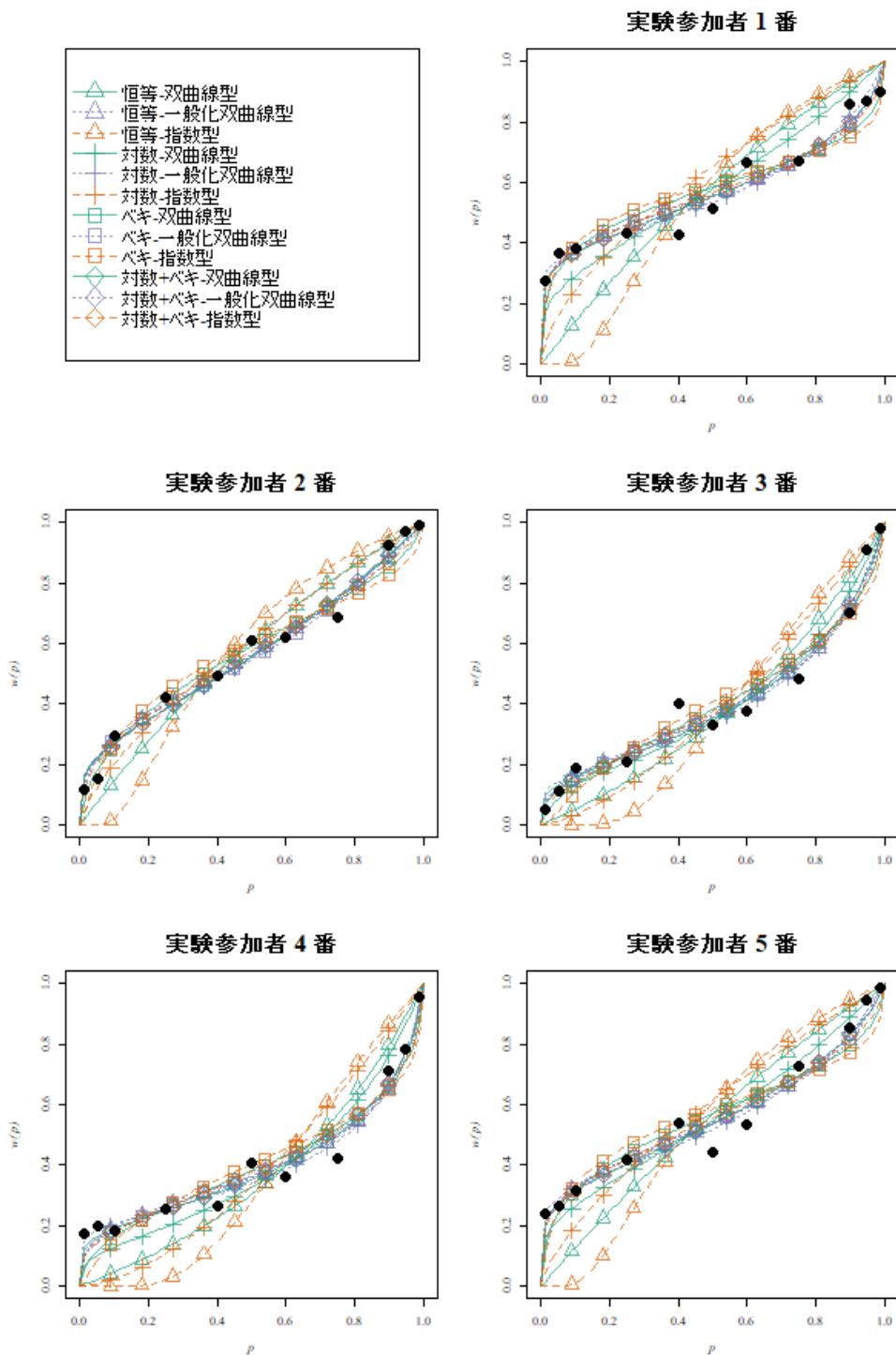


Figure B.1.1. 実験参加者 1 から 5 の確率加重値と, 12 個のモデルのプロット

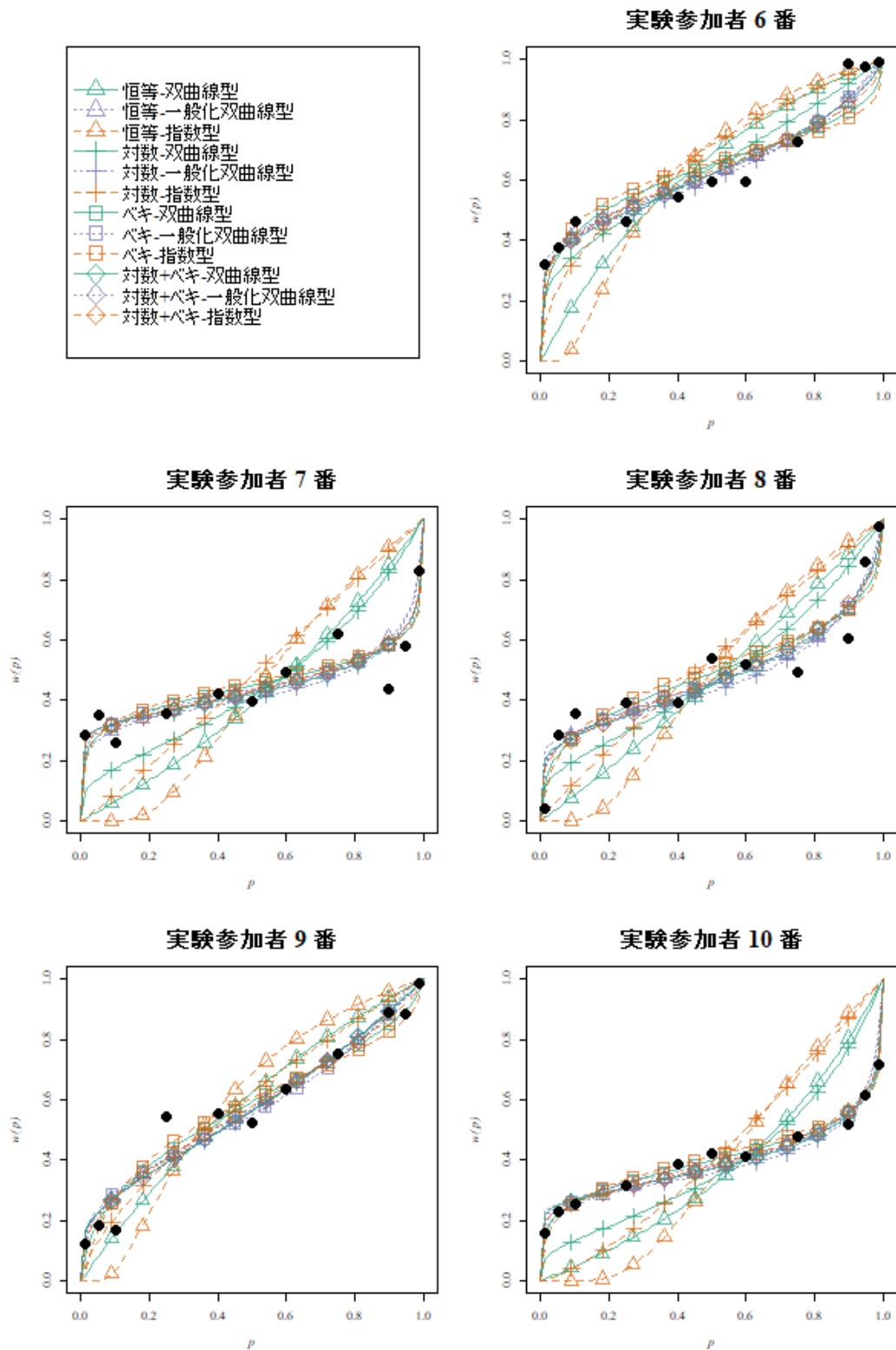


Figure B.1.2. 実験参加者 6 から 10 の確率加重値と、12 個のモデルのプロット

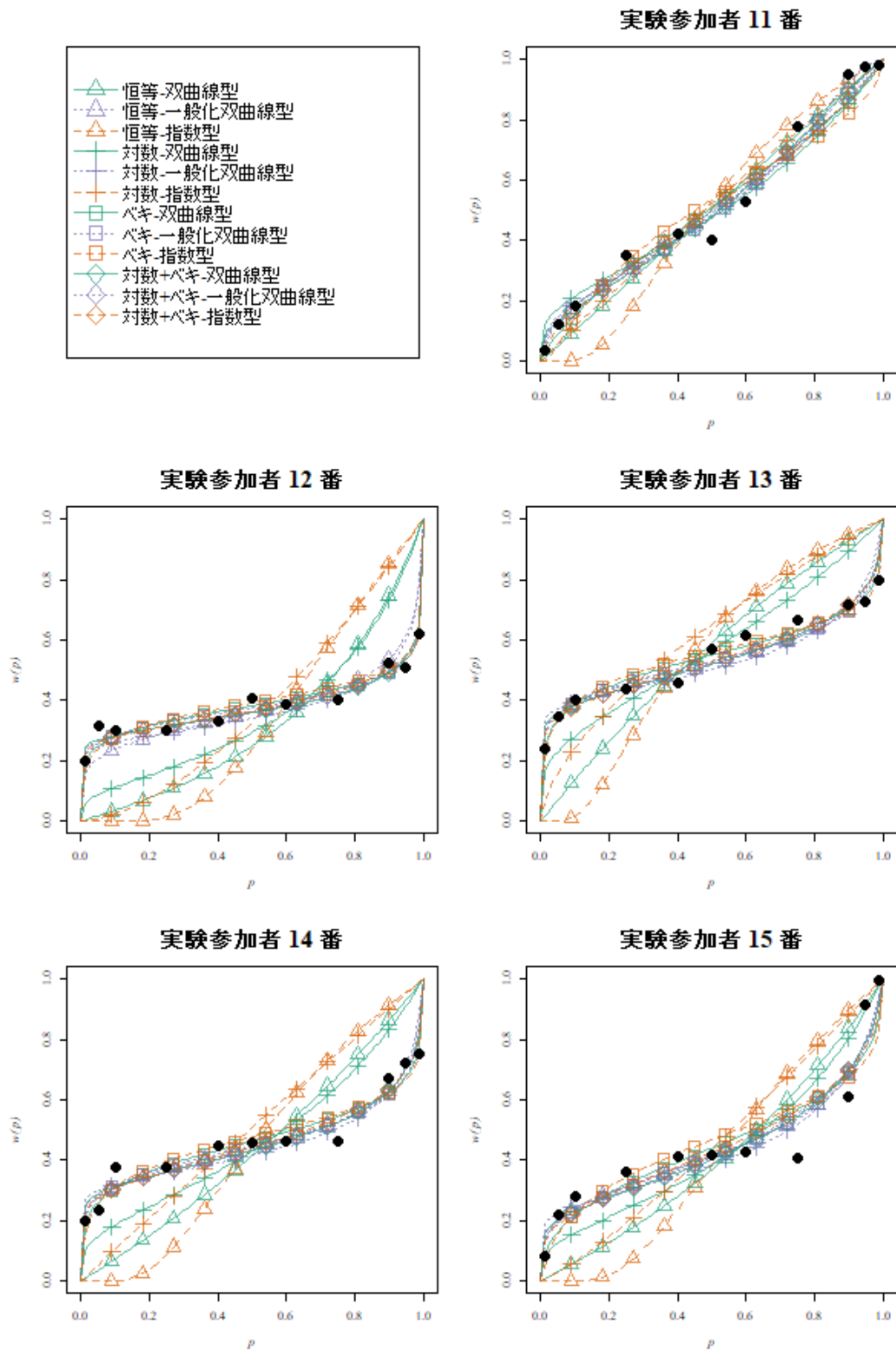


Figure B.1.3. 実験参加者 11 から 15 の確率加重値と、12 個のモデルのプロット

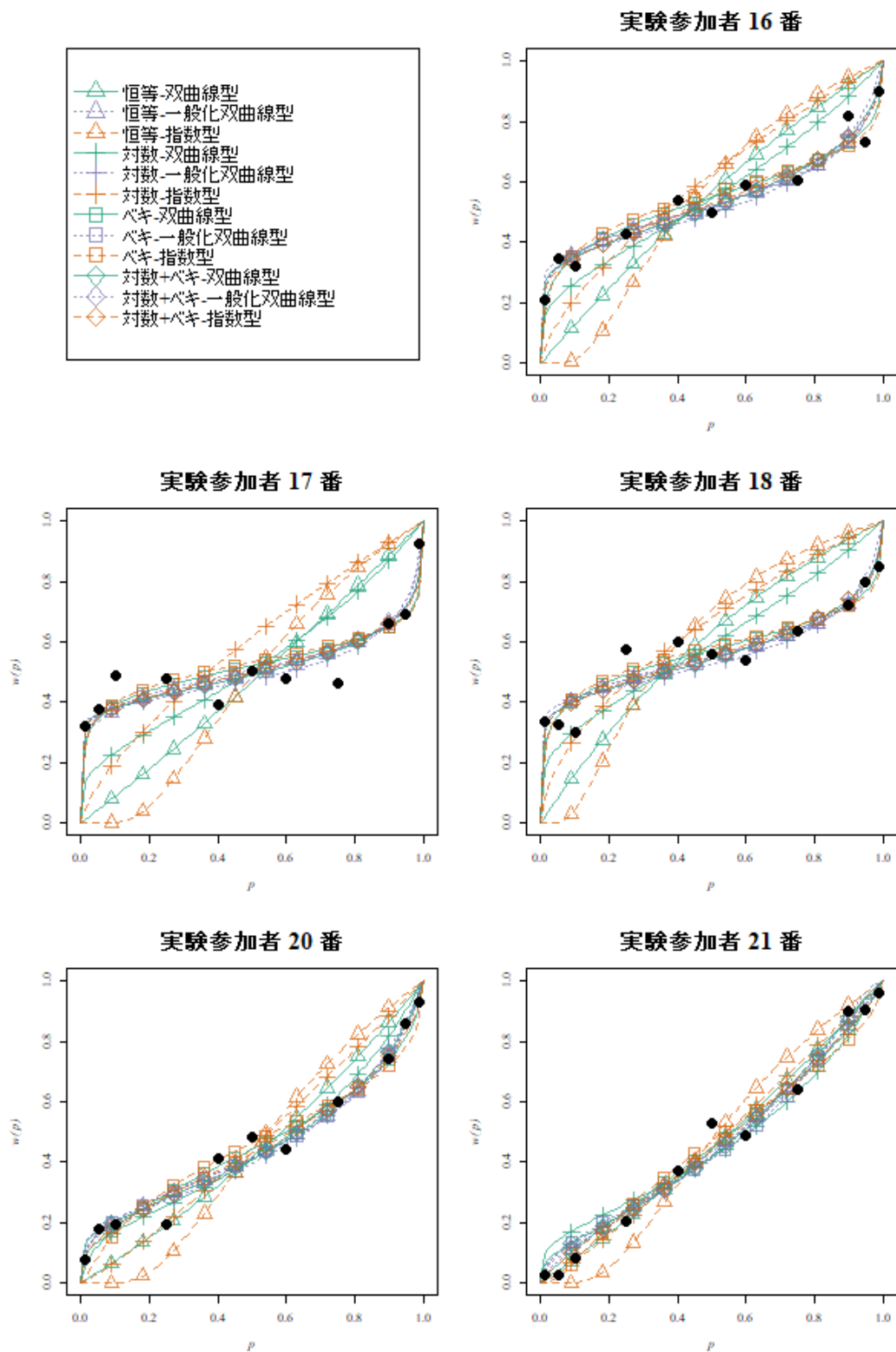


Figure B.1.4. 実験参加者 16, 17, 18, 20, 21 の確率加重値と, 12 個のモデルのプロット

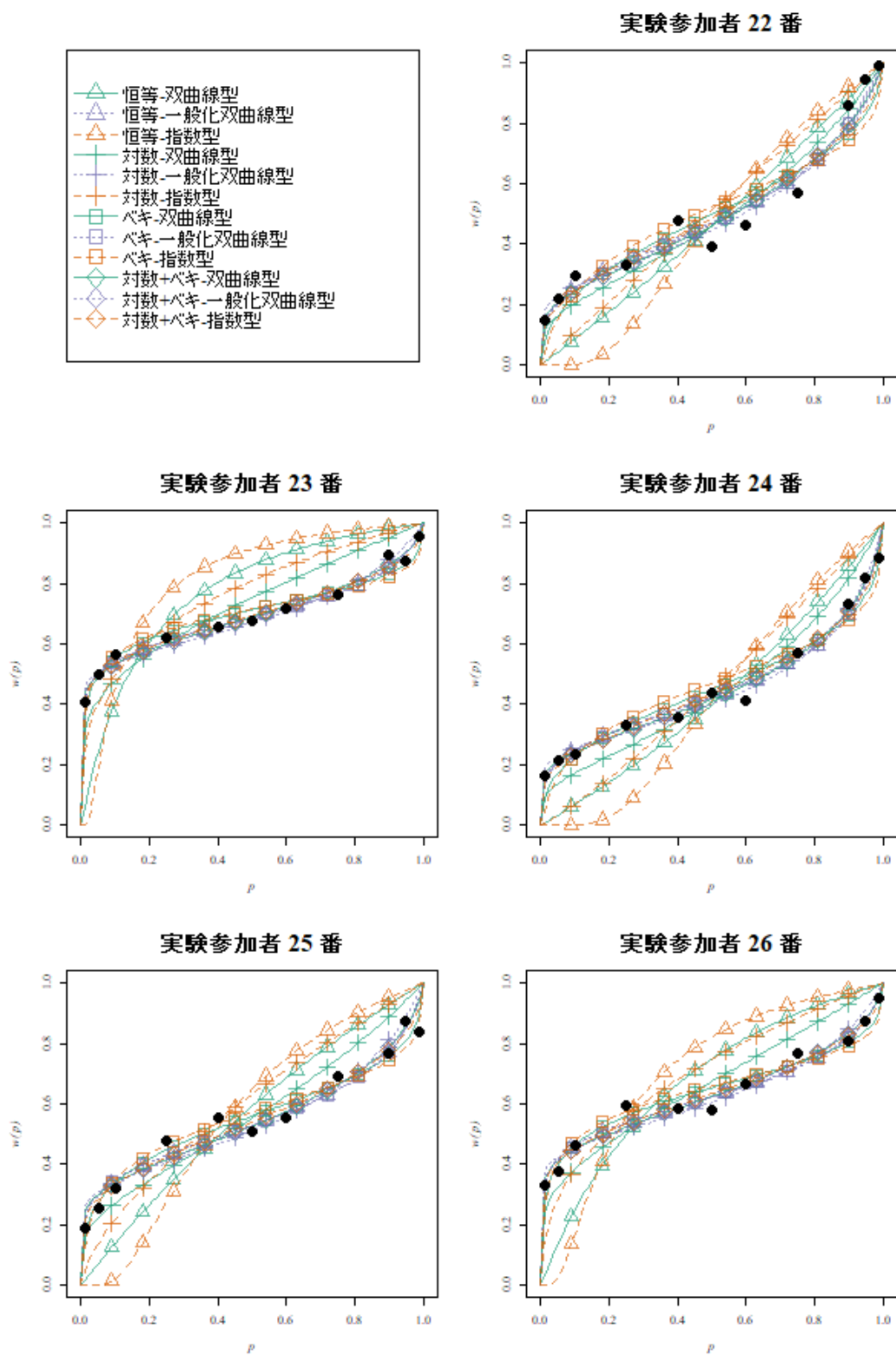


Figure B.1.5. 実験参加者 22 から 26 の確率加重値と、12 個のモデルのプロット

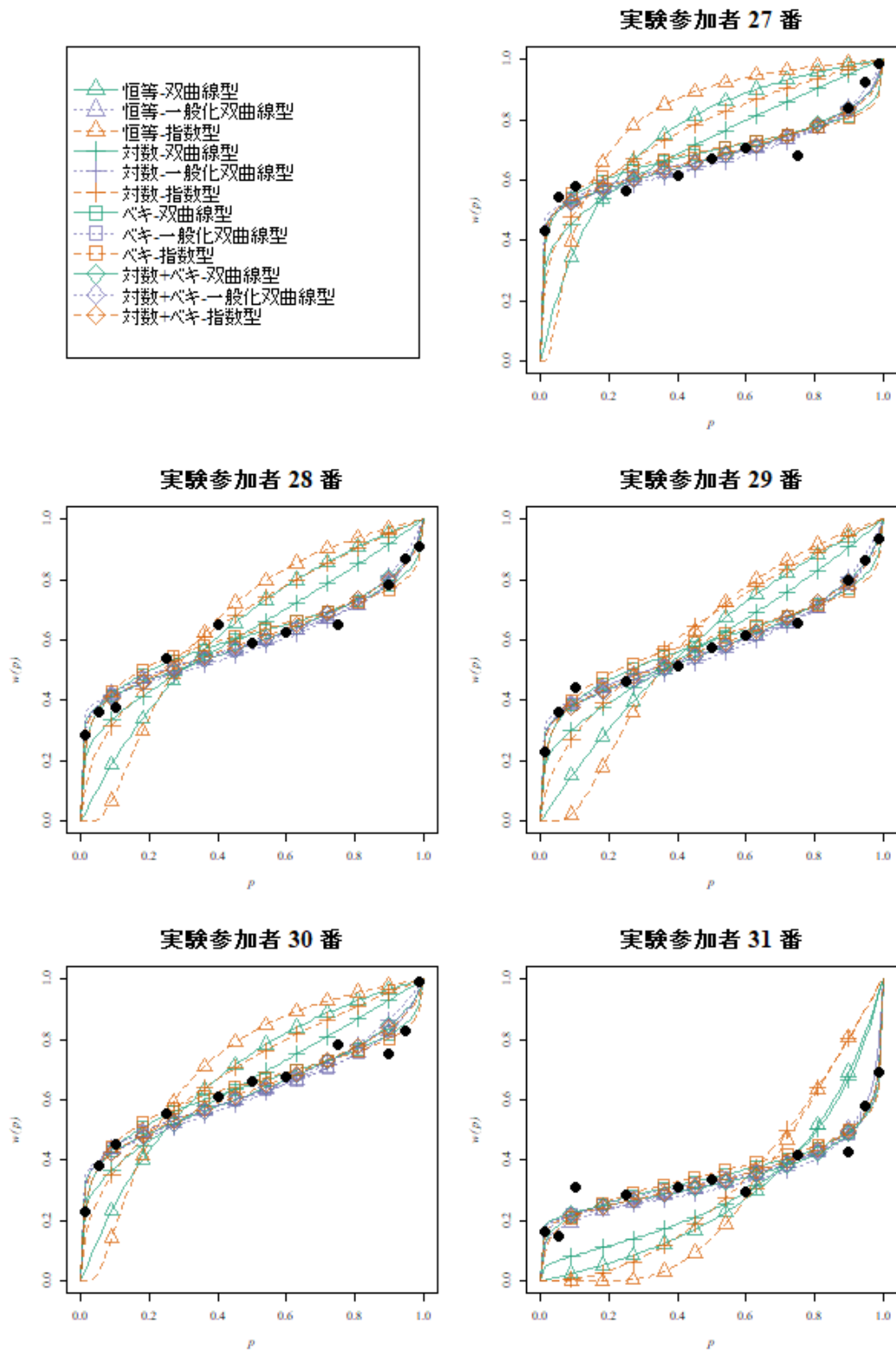


Figure B.1.6. 実験参加者 27 から 31 の確率加重値と，12 個のモデルのプロット



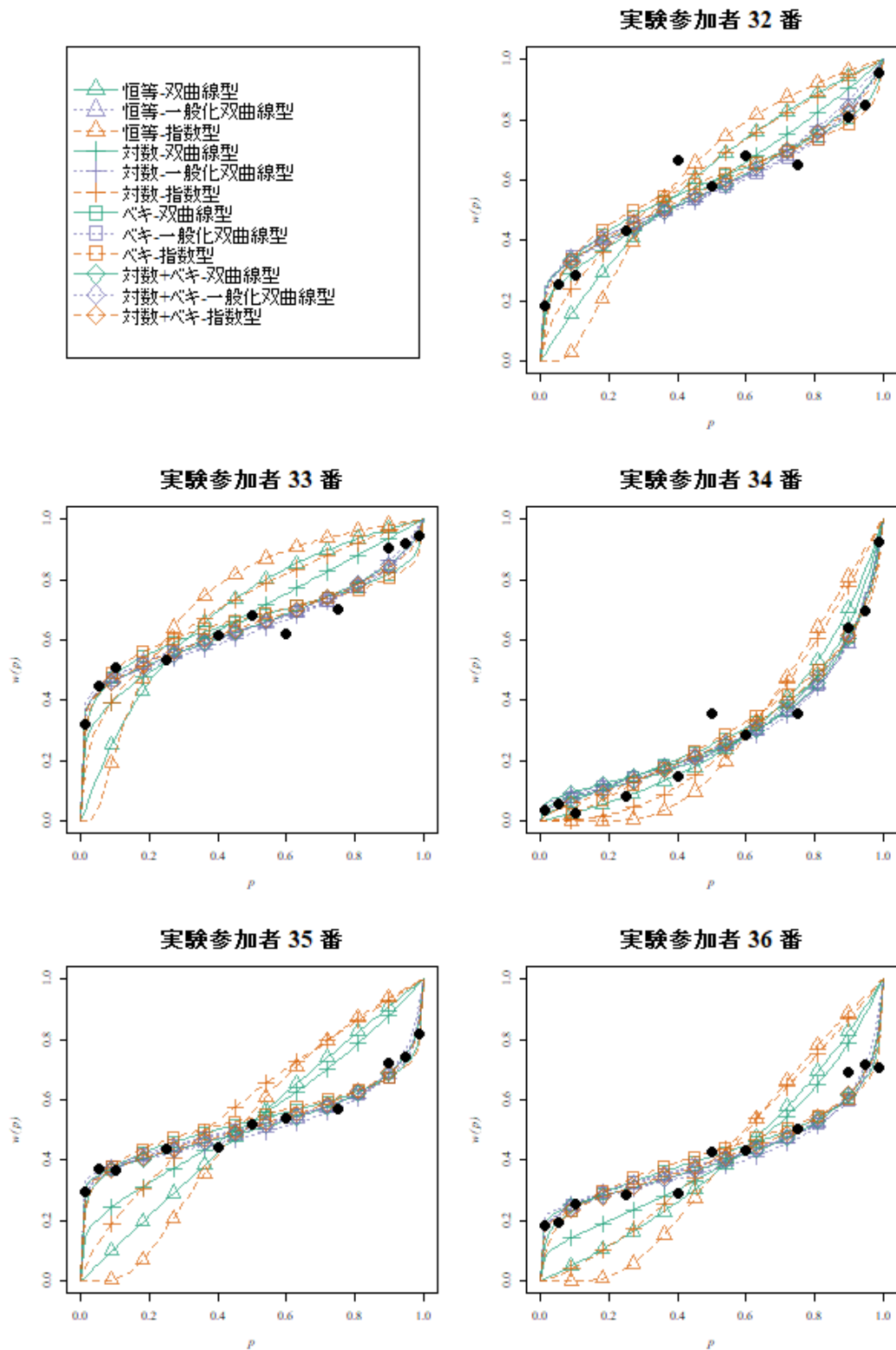


Figure B.1.7. 実験参加者 32 から 36 の確率加重値と、12 個のモデルのプロット

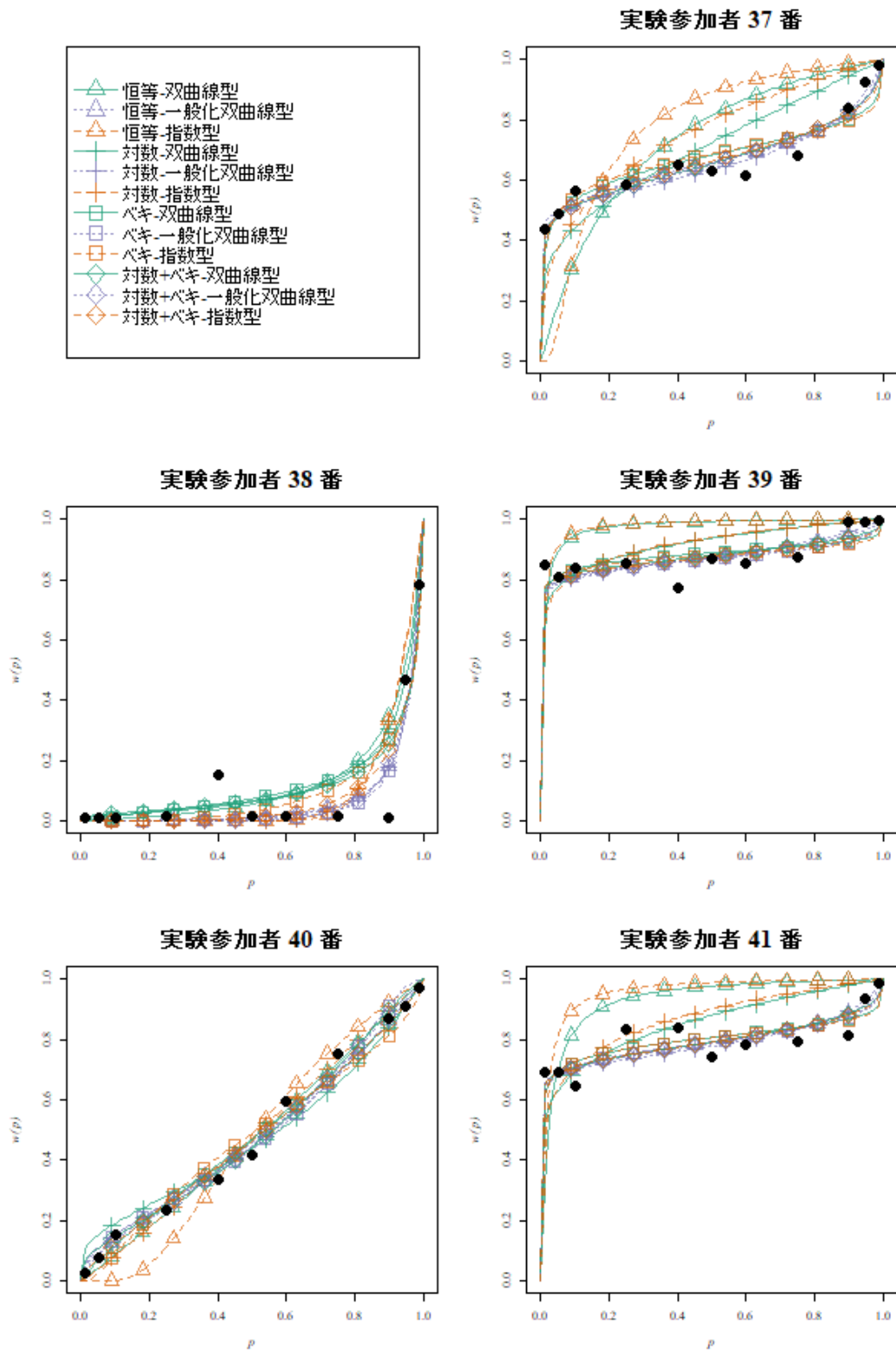


Figure B.1.8. 実験参加者 37 から 41 の確率加重値と、12 個のモデルのプロット

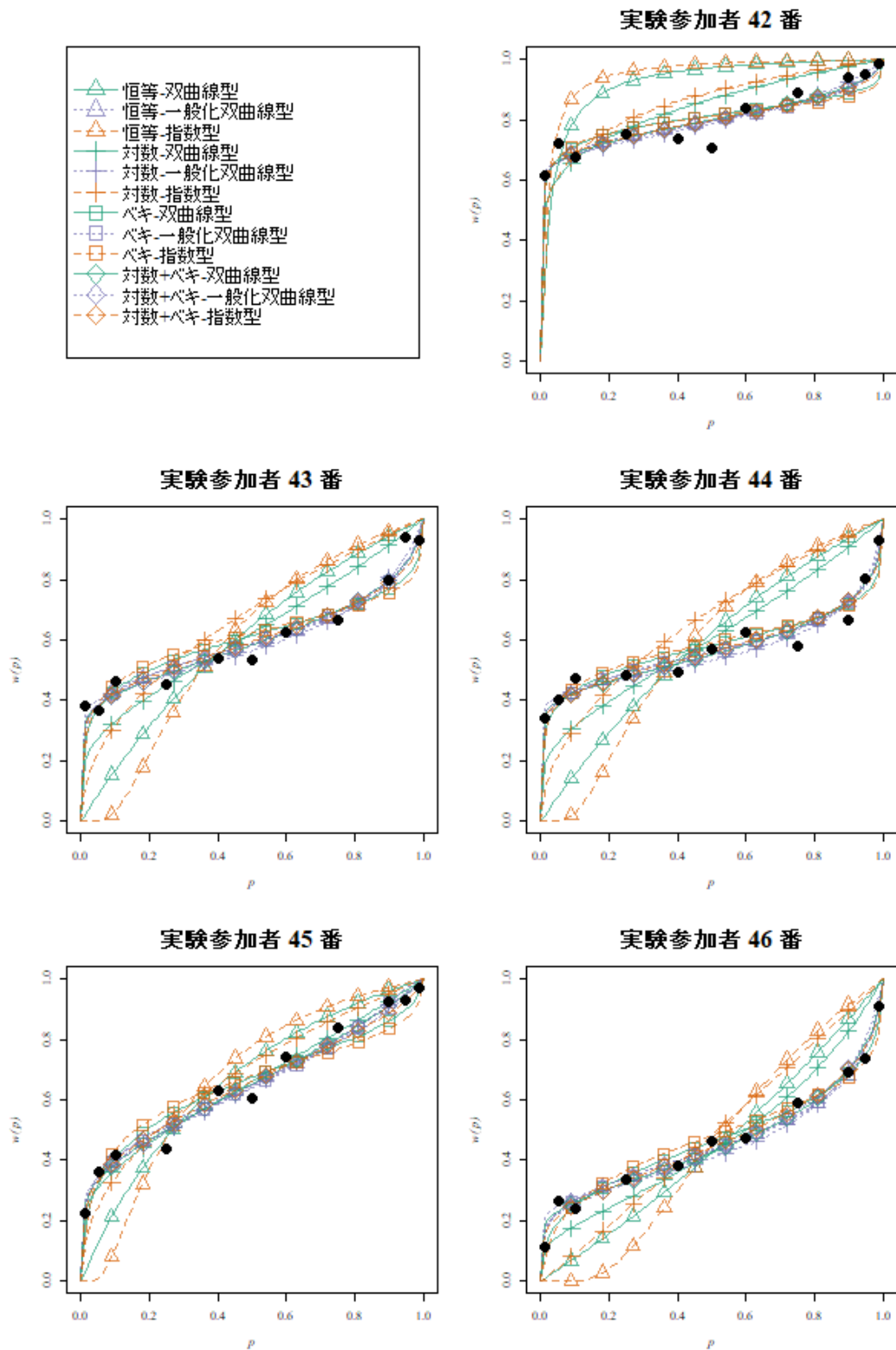


Figure B.1.9. 実験参加者 42 から 46 の確率加重値と、12 個のモデルのプロット

B.2 実験参加者レベルにおける各モデルの推定値のヒストグラム

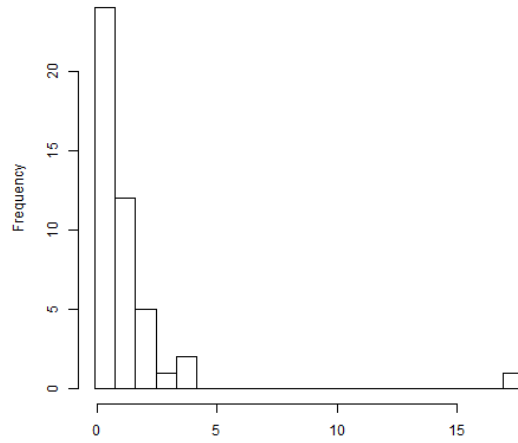
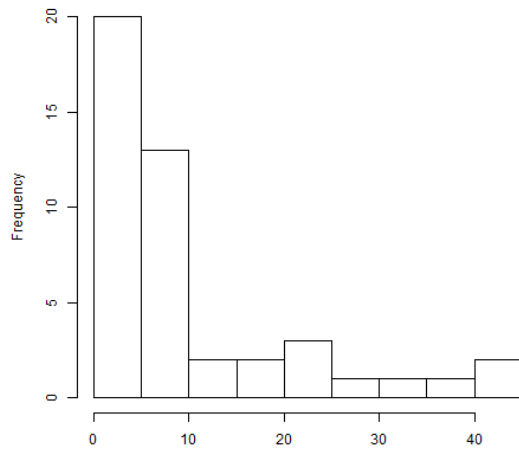


Figure B.2.1. 恒等-双曲線型の推定値のヒストグラム

a



b

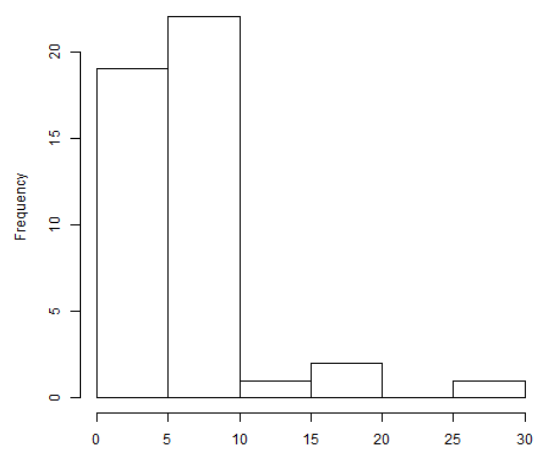


Figure B.2.2. 恒等-一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a は, パラメータ  $k$ , 右 b は, パラメータ  $b$ )

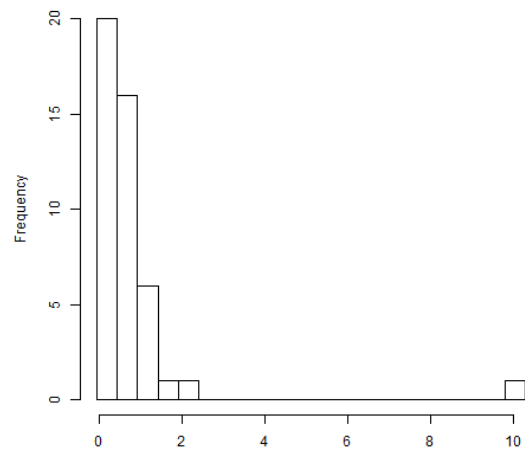


Figure B.2.3. 恒等-指数型の推定値のヒストグラム

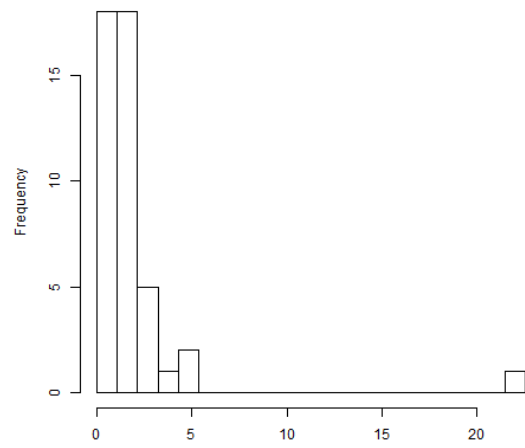
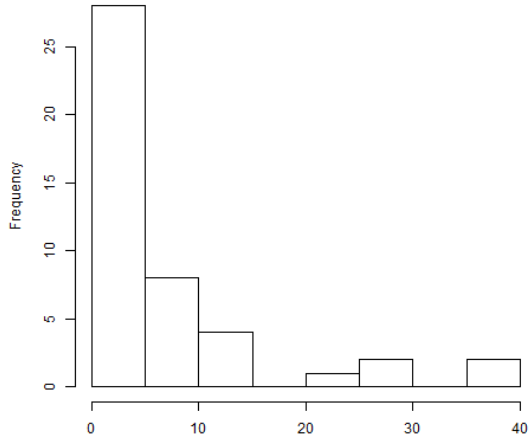


Figure B.2.4. 対数-双曲線型の推定値のヒストグラム

a



b

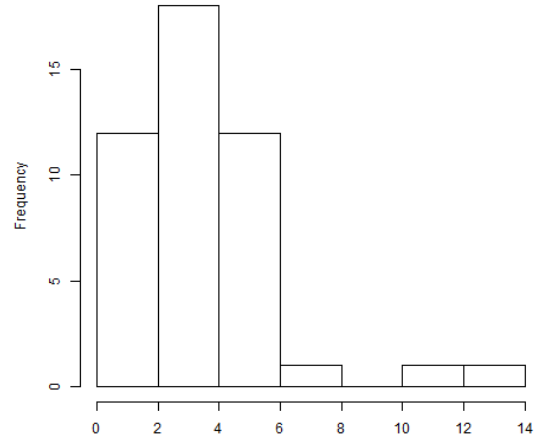


Figure B.2.5. 対数-一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a は, パラメータ  $k$ , 右 b は, パラメータ  $b$ )

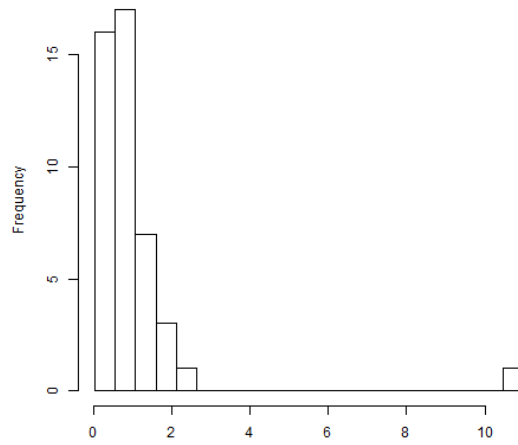
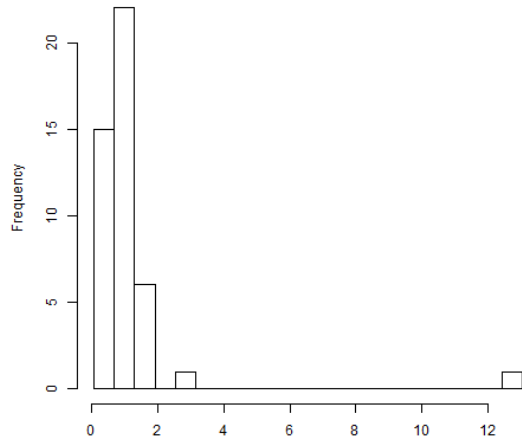


Figure B.2.6. 対数-指数型の推定値のヒストグラム

a



b

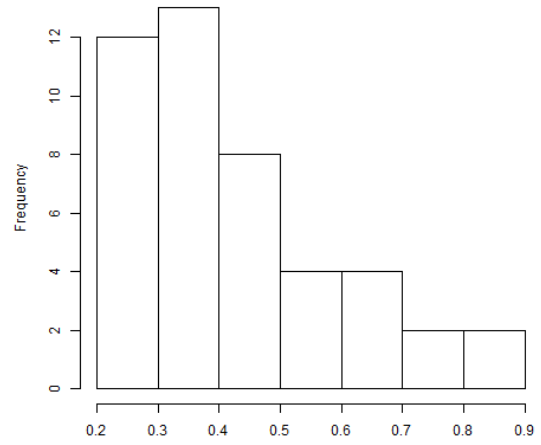
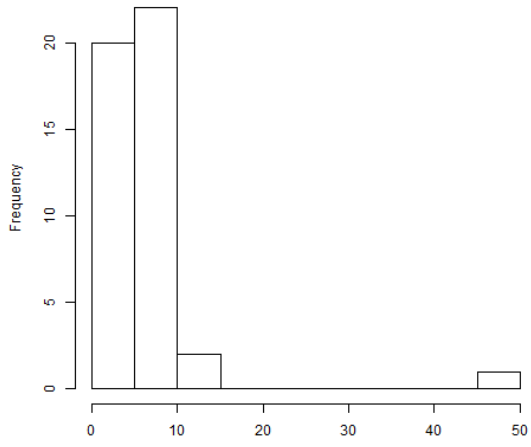
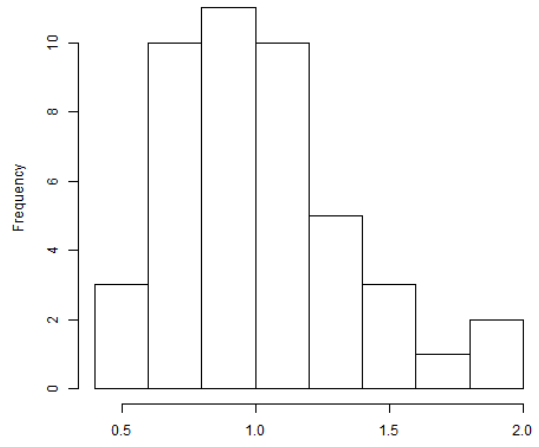


Figure B.2.7. ベキ-双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a は, パラメータ  $k$ , 右 b は, パラメータ  $a$ )

a



b



c

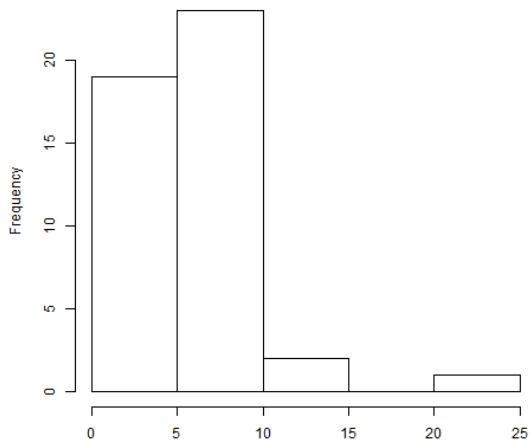
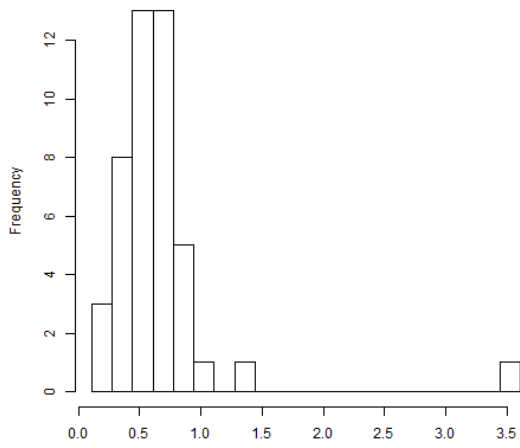


Figure B.2.8. ベキ一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左上 a はパラメータ  $k$ , 右上 b はパラメータ  $a$ , 左下 c はパラメータ  $b$ )



a



b

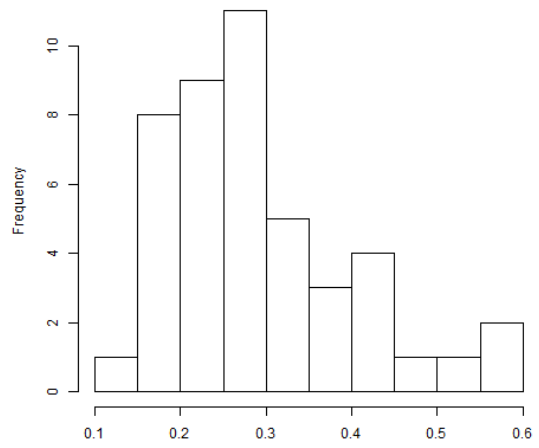
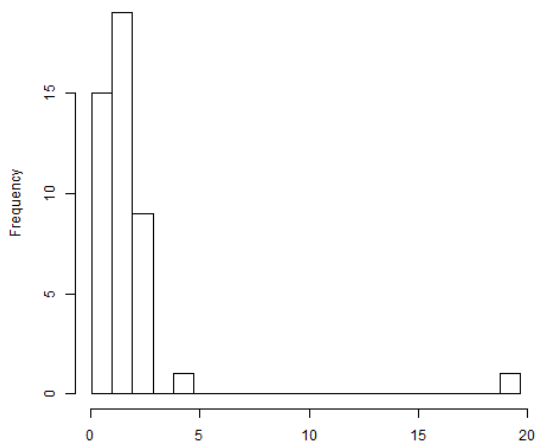


Figure B.2.9. ベキ-指数型の推定値のヒストグラム (左 a は, パラメータ  $k$ , 右 b は, パラメータ  $a$ )

a



b

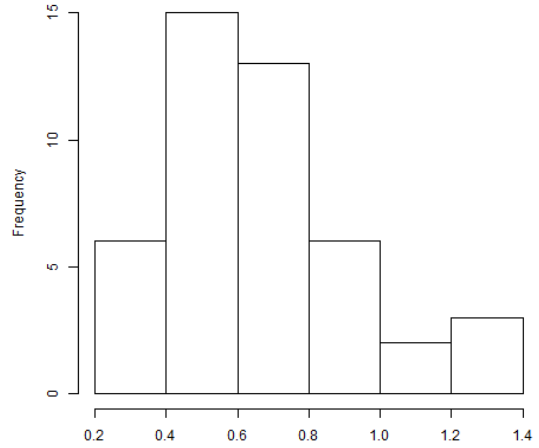
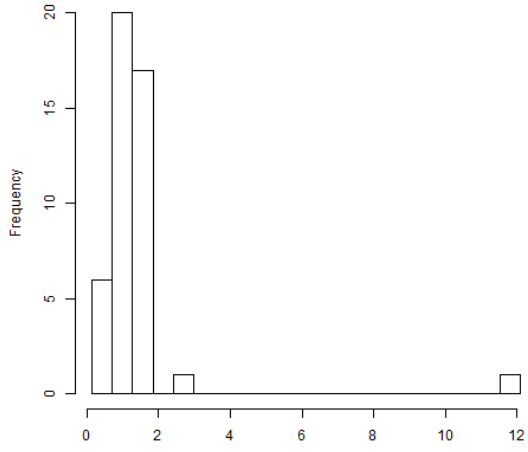
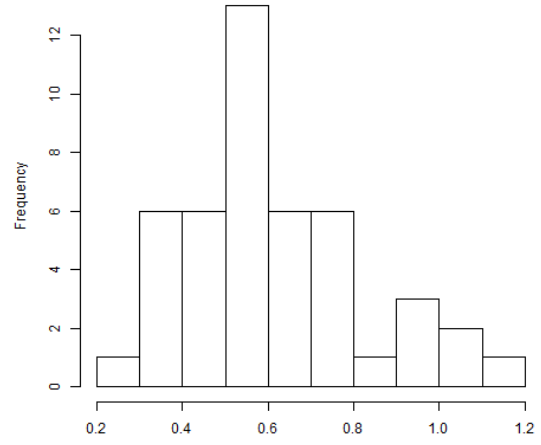


Figure B.2.10. 対数+ベキ-双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a は, パラメータ  $k$ , 右 b は, パラメータ  $a$ )

a



b



c

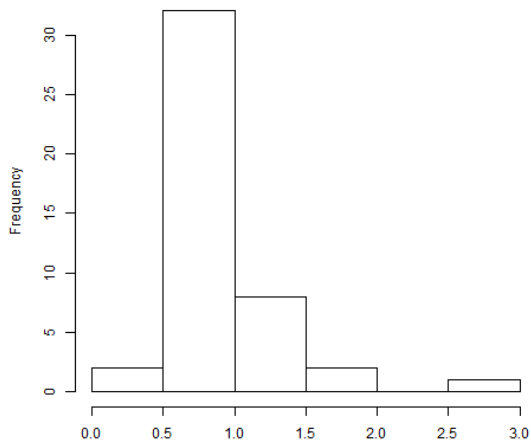
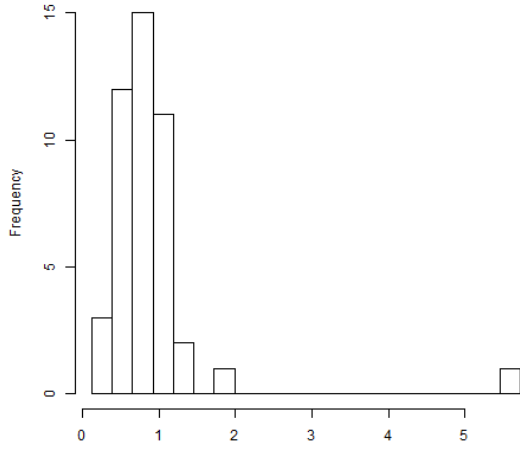


Figure B.2.11. 対数+ベキ-一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左上 a はパラメータ  $k$ , 右上 b はパラメータ  $a$ , 左下 c はパラメータ  $b$ )

a



b

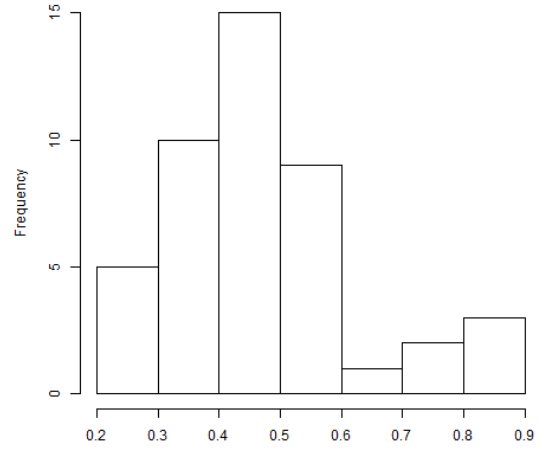


Figure B.2.12. 対数+ベキ-指数型の推定値のヒストグラム (左 a は, パラメータ  $k$ , 右 b は, パラメータ  $a$ )

B.3 確率加重関数の各モデルのグループレベルにおける推定値

Table B.3.1  
確率加重関数の各モデルにおけるグループレベルの推定値

モデル名	パラメータ	事後 期待値	事後 標準偏差	2.50%	50%	97.50%
1 恒等 - 双曲線型	$k$	0.827	0.171	0.539	0.811	1.210
	$\sigma$	0.167	0.006	0.157	0.167	0.179
2 恒等 - 一般化双 曲線型	$k$	8.114	1.842	5.056	7.919	12.259
	$b$	5.376	0.560	4.342	5.356	6.539
	$\sigma$	0.054	0.002	0.051	0.054	0.058
3 恒等 - 指数型	$k$	0.484	0.103	0.309	0.474	0.715
	$\sigma$	0.210	0.007	0.196	0.210	0.224
4 対数 - 双曲線型	$k$	1.392	0.205	1.028	1.377	1.834
	$\sigma$	0.108	0.004	0.101	0.108	0.115
5 対数 - 一般化双 曲線型	$k$	5.124	1.314	3.015	4.968	8.143
	$b$	3.002	0.359	2.348	2.982	3.757
	$\sigma$	0.058	0.002	0.054	0.058	0.062
6 対数 - 指数型	$k$	0.773	0.104	0.588	0.766	0.997
	$\sigma$	0.151	0.005	0.141	0.151	0.161
7 ベキ - 双曲線型	$k$	0.898	0.108	0.706	0.893	1.126
	$a$	0.400	0.026	0.350	0.399	0.454
	$\sigma$	0.062	0.002	0.057	0.061	0.066
8 ベキ - 一般化双 曲線型	$k$	5.687	2.187	2.984	5.200	11.290
	$a$	0.985	0.112	0.793	0.974	1.236
	$b$	5.347	0.812	3.967	5.272	7.162
	$\sigma$	0.052	0.002	0.048	0.052	0.056
9 ベキ - 指数型	$k$	0.590	0.050	0.498	0.588	0.696
	$a$	0.279	0.017	0.247	0.279	0.315
	$\sigma$	0.072	0.003	0.067	0.072	0.077
10 対数 + ベキ - 双 曲線型	$k$	1.301	0.158	1.014	1.292	1.637
	$a$	0.615	0.038	0.544	0.614	0.692
	$\sigma$	0.054	0.002	0.051	0.054	0.058
11 対数 + ベキ - 一 般化双曲線型	$k$	1.104	0.156	0.844	1.089	1.455
	$a$	0.585	0.048	0.497	0.582	0.686
	$b$	0.835	0.22	0.443	0.822	1.307
	$\sigma$	0.053	0.002	0.049	0.053	0.057
12 対数 + ベキ - 指 数型	$k$	0.774	0.068	0.651	0.771	0.917
	$a$	0.45	0.025	0.402	0.45	0.503
	$\sigma$	0.054	0.002	0.051	0.054	0.058

付録 C 遅延割引関数の推定結果

C.1 先行研究 25 件の主観的等価点と, 12 個のモデルのプロット

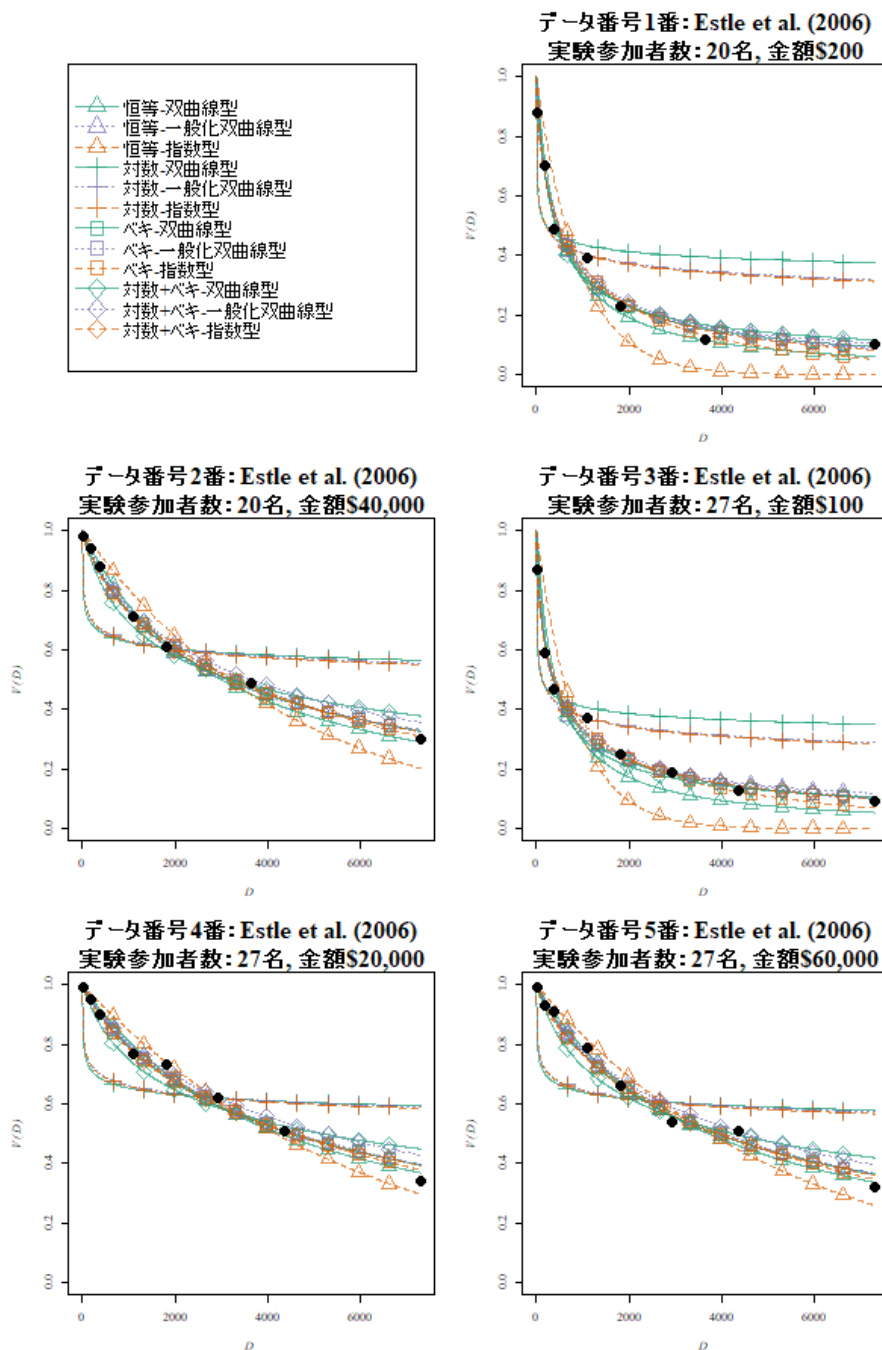


Figure C.1.1. 先行研究のデータ 1 から 5 番の主観的等価点と, 12 個のモデルのプロット (黒丸は主観的等価点を表している。なお, 遅延期間の単位は日)

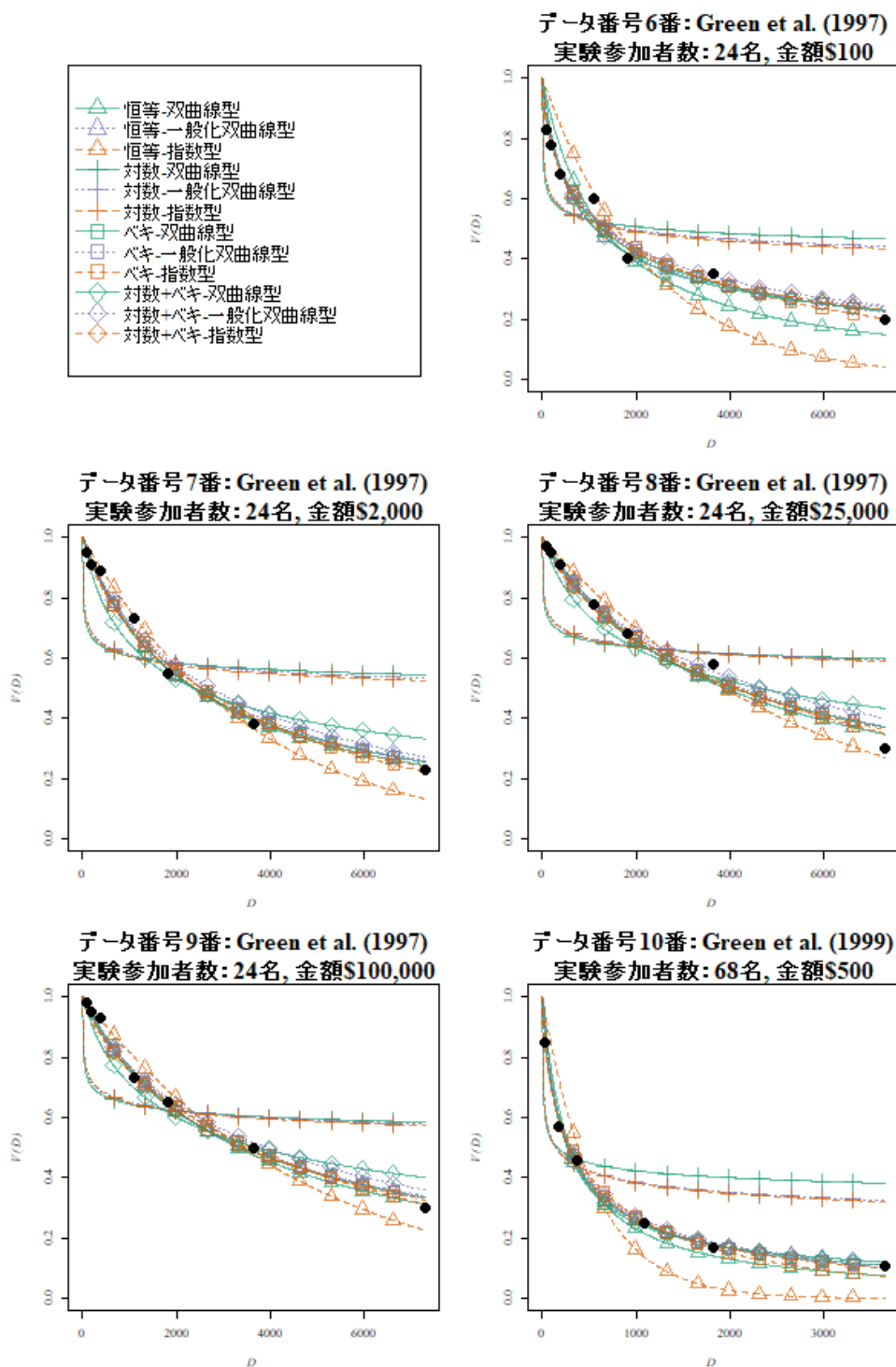


Figure C.1.2. 先行研究のデータ6から10番の主観的等価点と,12個のモデルのプロット(黒丸は主観的等価点を表している。なお, 遅延期間の単位は日)

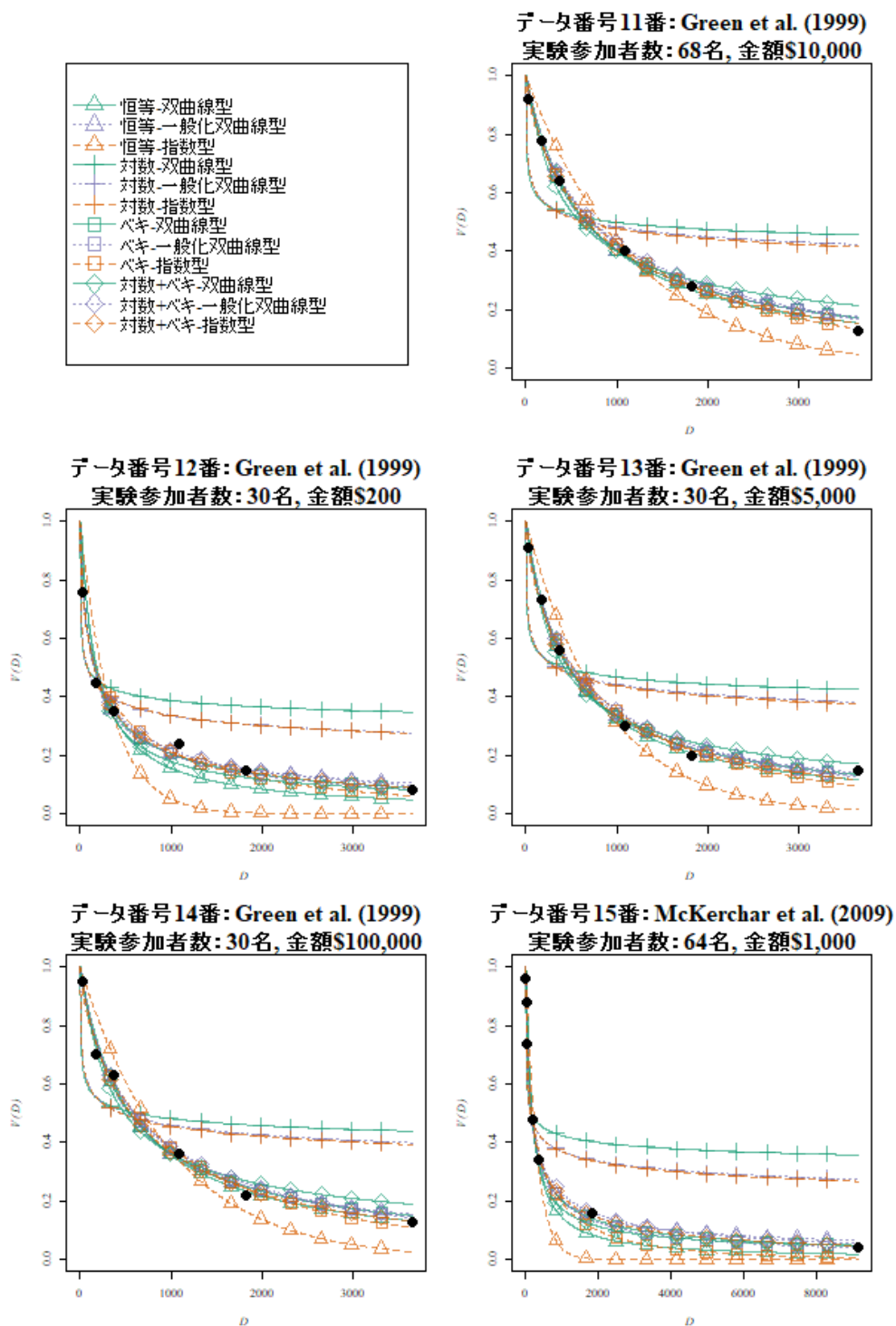


Figure C.1.3. 先行研究のデータ 11 から 15 番の主観的等価点と、12 個のモデルのプロット (黒丸は主観的等価点を表している。なお、遅延期間の単位は日)

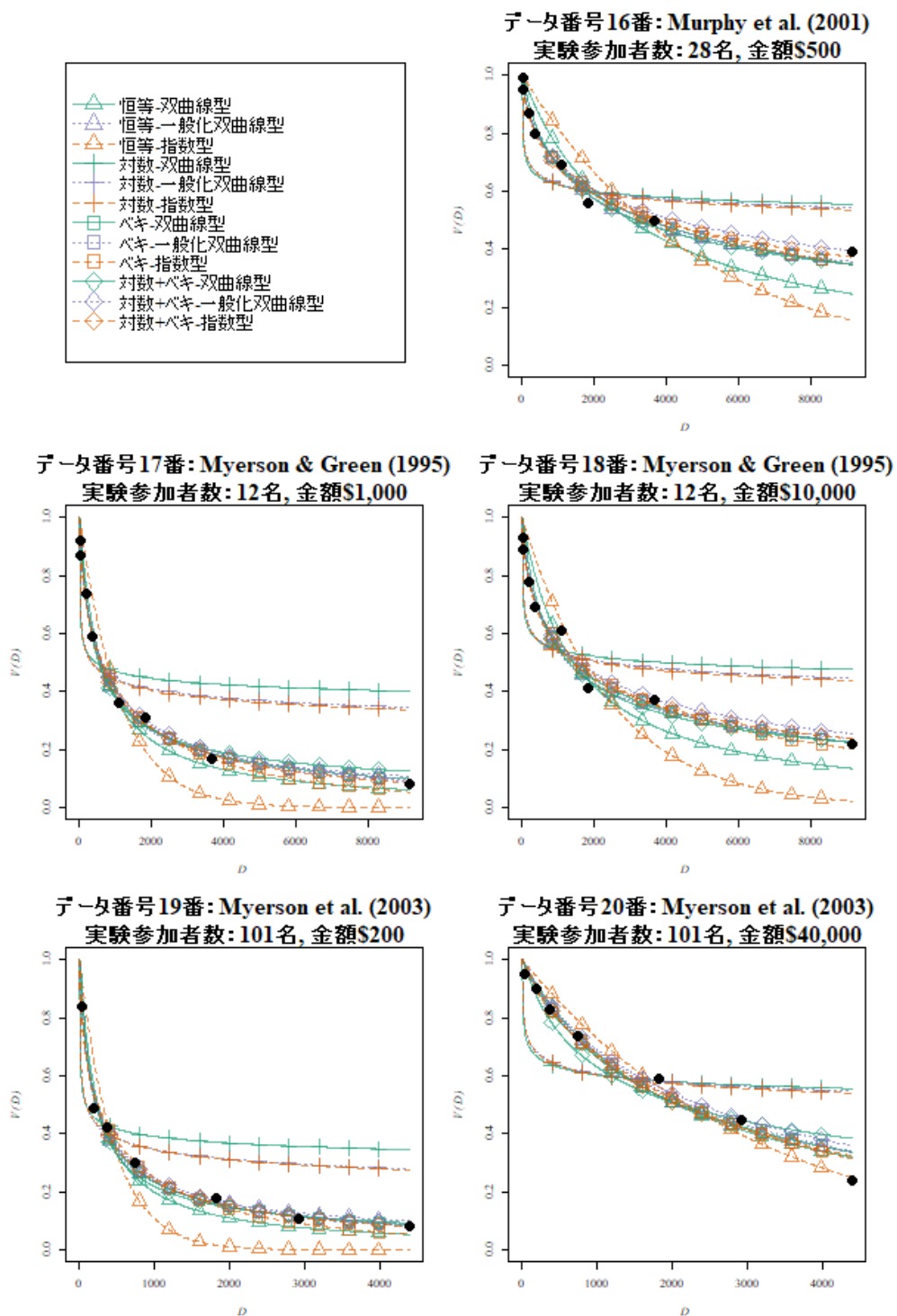
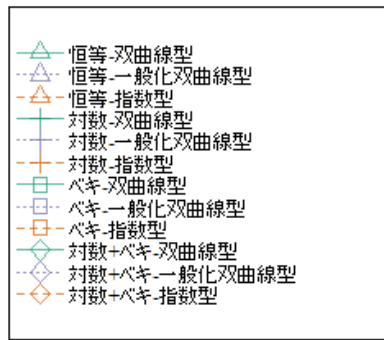
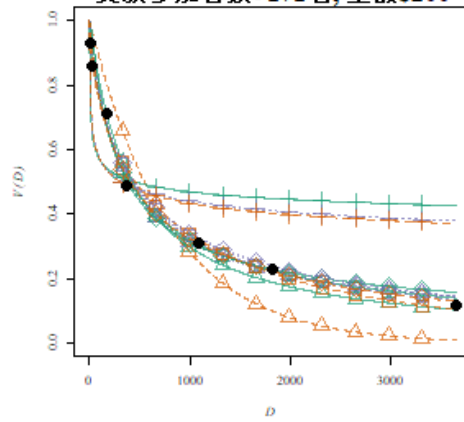


Figure C.1.4. 先行研究のデータ 16 から 20 番の主観的等価点と、12 個のモデルのプロット (黒丸は主観的等価点を表している。なお、遅延期間の単位は日)

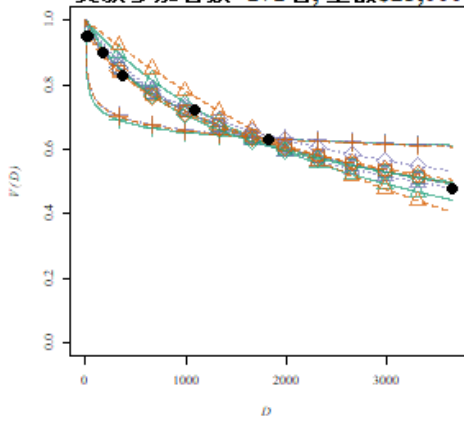




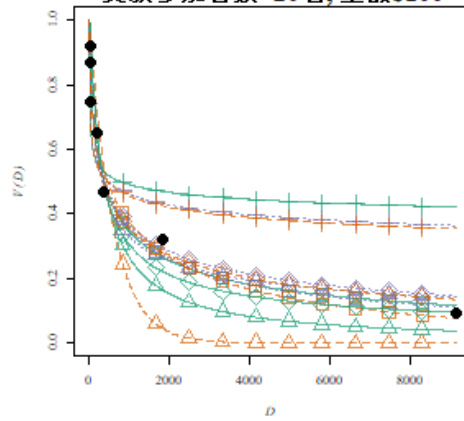
データ番号21番: Myerson et al. (2003)  
実験参加者数: 171名, 金額\$200



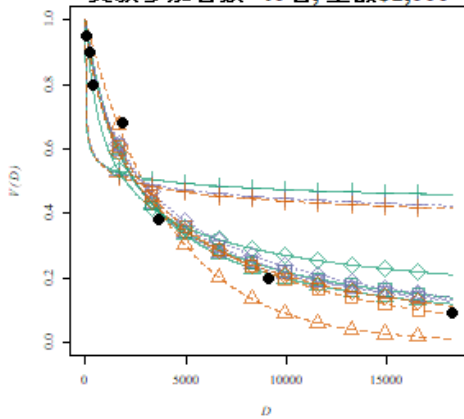
データ番号22番: Myerson et al. (2003)  
実験参加者数: 171名, 金額\$25,000



データ番号23番: Odum & Rainaud (2003)  
実験参加者数: 20名, 金額\$100



データ番号24番: Rachlin et al. (1991)  
実験参加者数: 40名, 金額\$1,000



データ番号25番: Simpson & Vuchinich (2000)  
実験参加者数: 17名, 金額\$1,000

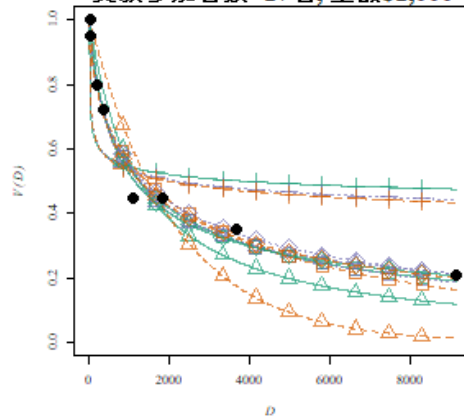


Figure C.1.5. 先行研究のデータ 21 から 25 番の主観的等価点と、12 個のモデルのプロット (黒丸は主観的等価点を表している。なお、遅延期間の単位は日)

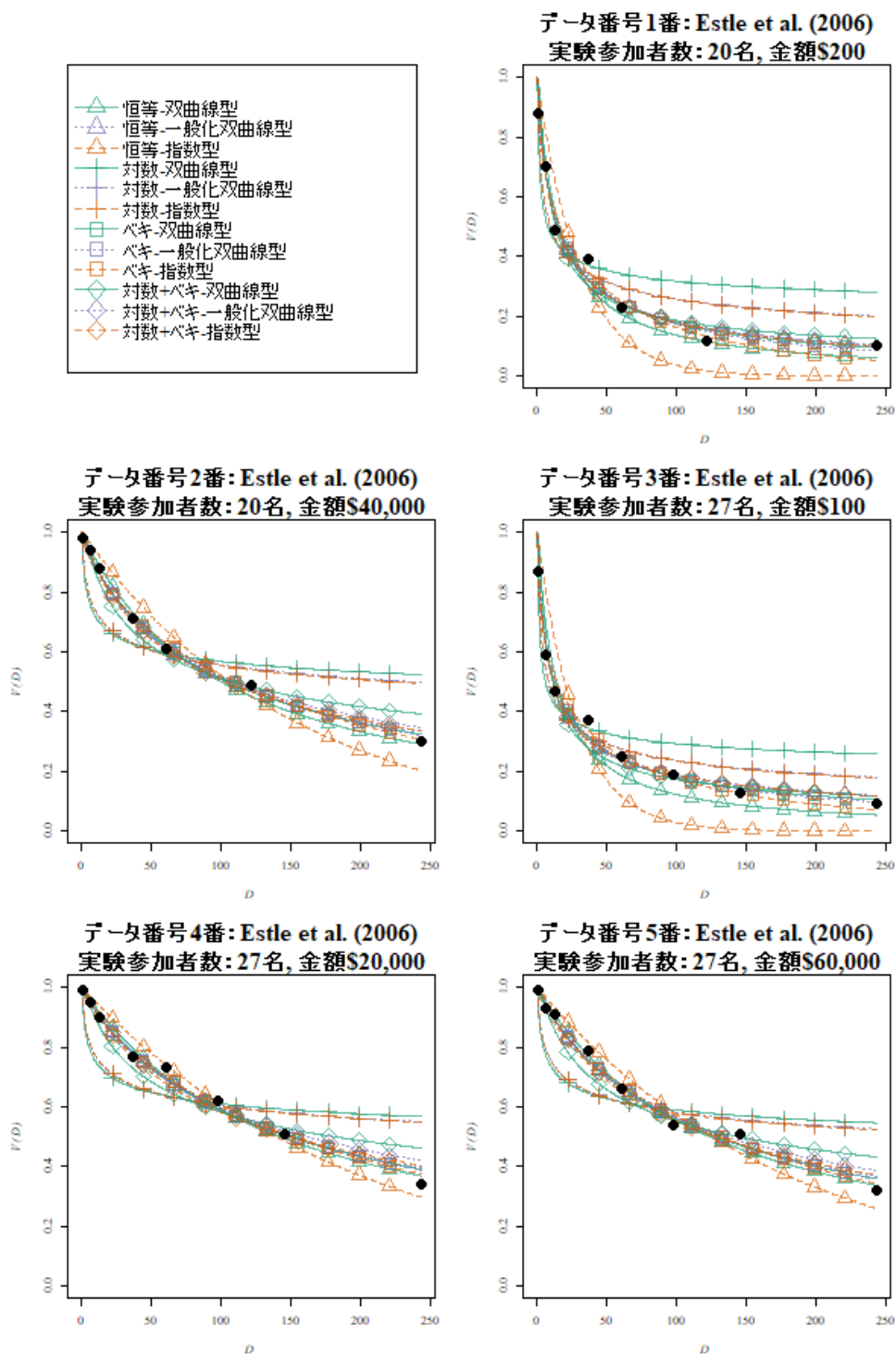


Figure C.1.6. 先行研究のデータ 1 から 5 番の主観的等価点と, 12 個のモデルのプロット (黒丸は主観的等価点を表している。なお, 遅延期間の単位は月)

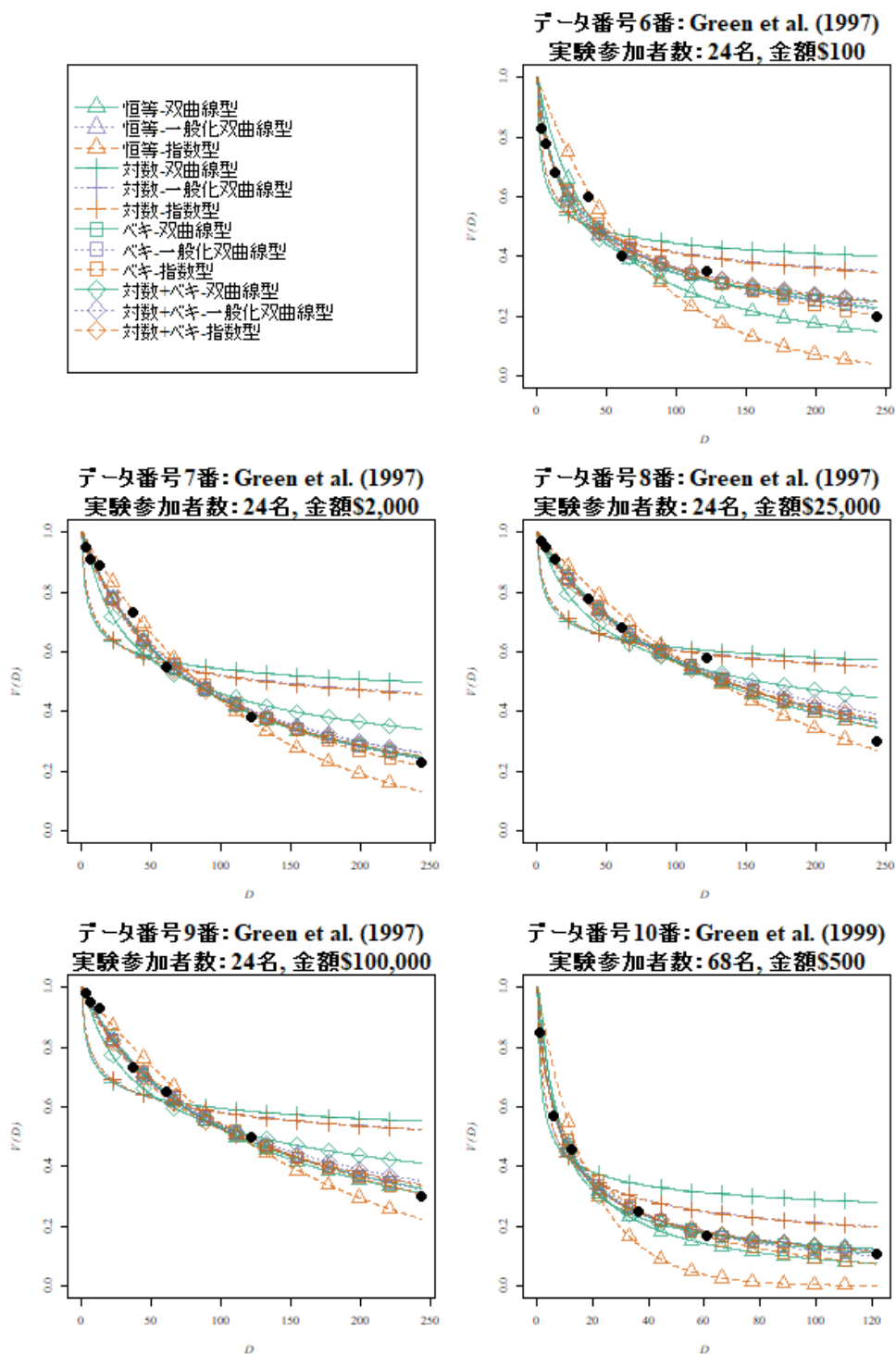


Figure C.1.7. 先行研究のデータ6から10番の主観的等価点と,12個のモデルのプロット(黒丸は主観的等価点を表している。なお, 遅延期間の単位は月)

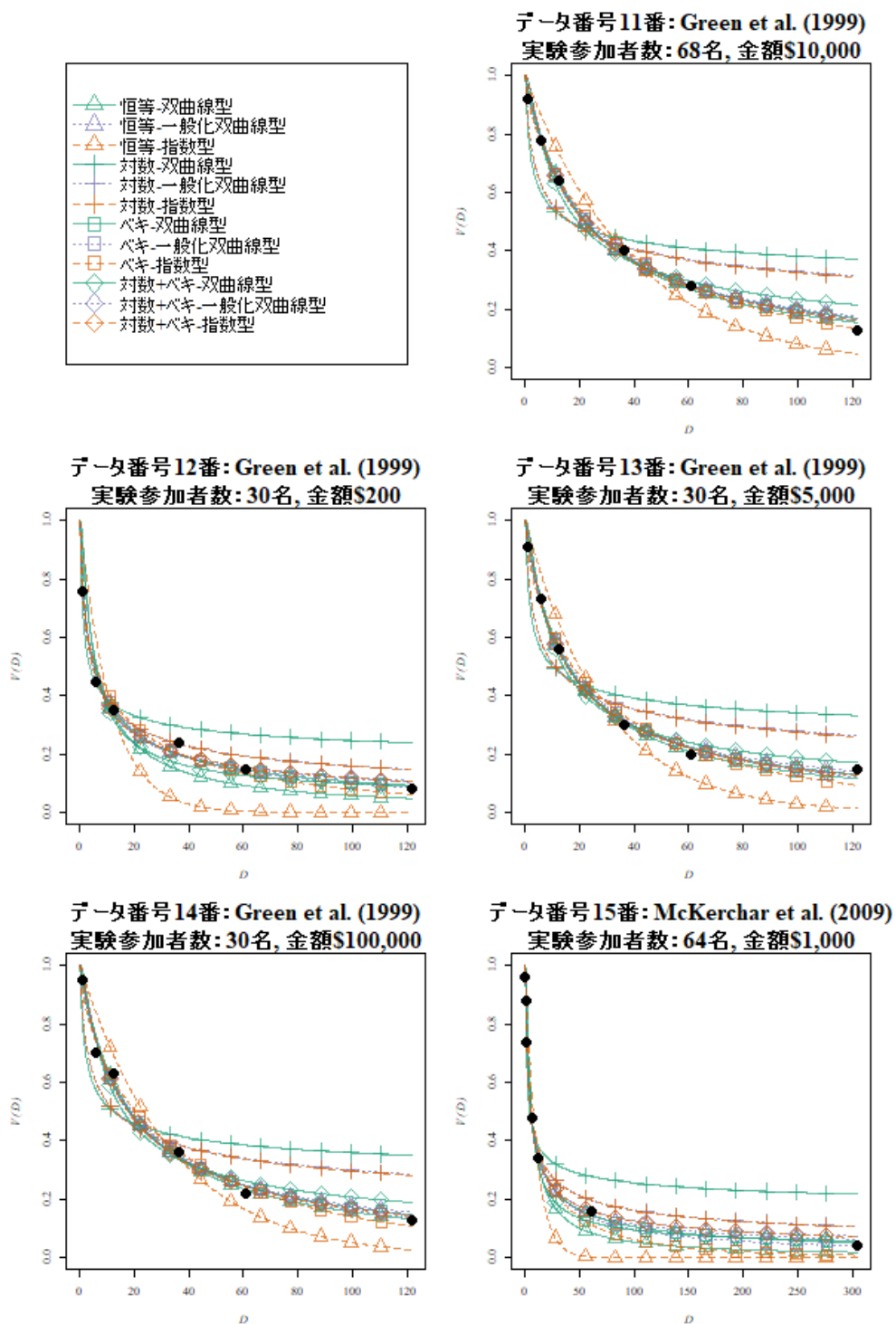


Figure C.1.8. 先行研究のデータ 11 から 15 番の主観的等価点と、12 個のモデルのプロット (黒丸は主観的等価点を表している。なお、遅延期間の単位は月)

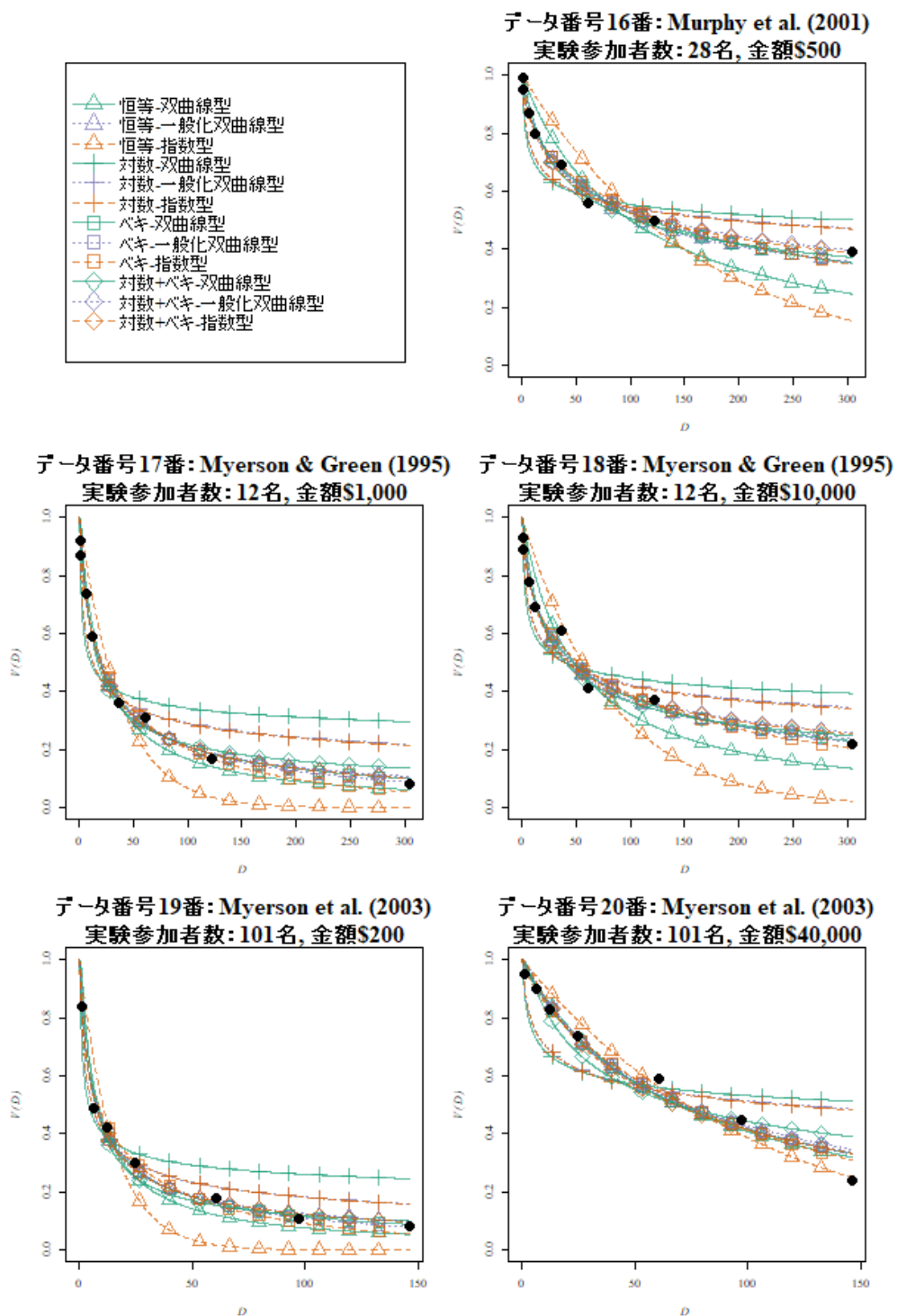
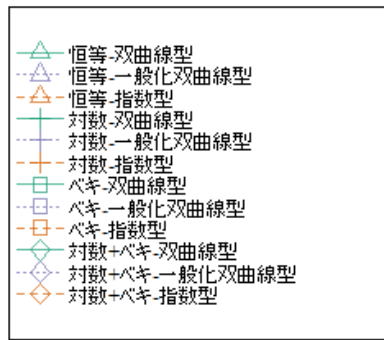
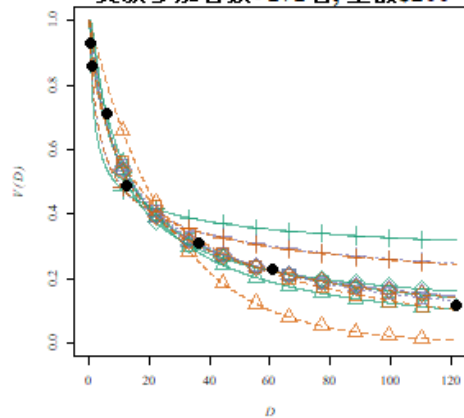


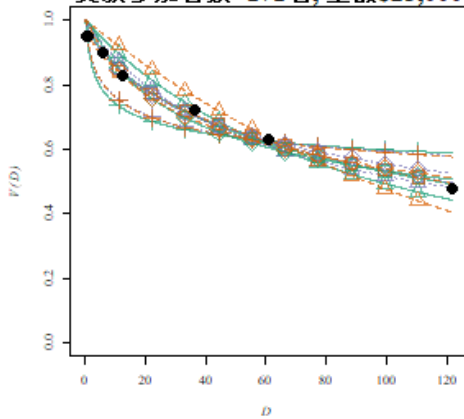
Figure C.1.9. 先行研究のデータ 16 から 20 番の主観的等価点と、12 個のモデルのプロット (黒丸は主観的等価点を表している。なお、遅延期間の単位は月)



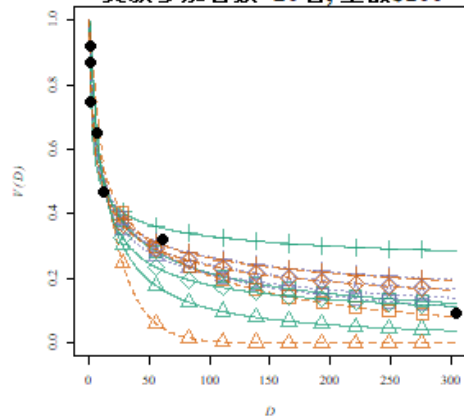
データ番号21番: Myerson et al. (2003)  
 実験参加者数: 171名, 金額\$200



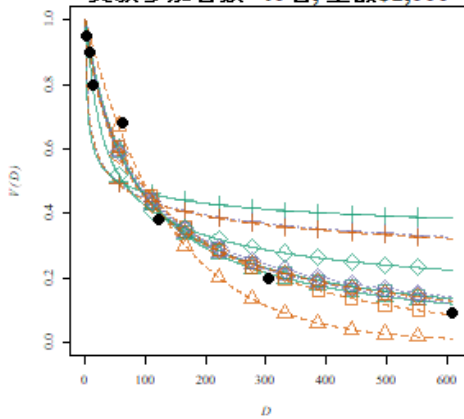
データ番号22番: Myerson et al. (2003)  
 実験参加者数: 171名, 金額\$25,000



データ番号23番: Odum & Rainaud (2003)  
 実験参加者数: 20名, 金額\$100



データ番号24番: Rachlin et al. (1991)  
 実験参加者数: 40名, 金額\$1,000



データ番号25番: Simpson & Vuchinich (2000)  
 実験参加者数: 17名, 金額\$1,000

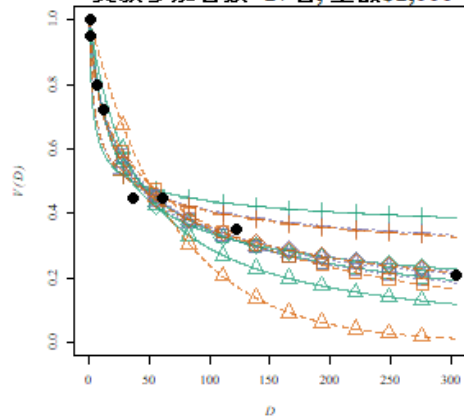


Figure C.1.10. 先行研究のデータ 21 から 25 番の主観的等価点と, 12 個のモデルのプロット (黒丸は主観的等価点を表している。なお, 遅延期間の単位は月)

C.2 先行研究の各データレベルにおける各モデルの推定値のヒストグラム

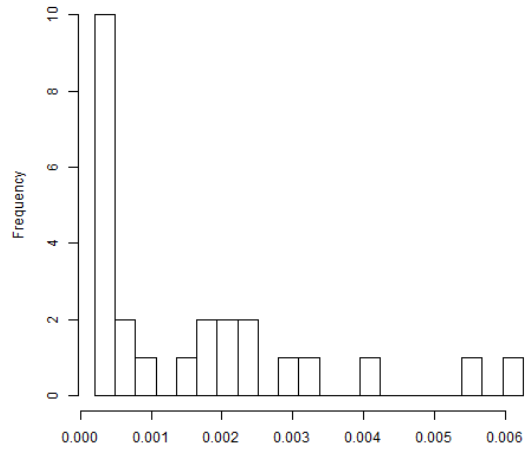
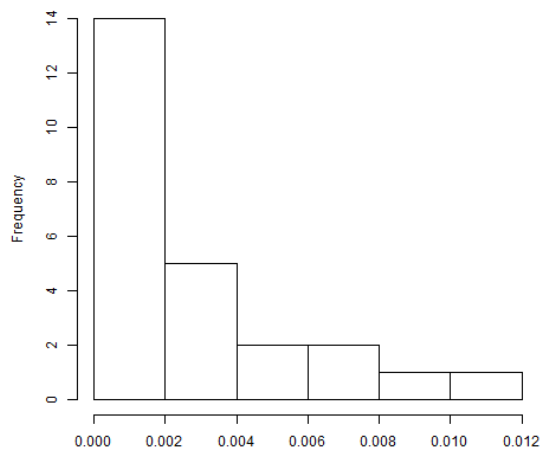


Figure C.2.1. 恒等 - 双曲線型の推定値のヒストグラム (遅延期間の単位が日の場合)

a



b

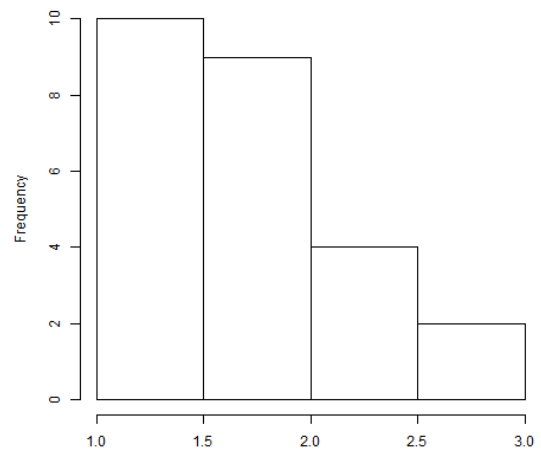


Figure C.2.2. 恒等 - 一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $b$ , 遅延期間の単位が日の場合)

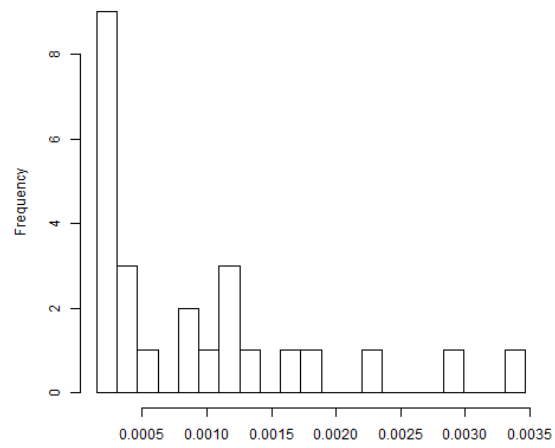


Figure C.2.3. 恒等 - 指数型の推定値のヒストグラム (遅延期間の単位が日の場合)

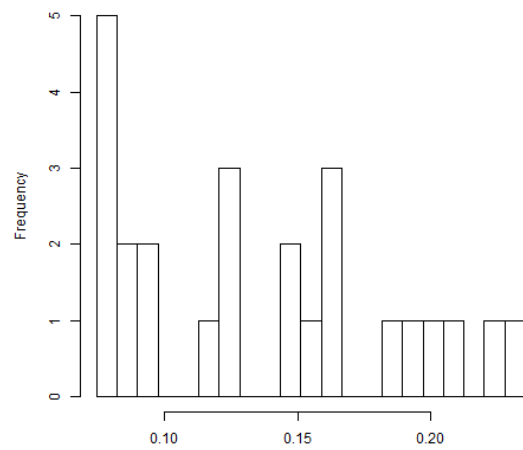
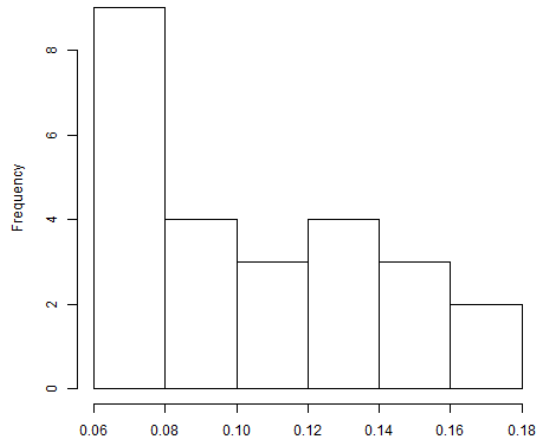


Figure C.2.4. 対数 - 双曲線型の推定値のヒストグラム (遅延期間の単位が日の場合)



a



b

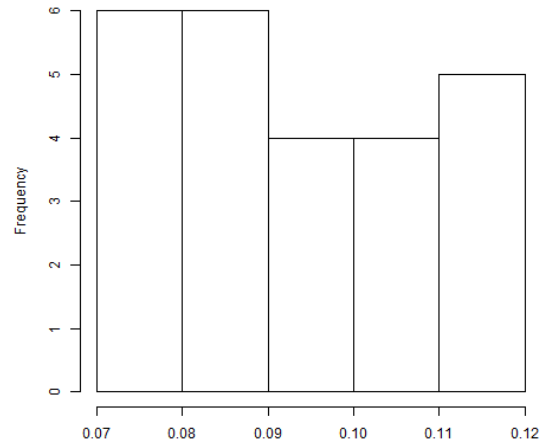


Figure C.2.5. 対数 - 一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $b$ , 遅延期間の単位が日の場合)

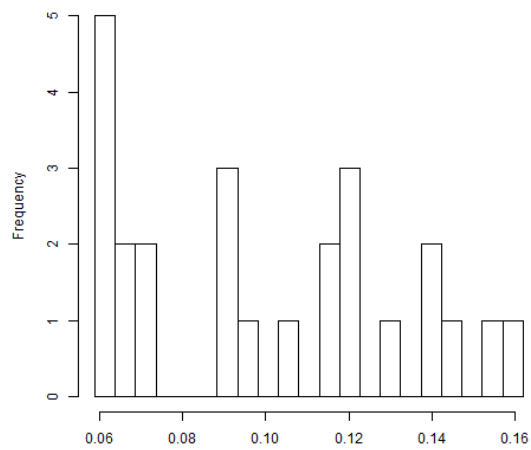
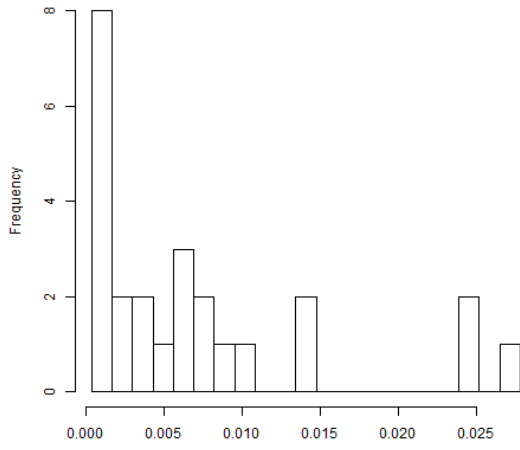


Figure C.2.6. 対数 - 指数型の推定値のヒストグラム (遅延期間の単位が日の場合)

a



b

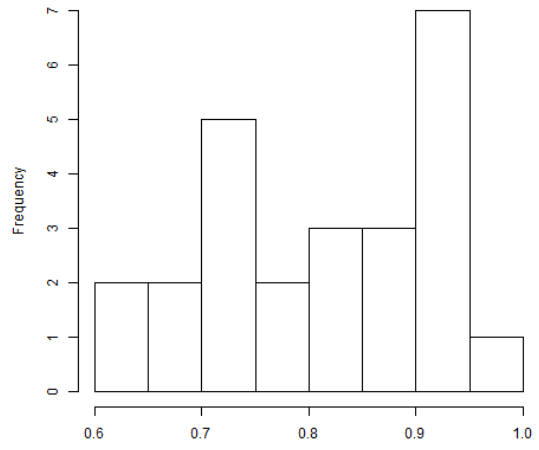
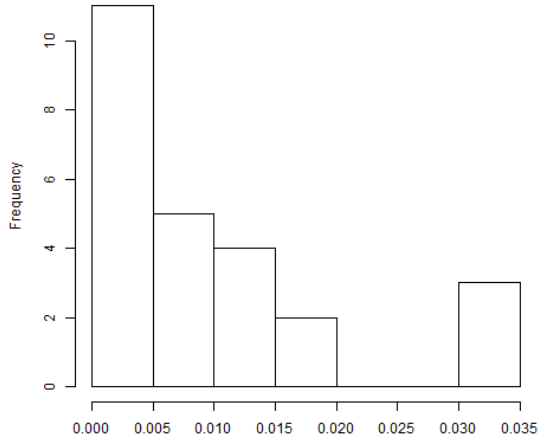
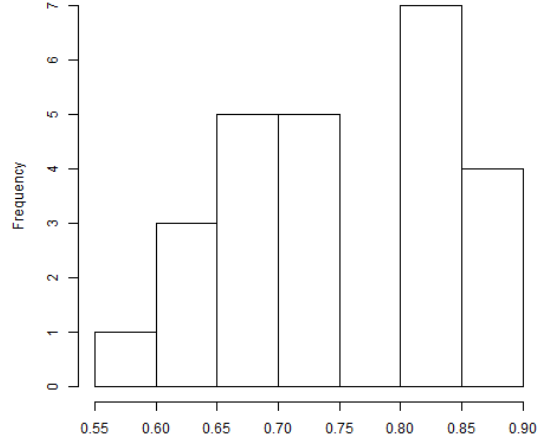


Figure C.2.7. ベキ - 双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $a$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b



c

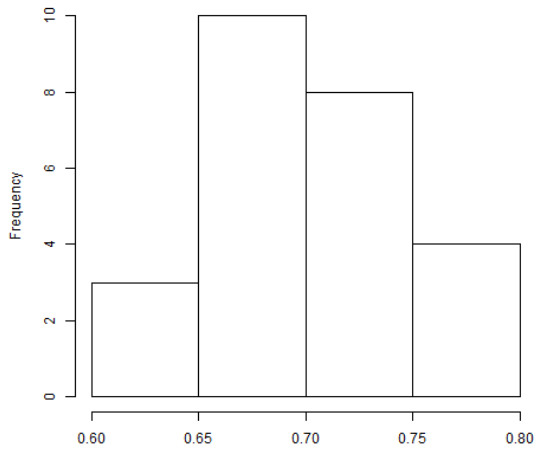
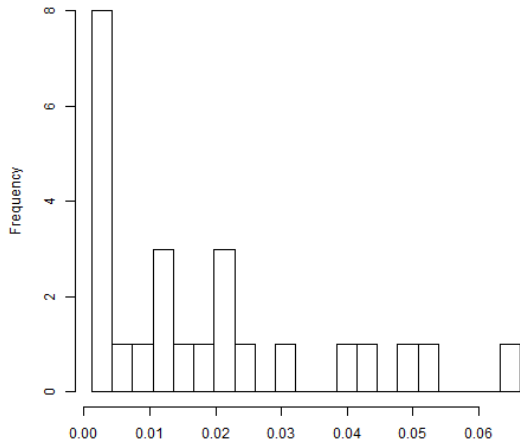


Figure C.2.8. ベキ - 一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左上 a はパラメータ  $k$ , 右上 b はパラメータ  $a$ , 左下 c はパラメータ  $b$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b

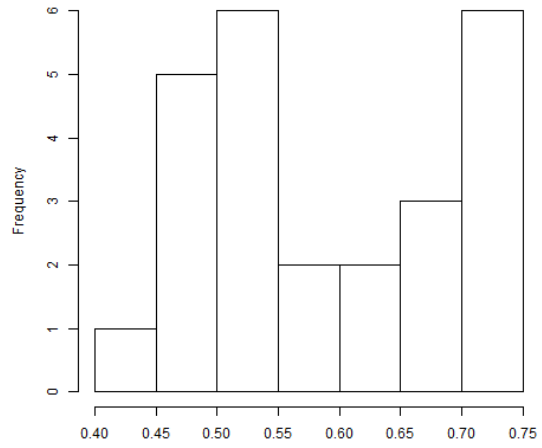
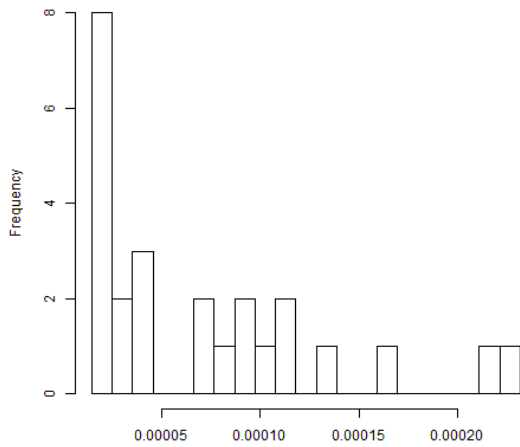


Figure C.2.9. ベキ - 指数型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $a$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b

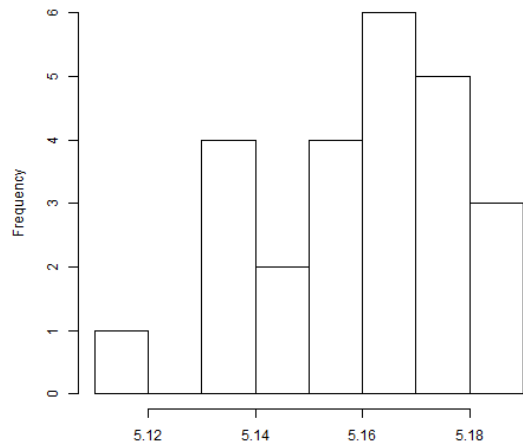
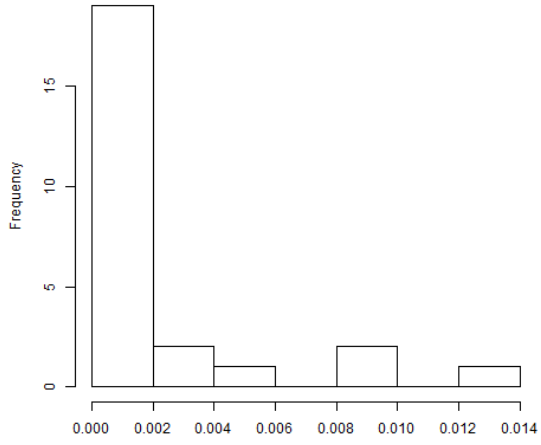
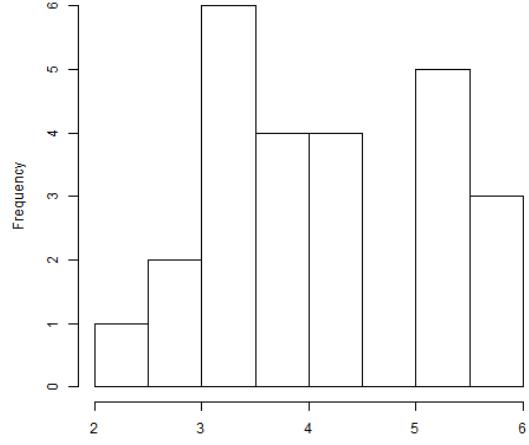


Figure C.2.10. 対数+ベキ - 双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $a$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b



c

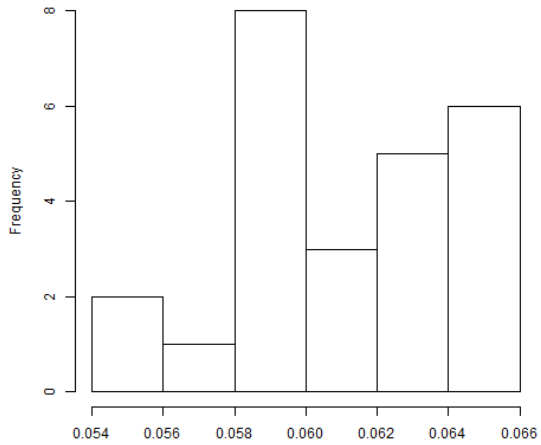
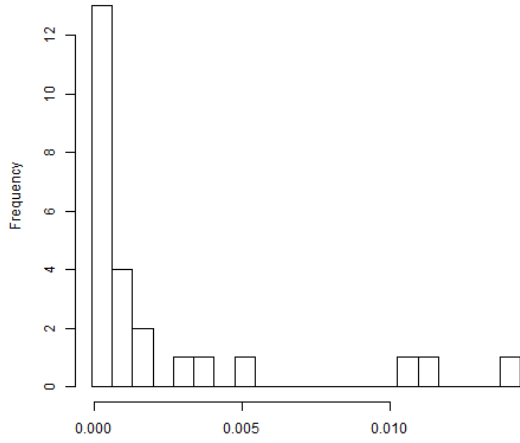


Figure C.2.11. 対数+ベキ - 一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左上 a はパラメータ  $k$ , 右上 b はパラメータ  $a$ , 左下 c はパラメータ  $b$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b

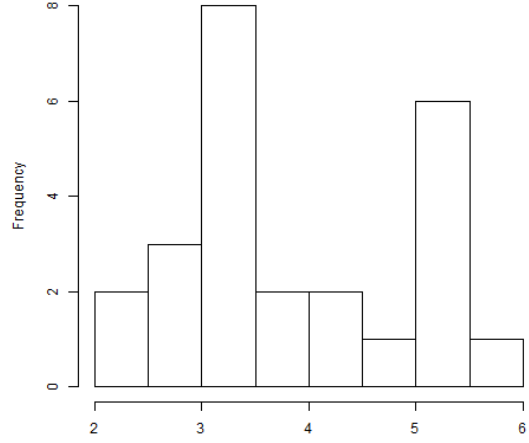


Figure C.2.12. 対数+ベキ - 指数型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $a$ , 遅延期間の単位が日の場合)

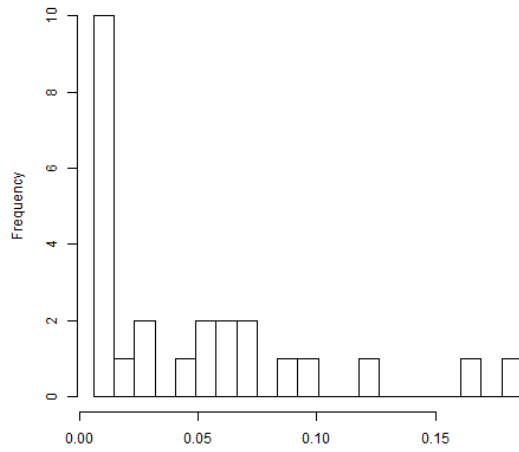
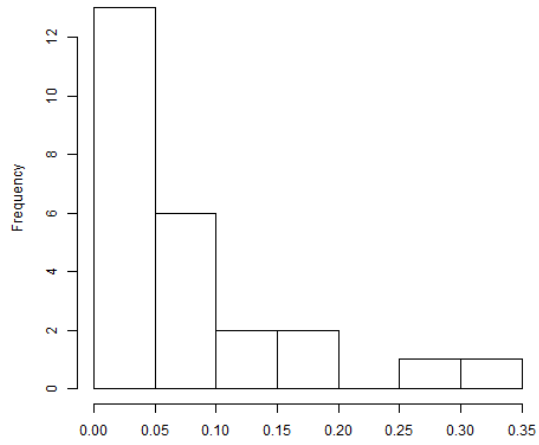


Figure C.2.13. 恒等 - 双曲線型の推定値のヒストグラム (遅延期間の単位が日の場合)

a



b

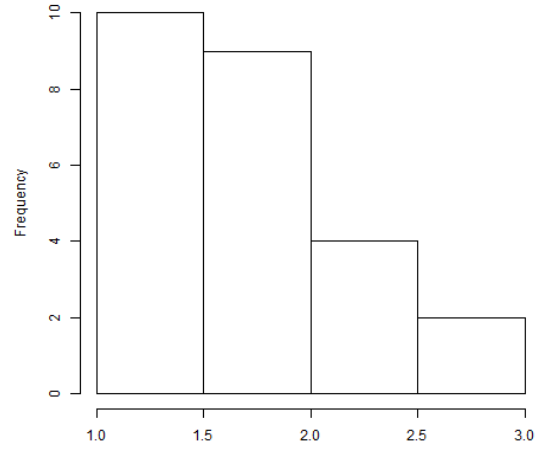


Figure C.2.14. 恒等 - 一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $b$ , 遅延期間の単位が日の場合)

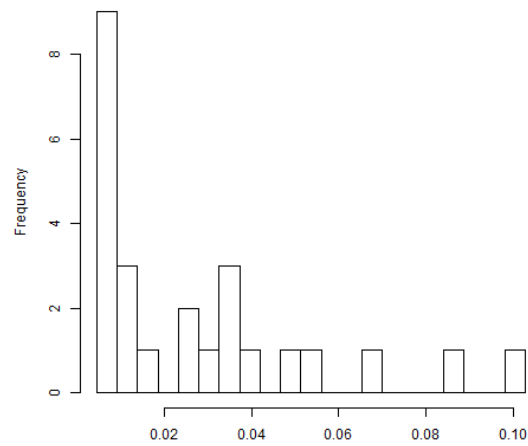


Figure C.2.15. 恒等 - 指数型の推定値のヒストグラム (遅延期間の単位が日の場合)

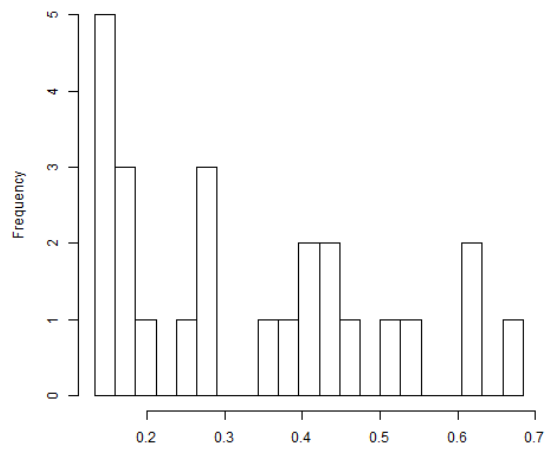
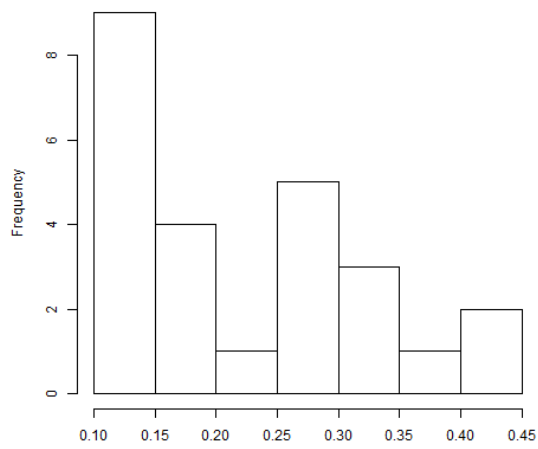


Figure C.2.16. 対数 - 双曲線型の推定値のヒストグラム (遅延期間の単位が日の場合)

a



b

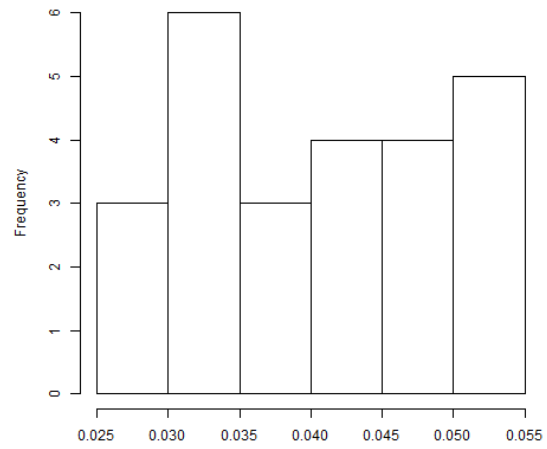


Figure C.2.17. 対数 - 一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $b$ , 遅延期間の単位が日の場合)



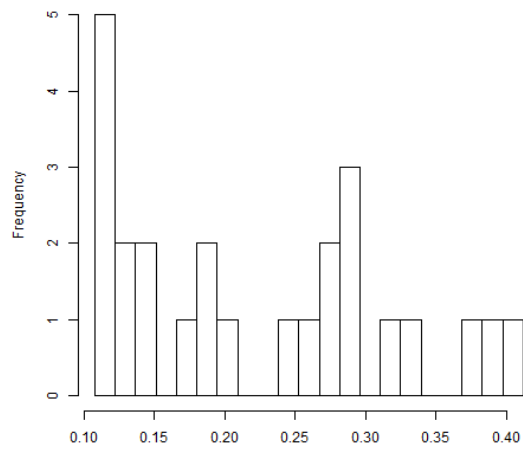
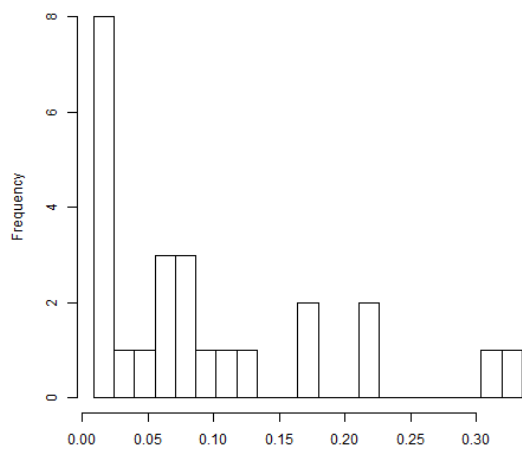


Figure C.2.18. 対数 - 指数型の推定値のヒストグラム (遅延期間の単位が日の場合)

a



b

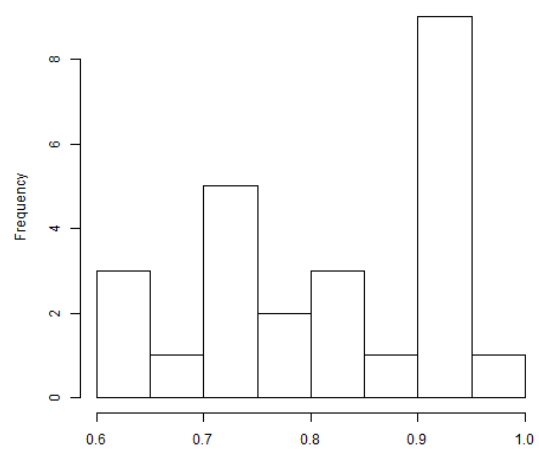
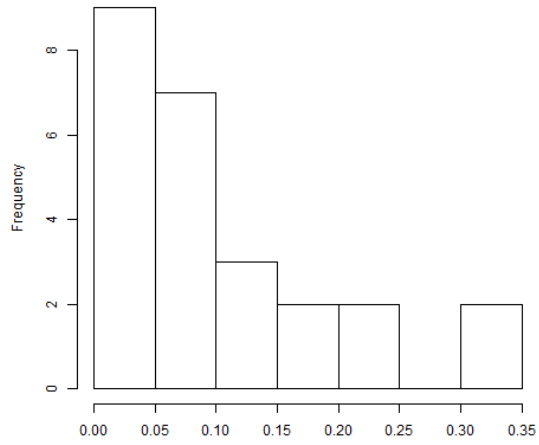
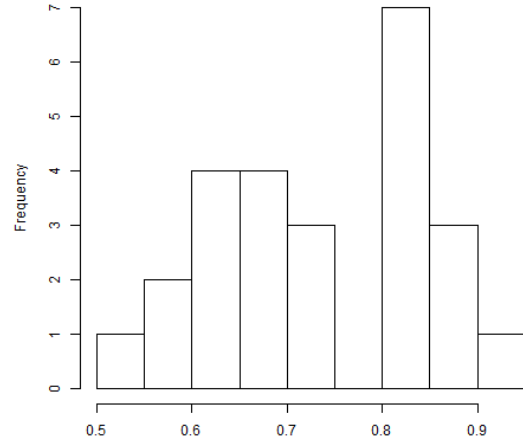


Figure C.2.19. ベキ - 双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $a$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b



c

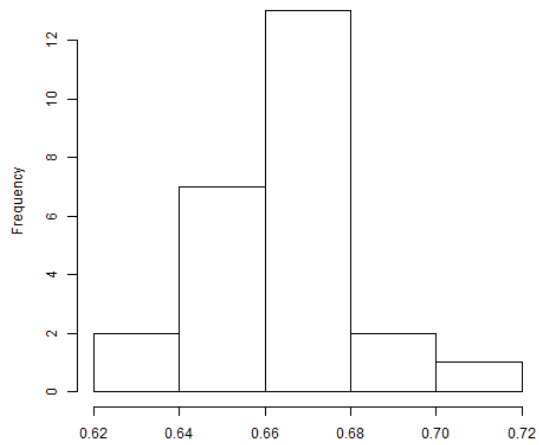
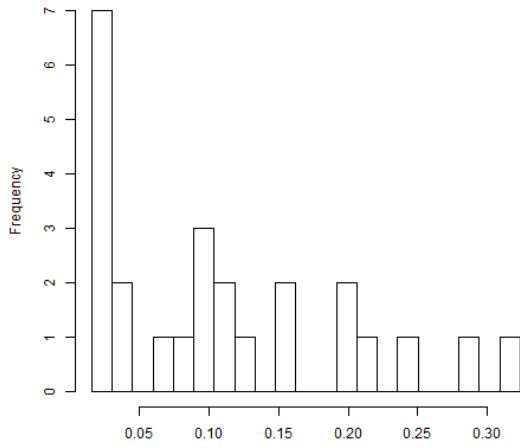


Figure C.2.20. ベキ - 一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左上 a はパラメータ  $k$ , 右上 b はパラメータ  $a$ , 左下 c はパラメータ  $b$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b

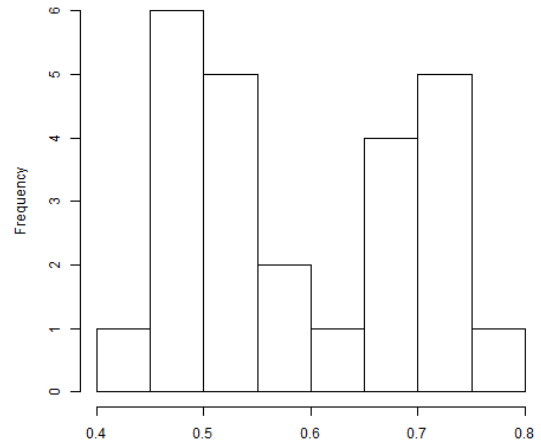
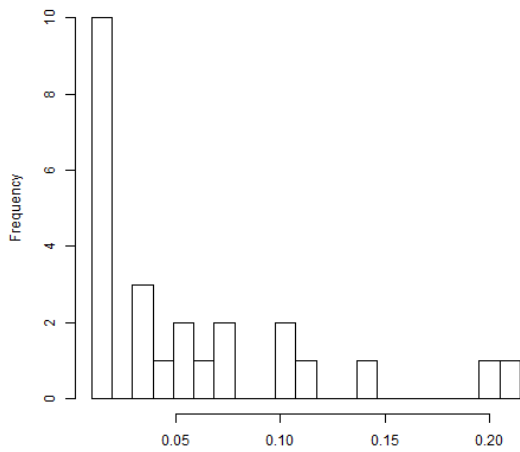


Figure C.2.21. ベキ - 指数型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $a$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b

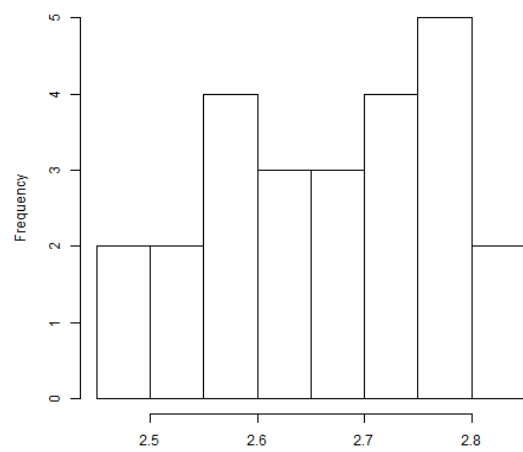
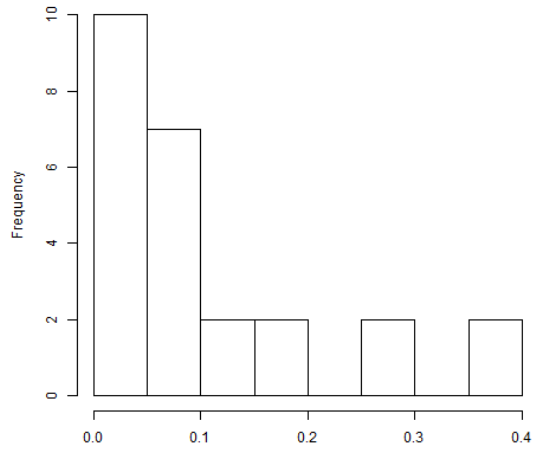
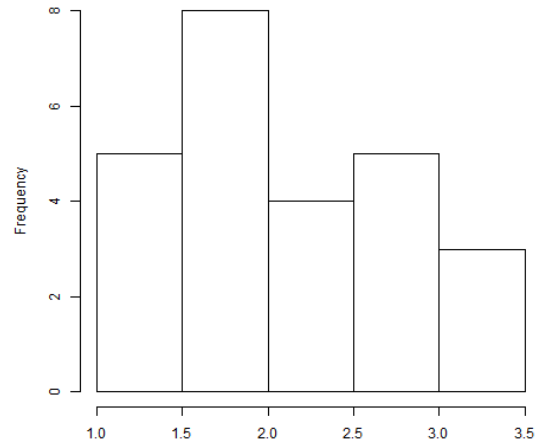


Figure C.2.22. 対数+ベキ - 双曲線型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $a$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b



c

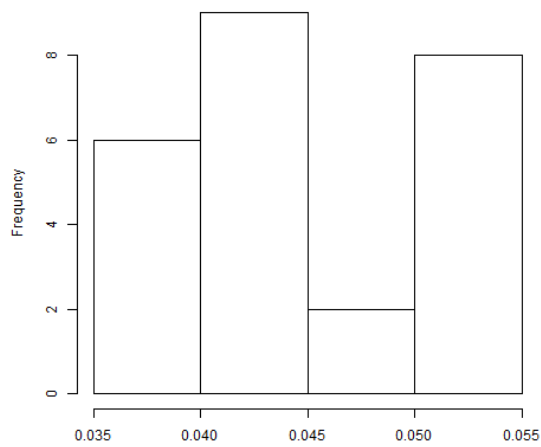
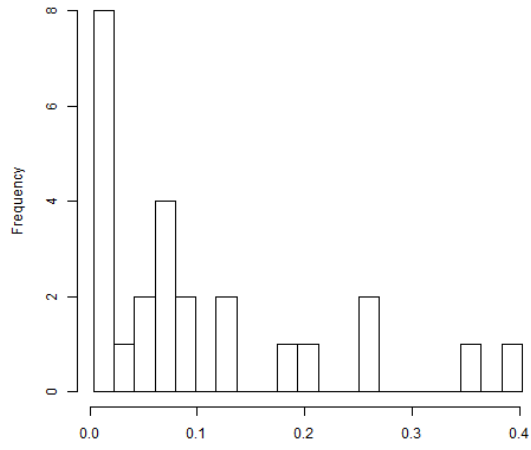


Figure C.2.23. 対数+ベキ - 一般化双曲線型の推定値のヒストグラム (左上 a はパラメータ  $k$ , 右上 b はパラメータ  $a$ , 左下 c はパラメータ  $b$ , 遅延期間の単位が日の場合)

a



b

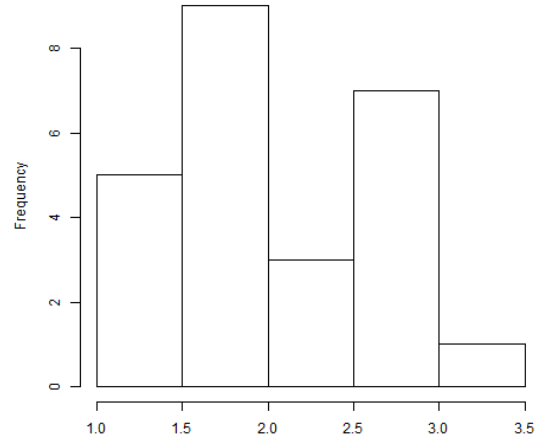


Figure C.2.24. 対数+ベキ - 指数型の推定値のヒストグラム (左 a はパラメータ  $k$ , 右 b はパラメータ  $a$ , 遅延期間の単位が日の場合)

### C.3 遅延割引関数の各モデルのグループレベルにおける推定値

数値の表記法について、たとえば 1.11E-03 は  $1.11 \times 10^{-3}$  を表している。

Table C.3.1

遅延割引関数の各モデルのグループレベルにおける推定値（遅延期間の単位：日）

モデル名	パラメータ	事後期待値	事後標準偏差	2.50%	50%	97.50%
1 恒等 - 双曲線型	$k$	1.11E-03	2.45E-04	7.02E-04	1.08E-03	1.67E-03
	$\sigma$	5.76E-02	3.33E-03	5.15E-02	5.74E-02	6.45E-02
2 恒等 - 一般化双曲線型	$k$	1.66E-03	4.82E-04	9.22E-04	1.60E-03	2.80E-03
	$b$	1.68E+00	1.43E-01	1.40E+00	1.68E+00	1.97E+00
	$\sigma$	4.00E-02	2.81E-03	3.50E-02	3.98E-02	4.60E-02
3 恒等 - 指数型	$k$	6.51E-04	1.42E-04	4.20E-04	6.35E-04	9.79E-04
	$\sigma$	1.05E-01	6.11E-03	9.41E-02	1.05E-01	1.18E-01
4 対数 - 双曲線型	$k$	1.31E-01	1.55E-02	1.03E-01	1.30E-01	1.64E-01
	$\sigma$	2.01E-01	1.17E-02	1.80E-01	2.00E-01	2.26E-01
5 対数 - 一般化双曲線型	$k$	9.84E-02	9.85E-03	8.02E-02	9.79E-02	1.19E-01
	$b$	1.13E-01	8.37E-02	1.28E-02	9.30E-02	3.29E-01
	$\sigma$	1.81E-01	1.07E-02	1.61E-01	1.80E-01	2.03E-01
6 対数 - 指数型	$k$	9.67E-02	8.82E-03	8.02E-02	9.64E-02	1.15E-01
	$\sigma$	1.78E-01	1.04E-02	1.59E-01	1.77E-01	2.00E-01
7 ベキ - 双曲線型	$k$	4.26E-03	1.25E-03	2.28E-03	4.10E-03	7.17E-03
	$a$	8.06E-01	2.86E-02	7.52E-01	8.06E-01	8.65E-01
	$\sigma$	3.50E-02	2.49E-03	3.06E-02	3.48E-02	4.03E-02
8 ベキ - 一般化双曲線型	$k$	5.77E-03	1.95E-03	2.80E-03	5.49E-03	1.04E-02
	$a$	7.45E-01	4.29E-02	6.65E-01	7.44E-01	8.33E-01
	$b$	7.13E-01	1.49E-01	4.44E-01	7.05E-01	1.03E+00
	$\sigma$	3.32E-02	2.43E-03	2.89E-02	3.30E-02	3.84E-02
9 ベキ - 指数型	$k$	1.22E-02	3.18E-03	7.02E-03	1.18E-02	1.95E-02
	$a$	5.84E-01	2.53E-02	5.36E-01	5.83E-01	6.35E-01
	$\sigma$	3.52E-02	2.44E-03	3.09E-02	3.51E-02	4.05E-02
10 対数 + ベキ - 双曲線型	$k$	5.76E-05	2.27E-05	2.47E-05	5.38E-05	1.12E-04
	$a$	5.16E+00	1.75E-01	4.82E+00	5.16E+00	5.51E+00
	$\sigma$	5.91E-02	3.48E-03	5.27E-02	5.89E-02	6.63E-02
11 対数 + ベキ - 一般化双曲線型	$k$	4.13E-04	2.43E-04	1.20E-04	3.58E-04	1.03E-03
	$a$	4.00E+00	2.57E-01	3.51E+00	3.99E+00	4.53E+00
	$b$	7.67E-02	6.55E-02	6.03E-03	6.13E-02	2.28E-01
	$\sigma$	3.64E-02	2.88E-03	3.17E-02	3.61E-02	4.22E-02
12 対数 + ベキ - 指数型	$k$	5.12E-04	2.74E-04	1.64E-04	4.55E-04	1.20E-03
	$a$	3.88E+00	2.39E-01	3.43E+00	3.88E+00	4.38E+00
	$\sigma$	3.55E-02	2.43E-03	3.12E-02	3.54E-02	4.07E-02

Table C.3.2

遅延割引関数の各モデルのグループレベルにおける推定値（遅延期間の単位：月）

モデル名	パラメータ	事後期待値	事後標準偏差	2.50%	50%	97.50%
1 恒等 - 双曲線型	$k$	3.38E-02	7.38E-03	2.16E-02	3.30E-02	5.06E-02
	$\sigma$	5.76E-02	3.34E-03	5.14E-02	5.74E-02	6.46E-02
2 恒等 - 一般化双曲線型	$k$	5.14E-02	1.40E-02	2.91E-02	4.96E-02	8.40E-02
	$b$	1.68E+00	1.42E-01	1.41E+00	1.68E+00	1.97E+00
	$\sigma$	4.01E-02	2.81E-03	3.51E-02	4.00E-02	4.61E-02
3 恒等 - 指数型	$k$	1.98E-02	4.22E-03	1.27E-02	1.93E-02	2.93E-02
	$\sigma$	1.05E-01	6.11E-03	9.41E-02	1.05E-01	1.18E-01
4 対数 - 双曲線型	$k$	3.05E-01	4.00E-02	2.34E-01	3.03E-01	3.91E-01
	$\sigma$	1.38E-01	8.04E-03	1.24E-01	1.38E-01	1.55E-01
5 対数 - 一般化双曲線型	$k$	2.09E-01	2.25E-02	1.68E-01	2.08E-01	2.57E-01
	$b$	4.87E-02	3.53E-02	5.55E-03	4.06E-02	1.39E-01
	$\sigma$	1.10E-01	6.46E-03	9.84E-02	1.10E-01	1.24E-01
6 対数 - 指数型	$k$	2.10E-01	2.13E-02	1.71E-01	2.09E-01	2.55E-01
	$\sigma$	1.09E-01	6.30E-03	9.71E-02	1.08E-01	1.22E-01
7 ベキ - 双曲線型	$k$	6.34E-02	1.48E-02	3.87E-02	6.19E-02	9.68E-02
	$a$	8.10E-01	3.12E-02	7.50E-01	8.09E-01	8.74E-01
	$\sigma$	3.42E-02	2.27E-03	3.01E-02	3.41E-02	3.91E-02
8 ベキ - 一般化双曲線型	$k$	6.96E-02	1.64E-02	4.24E-02	6.79E-02	1.07E-01
	$a$	7.36E-01	4.25E-02	6.56E-01	7.34E-01	8.23E-01
	$b$	6.71E-01	1.38E-01	4.19E-01	6.65E-01	9.58E-01
	$\sigma$	3.26E-02	2.20E-03	2.87E-02	3.25E-02	3.73E-02
9 ベキ - 指数型	$k$	8.50E-02	1.67E-02	5.63E-02	8.36E-02	1.22E-01
	$a$	5.85E-01	2.64E-02	5.35E-01	5.85E-01	6.40E-01
	$\sigma$	3.48E-02	2.32E-03	3.06E-02	3.47E-02	3.97E-02
10 対数 + ベキ - 双曲線型	$k$	4.39E-02	1.12E-02	2.53E-02	4.27E-02	6.93E-02
	$a$	2.67E+00	1.29E-01	2.42E+00	2.66E+00	2.92E+00
	$\sigma$	6.48E-02	5.47E-03	5.38E-02	6.51E-02	7.51E-02
11 対数 + ベキ - 一般化双曲線型	$k$	5.47E-02	1.71E-02	2.83E-02	5.24E-02	9.45E-02
	$a$	2.04E+00	1.57E-01	1.75E+00	2.03E+00	2.36E+00
	$b$	5.59E-02	4.45E-02	4.72E-03	4.46E-02	1.72E-01
	$\sigma$	4.30E-02	2.99E-03	3.76E-02	4.28E-02	4.93E-02
12 対数 + ベキ - 指数型	$k$	5.95E-02	1.69E-02	3.25E-02	5.76E-02	9.86E-02
	$a$	2.00E+00	1.51E-01	1.72E+00	1.99E+00	2.31E+00
	$\sigma$	4.21E-02	2.85E-03	3.71E-02	4.20E-02	4.82E-02