第２章　Diamond モデルにおける裁定条件と逆 Mundell-Tobin 効果*

２.１．はじめに

本章では、Diamond 型の世代重複モデルにおいて資産の保有にかかわる裁定条件について考察し、その裁定条件を修正することでインフレ率の上昇が資本蓄積に負の影響を与える可能性について検討する。

Diamond(1965)、Tirole(1985)を基にした標準的な Diamond 型の世代重複モデルは、本来的に価値のない貨幣を比較的自然に発生させることから、貨幣経済を分析するための道具として盛んに用いられてきた。しかし、多くの貨幣的成長モデルと同様、貨幣が正の価値を持つ定常状態において名目貨幣増加率を恒常的に上昇させると、長期的に資本水準あるいは経済活動の水準が上昇する。これは貨幣の超中立性が成り立たず、モデル上、長期的に名目貨幣増加率とインフレ率の間に１対１の関係が存在することから、インフレ率と資本水準あるいは経済活動の水準に正の相関関係があるとする Mundell-Tobin 効果が働くことを意味する。第１章で述べた通り、逆 Mundell-Tobin 効果が生じるインフレ水準について実証的に一致した見方が存在するわけではないが、少なくとも一連の実証研究の成果から世代重複モデルが貨幣的成長モデルとして有用な道具であるためには、逆 Mundell-Tobin 効果が存在する可能性をモデルに持たせる必要がある。そこで本章では、逆 Mundell-Tobin 効果が働く可能性の有無に集中して検討を行う。

標準的な Diamond 型の世代重複モデルにおいて必ず Mundell-Tobin 効果が働くメカニズムに決定的な役割を果たしているのが、資産の保有にかかわる裁定条件である。個人のポートフォリオ上、貨幣と資本は粗代替関係にあり、インフレ率が上昇すると貨幣の収益率が低下し資本の相対的収益率が上昇するため、資本への投資が拡大し Mundell-Tobin 効果が働く。そこでは資本の収穫逓減性が前提となっており、資本水準が上昇すれば資本の絶対的収益率が低下して貨幣と資本の収益率が等しくなり、裁定条件が再び維持される。逆 Mundell-Tobin 効果を発生させるためには、この裁定条件に修正を加える必要がある。本章ではこれまでになかった視点として、裁定条件を基準に逆 Mundell-Tobin 効果が発生する可能性について検討する。

インフレ率が上昇すると貨幣の収益率が低下するため裁定条件により資本の

*本章は久米(2003)に基づく。

収益率も低下しなければならず、逆 Mundell-Tobin 効果が働くためにはそのとき、資本水準が低下しなければならない。つまり、資本の収穫非逓減性を前提とする必要がある。本章では、資本水準の上昇に伴い外部効果が生じると仮定することで裁定条件に修正を加え検討を行っていく。外部効果を考慮した先行研究として Ferreira(1999)が挙げられ、そこでは貨幣発行益による政府支出が労働生産性を上昇させるとする外部効果を導入し分析を行っている。しかし、逆 Mundell-Tobin 効果が生じることは十分に示されていない。本章でのモデル化では、逆 Mundell-Tobin 効果が生じることを示すことが可能となる。

一方、資本に関する収穫逓減性を前提とした場合であっても、裁定条件を非束縛的にすることで逆 Mundell-Tobin 効果が生じることを示すことが可能となる。裁定条件に代わり資産配分を決定付ける別の条件を導入し、その条件によりインフレ率の上昇が資本蓄積に負の影響を与えるならば逆 Mundell-Tobin 効果が生じる。

本章ではまた、貨幣が正の価値を持つ定常状態の近傍における動学についても検討を行う。標準的な Diamond 型の世代重複モデルにおいてその定常状態の近傍における動学は、振動することなくその定常状態に収束する決定的で単調な鞍点経路である。インフレ率の上昇は、撹乱を起こすことなく経済活動の水準を上昇させることができる。しかし、インフレ率の上昇に対する効果が反転すれば動学経路も変わり、非決定的ないし振動経路が発生する可能性がある。

本章では次のような構成に従って検討を行っていく。第２.２節では貨幣が含まれる形での標準的な Diamond 型の世代重複モデルにおいて、資産の保有にかかわる裁定条件に注目し、Mundell-Tobin 効果が働くメカニズムについてあらためて検討する。第２.３節では第２.２節でのモデルに資本に関する収穫非逓減性を考慮し、逆 Mundell-Tobin 効果が発生する可能性について検討する。第２.４節では貨幣に何らかの役割を与える[1]ことで逆 Mundell-Tobin 効果が発生するケースについて考察し、第２.２、２.３節のモデルと比較検討を行う。この種のモデル化において逆 Mundell-Tobin 効果が生じることは容易に予想できるが、そこでは資産の保有にかかわる裁定条件が非束縛的となり、逆 Mundell-Tobin 効果が生じるメカニズムが第２.３節の場合と大きく異なる。第２.５節では本章のまとめを行う。本論文ではインフレと資本蓄積について検討を行うが、関連した問題として厚生的観点からの分析がある。厚生分析は補論で行うこととし、インフレ率の変動による個人の効用水準への政策効果について考察する[2]。

---

[1]貨幣に何らかの有用な役割を与えると本論文で定義した貨幣が本来価値のないものであるとする見方に反することになるが、ここではこの点に関して深く追求しないことにする。
[2]効用水準を最大化させることが目的であるならば、インフレ率の変動が資本蓄積に与える影響

２.２． Diamond 型世代重複モデル(標準型)

２.２.１． モデル

本章では、Diamond(1965)、Tirole(1985)、Azariadis(1993)を基に貨幣が含まれる形での Diamond 型の世代重複モデルを用いる。それを本論文での標準モデルとし、本節ではその設定を行い、以下で検討していくモデルのベースとする。

時間は離散的で、個人は２期間(若年期、老年期)生存する世代重複経済を想定する。人口成長はなく第 t 世代(t=0,1,2,⋯)は第 t 期の個人(第 t 期に生まれた個人、ただし第 0 世代は第 1 期に存在する老人)からなり、大きさを 1 に正規化した連続体(continuum)であるとする。経済は t=1 期から始まり永遠に続くものとする[3]。

個人はすべて同質的であり、若年期に 1 単位の労働が与えられ労働による不効用はなく非弾力的にそれを供給し、老年期には労働が与えられないとする。以下でみていくように、個人は老年期の消費のために貯蓄を行う必要がある。個人は合理的期待を持っており、経済が将来どのように変動するかを完全に知っていると仮定する。すなわち、個人は完全予見のもと合理的に行動するものとする。企業は完全競争のもと個人とは別に外生的に与えられたものとし、市場へ自由に参入できるとする[4]。

生産

１種類の消費財が存在すると想定する。企業は規模に関し収穫一定(CRS)の生産技術にアクセスすることができ、労働と資本を用い消費財を生産すると仮定する。消費財は貯蔵不可能であるとする。第 t 期の経済全体での労働供給を L_t=1、資本を K_t、生産量を Y_t、生産関数(一次同次)を F とすると、

$$Y_t = F(L_t, K_t)$$

となる。簡単化のため、資本は 1 度生産のために用いられると完全に減耗すると仮定する[5]。K_1 は第 1 期の老人に与えられているとする。資本・労働比率を k

---

についての分析は別問題となる(Orphanides and Solow(1990)参照)。そのため、本論文を通して厚生分析は本文中で行わず補論で行っている。

[3]本論文を通して以下では言及のない限り t>0 とする。

[4]個人は若年期に労働者で老年期に生産者になると想定することも可能であり、そのような想定を置いても以下の分析結果に影響はない。

[5]２期間世代重複モデルでは１期間が 20-30 年に相当するため、この仮定は現実性に欠けるものではないと考えられる。

とし、若者(労働者) 1 人当たりの形で表した生産関数 f を、

$$f(k_t) \equiv F(L_t, K_t)/L_t = F(1, k_t)$$

と定義する。生産関数 f は次の仮定を満たすものとする[6]。

(仮定 1)

$$f(k) > 0,\ f'(k) > 0,\ f''(k) < 0, \quad \text{for} \ \forall k>0$$

(仮定 2)

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) < 1$$

個人は消費財を資本へ変換する技術にアクセスすることができるとする[7]。その技術に投資された 1 単位の消費財は次期に 1 単位の資本へ変換されるとする。

企業は競争的に行動し、労働の限界生産物が賃金に等しくなるまで労働者を雇用し、資本の限界生産物がレンタル率に等しくなるまで資本を投入するため、

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = w(k_t) \qquad (2\text{-}1)$$

$$R_t^{\,d} = f'(k_t) \qquad (2\text{-}2)$$

となる。w_t は第 t 期の賃金率、R_t^d は第 t 期の資本のレンタル率で資本への投資による粗収益率(粗利子率)を表す。いずれも消費財の単位数で測った実質値である。また、(仮定 1)より、

$$w'(k) = -kf''(k) > 0, \ \text{for} \ \forall k>0$$

である。

政府

政府(中央銀行)は貨幣を独占的に発行し、第 t 期の若者 1 人当たりの名目貨幣残高を M_t(各世代の大きさが 1 であるので経済全体の値でもある)とする。経済全体での名目貨幣残高の増加率を μ で一定であるとすると M_t は、

---

[6](仮定 2)に関して、Inada 条件

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \ \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$$

を置くことも可能であるが、Inada 条件の前半の条件は以下の議論において特に必要なものでなく、また、後半の条件に関して、本章では Cobb-Douglas 生産関数に加え代替弾力性が 1 より大きい CES 生産関数も念頭においているため、このような仮定を置いている。

[7]資本の生産技術が一般的に利用可能であり、企業は個人から消費財を借受け資本を生産する、あるいは、完全競争のもと外生的に存在する投資会社が個人から消費財を借受け資本に変換し企業に貸出すと想定することも可能である。

$M_t = (1+\mu)M_{t-1}$, with $\mu > 0$ (2-3)

に従い変動する。本章ではインフレの状況を想定するため、$\mu \leq 0$ となるケースは想定しない。$M_0(>0)$は第 1 期の老人に与えられているとする。

政府は第 t 期に若者 1 人当たり g_t の実質消費を行い、その消費は貨幣発行益により賄われるとする。すなわち、

$g_t = (M_t - M_{t-1})/p_t$ (2-4)

である。p_tは第 t期の貨幣の単位数で測った消費財の価格を表す。Ferreira(1999)では貨幣発行益による政府支出が労働生産性を上昇させると仮定しているが、本章では政府支出は経済に何も影響を与えないと仮定する。(2-4)式に(2-3)式を代入し整理すると、

$g_t = [\mu/(1+\mu)](M_t/p_t)$ (2-5)

となる。

個人

個人は貯蓄を資本への投資あるいは貨幣の保有で行い、s_t、d_t、m_t をそれぞれ消費財の単位数で測った実質での第 t 期の若者 1 人当たりの貯蓄、投資額、貨幣需要とすると、

$s_t = d_t + m_t$ (2-6)

となる。

ここで、資本が保有され存在することを保証するため次の仮定を設ける。

(仮定 3)

$R_{t+1}^d \geq R_{t+1}^m$

R_{t+1}^m は第 t 期から第$(t+1)$期にかけての貨幣の実質粗収益率である。(仮定 3)は資本への投資が収益率で貨幣に劣らないことを表し、もしこの仮定が満たされなければ資本への投資が行われず生産が行われることはない。

個人は老年期のみ消費を行い第 t 期の個人の効用は老年期の消費(c_{t+1}^2)で表されるとする[8]。すなわち、

---

[8]老年期のみ消費を行うとする想定は、異時点間の消費配分の考慮を除外し貯蓄があらゆる資産の収益率から独立に決定されるものとして、モデル分析を簡単にするためのものである。また、ここでは効用関数の曲率は問題とならない。

効用が 2 期間(若年期,老年期)の消費(c_t^1, c_{t+1}^2)に依存し効用関数が、

$u(c_t^1, c_{t+1}^2) = (1-\beta)\ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2$, with $\beta \in (0,1)$

のように対数型に特定化する場合であれば、貯蓄はその水準が低下することを除き同様にあらゆる資産の収益率から独立に決定されるため、本章の以下の分析結果に影響を与えることはない。

より一般的には、

$u(c_{t+1}^2)=c_{t+1}^2$ (2-7)

である。ただし、第 0 期の個人(第 1 期の老人)は M_0 の貨幣と K_1 の資本およびそれらの収益から消費を行うとする。

第 t 期(t>0)の個人は第 t 期(若年期)に供給した労働に対し所得(賃金)$w(k_t)$を受け取り、それをすべて貯蓄にまわす。すなわち、(2-6)式を考慮すると、

$s_t=w(k_t)=d_t+m_t$ (2-8)

である[9]。第(t+1)期(老年期)の消費 c_{t+1}^2 は s_t とそれから得られる収益により賄われ、遺産は残さないものとする。老年期の消費についての予算制約式は(2-8)式に注意すると、

$$c_{t+1}^{\ 2} \leq R_{t+1}^{\ d} d_t + R_{t+1}^{\ m} m_t \tag{2-9}$$

となる。非負制約として、

$d_t \geq 0,\quad m_t \geq 0$ (2-10)

が課せられる。第 t 期の個人は $w(k_t)$、R_{t+1}^d、R_{t+1}^m を所与として、(2-8)、(2-9)、(2-10)式のもと(2-7)式を最大化する。

最大化のための１次条件は $m_t \geq 0$ であることに注意して、

$$\left(R_{t+1}^{\ d} - R_{t+1}^{\ m}\right) m_t = 0,\quad R_{t+1}^{\ d} \geq R_{t+1}^{\ m} \tag{2-11}$$

となる。実質貨幣需要が正(m_t>0)であるためには、$R_{t+1}^d=R_{t+1}^m$ とならなければならず、$R_{t+1}^d>R_{t+1}^m$ であれば、m_t=0 となる。

(a) 効用関数 u は消費集合 R_+^2 の内部において連続２回微分可能で、強い意味で準凹関数である。また、c_t^1>0、c_{t+1}^2>0 について増加関数である。すなわち、

$u_1(c_t^1,c_{t+1}^2)>0,\ u_2(c_t^1,c_{t+1}^2)>0$, for $\forall c_t^1>0,\ \forall c_{t+1}^2>0$

(b) 若年期、老年期ともに正の消費を望んでいるとする。すなわち、

$\lim_{c_t^1\to 0} u_1\left(c_t^{\ 1}, c_{t+1}^{\ 2}\right)=\infty$, for $\forall c_{t+1}^2>0$

$\lim_{c_{t+1}^2\to 0} u_2\left(c_t^{\ 1}, c_{t+1}^{\ 2}\right)=\infty$, for $\forall c_t^1>0$

(c) c_t^1、c_{t+1}^2 はともに正常財(normal goods)である。

(ただし、$u_1(c_t^1,c_{t+1}^2)=\partial u/\partial c_t^1$、$u_2(c_t^1,c_{t+1}^2)=\partial u/\partial c_{t+1}^2$)

を満たし、貯蓄関数が利子率に対して非減少的であれば以下の議論に大きな影響を与えることはない。第２.４節で検討する貨幣に役割を与えたモデルにおいて効用関数にこのような想定を置いた場合でも、インフレ率の上昇は貯蓄水準を引き下げる効果を持つが、比較静学および動学の結果に大きな影響を与えることはない。ただし、第２.３節で検討する収穫非逓減性を考慮したモデルでは利子率が資本に対して必ずしも減少関数とならないため、より制約的な仮定が必要である。

[9]銀行が存在し投資活動は金融仲介によってのみ行われると想定する場合、$w(k_t)$である貯蓄は第 t 期の若者１人当たりの銀行への預金額と解釈することができる(ただし、$R_{t+1}^d=R_{t+1}^m$ であれば m_t の一部あるいはすべてを個人が直接保有すると解釈することも可能である)。そのような想定を置いても以下の分析結果に影響を与えることはない。預金は民間部門により創造される内部貨幣であるため、生産は行われるが外部貨幣が価値を持たない定常状態を以下では内部貨幣定常状態と呼んでいる。

均衡条件

競争均衡ではすべての個人および企業は価格を所与として最適な行動をとり、各市場は均衡する。第 t 期において資本市場では、

$$k_{t+1} = d_t \quad (2\text{-}12)$$

財市場では、

$$f(k_t) = c_t^{\,2} + d_t + g_t \quad (2\text{-}13)$$

貨幣市場では、

$$m_t = M_t / p_t \quad (2\text{-}14)$$

である。

第 t 期から第(t+1)期にかけての貨幣の保有による実質粗収益率 $R_{t+1}{}^m$ は粗デフレ率になるので、(2-3)、(2-14)式を考慮すると、

$$R_{t+1}{}^m = p_t / p_{t+1} = (M_t / M_{t+1})[(M_{t+1}/p_{t+1})/(M_t/p_t)] = [1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t) \quad (2\text{-}15)$$

となる。

(2-2)、(2-15)式を考慮すると(2-11)の第 1 式は、

$$\{f'(k_{t+1}) - [1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t)\}m_t = 0 \quad (2\text{-}16)$$

となる。

以上より均衡状態では、(2-5)、(2-14)式より、

$$g_t = [\mu/(1+\mu)]m_t \quad (2\text{-}17)$$

となる。これは政府の支出経路を表す。(2-12)式は(2-8)式より、

$$k_{t+1} = w(k_t) - m_t \quad (2\text{-}18)$$

となる。これは資本の蓄積経路を表す。貨幣が正の価値を持つ(m>0)[10]ためには(2-16)式より、

$$f'(k_{t+1}) = [1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t) \quad (2\text{-}19)$$

とならなければならない。これは資本の実質粗収益率が貨幣の実質粗収益率に等しくなければならない裁定条件を表す。

２.２.２．　定常状態

ここでのシステムは g_t、m_t、k_t に関して(2-17)、(2-18)、(2-19)式で表される。本章において実質政府支出 g_t は単なる内生変数となるため、g_t の動学経路は無視する。よって、動学は m_t、k_t に関して(2-18)、(2-19)式で表される。k_t は前

[10]実質貨幣が保有される(m>0)ことは貨幣が正の価値を持つことと同義である。なぜなら、貨幣が正の価値を持てば p<∞であるが、貨幣が正の価値を持たなければ p=∞となり m=0 である。

期の貯蓄により決まる歴史的事実であり状態変数(state variable)となる。m_tは完全予見のもと自由に決定されるジャンプ変数(jumping variable)(初期値も自由に決まる)として扱う。

本章では均衡解のうち定常状態に焦点を合わせ検討を行っていく。定常状態では、$k_t=k_{t+1}=k$、$m_t=m_{t+1}=m$と置いて(2-18)、(2-19)式より、

$$k = w(k) - m \tag{2-20}$$

$$f'(k) = 1/(1+\mu) \tag{2-21}$$

となる。(2-20)、(2-21)式より k>0、m>0 となる外部貨幣定常状態(それぞれ k^{OUT1}、m^{OUT1} とする)が一意に存在することを保証するため、次の仮定を設ける。

(仮定 4)　$w(k)$は以下を満たす。

(a) $\lim_{k\to 0} w'(k) = \lim_{k\to 0}[-kf''(k)] > 1$　あるいは　$w(0)>0$

(b) $w''(k) = -[f''(k) + kf'''(k)] < 0$, for $\forall k>0$

(仮定 4)はさほど強い仮定でなく、Cobb-Douglas 生産関数や資本と労働の間の代替弾力性が 1 より大きい CES 生産関数であれば満たされる。

k^{IN1}を(2-20)式において m=0、k>0 となる定常状態(以下、内部貨幣定常状態と呼ぶ)として、外部貨幣定常状態(m^{OUT1},k^{OUT1})の存在について次の命題が成り立つ。

(命題 2-1)　設定した仮定のもとで、(2-18)、(2-19)式で表される世代重複経済において、以下の条件(2-22)式が満たされれば、一意で非自明な外部貨幣定常状態が存在する。

$$f'(k^{IN1}) < 1/(1+\mu) \tag{2-22}$$

証明

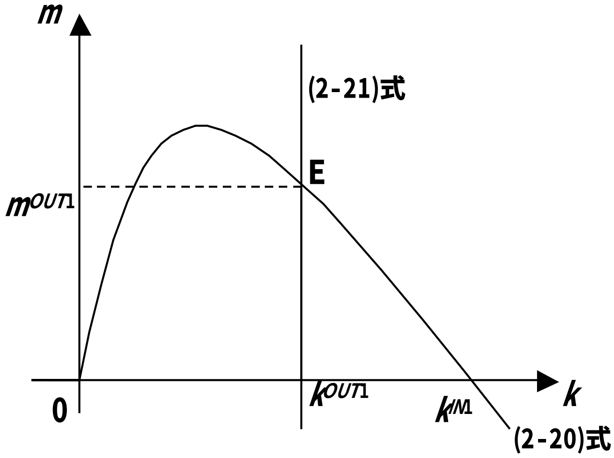
補論 2A 参照

(命題 2-1)を図示すると図 2-1 のようになる。資本蓄積方程式(2-20)式は(仮定 1)、(仮定 4)の(b)より強い意味で凹関数になり、裁定条件(2-21)式は直線で表され、E 点が外部貨幣定常状態となる[11,12]。

---

[11] μ>0 であることに注意すると、(2-21)式は外部貨幣定常状態が存在するためには、内部貨幣定常状態において経済が動学的に非効率的でなければならないことを意味する。貨幣が非効率な投資を吸収し、消費可能集合を拡大させることが可能となる。$f'(k^{IN1})\geq 1$ であれば内部貨幣定常状態は動学的に効率的であり、m>0 となる定常状態は存在しない。その場合、貨幣が正の価値を持ち存在すれば生産的な投資を貨幣が吸収し利子率が上昇して、(2-19)式に従い m は成長を続

図2-1:定常状態



２.２.３. 比較静学(インフレ率の上昇による影響)

ここでは、名目貨幣増加率(インフレ率)の上昇が経済に与える長期的な影響を分析し、Mundell-Tobin 効果について検討を行う[13]。外部貨幣定常状態(k^{OUT1}, m^{OUT1})において、名目貨幣増加率μの変化[14]が経済に与える影響に関し次の命題が成り立つ。

(命題 2-2) 設定した仮定のもとで、(2-18)、(2-19)式で表される世代重複経済において、名目貨幣増加率μを恒常的に上昇させた場合、外部貨幣定常状態における資本・労働比率 k は増加する。

ける。しかし、個人の予算制約には限りがあり、個人は完全予見のもと合理的に行動するので、そのようなことは起こらない。

第２.３節で検討する外部効果を導入したモデルでは、内部貨幣定常状態において経済が動学的に効率的であっても外部貨幣定常状態は存在し得る。外部効果により経済が貨幣を吸収することが可能になるためである。第２.４節で検討するモデルでは内部貨幣定常状態は存在しない。

[12] $\mu>0$ の場合、外部貨幣定常状態は黄金律より非効率な状態になる。政府支出が 0、すなわち$\mu=0$ のとき外部貨幣定常状態は黄金律となり、効用水準が最大となる。しかし、本章でのモデルにおいて正の政府支出は必ず必要であるとし、効率性の比較を$\mu=0$ のケースと行うこと自体が無意味であると想定する。以下の章においても、政府支出が必ず必要であると想定して検討を行っている。

[13]本論文を通して、比較静学と動学の間に密接な関係があるとする Samuelson(1947)の対応の原理(corresponding principle)を活用する。

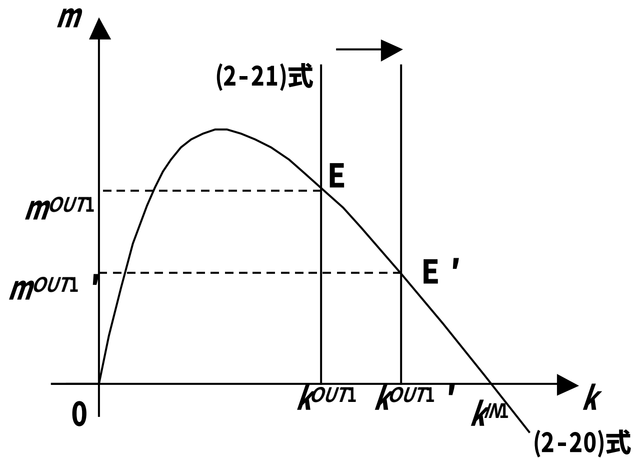
[14]ここでは名目貨幣増加率(外部貨幣定常状態でのインフレ率)μの変動が資本蓄積に与える影響について分析することを目的としているため、政府(中央銀行)がμを変動させる理由について深く言及しないが、何らかの目的によりインフレ率あるいは政府支出水準を操作するような状況を想定する。第５章の比較静学分析においても同様に解釈する。ただし、第３章ではμの変動は財政政策を受けての受動的なものであり、第４章では公開市場操作を受けてのものである。

証明

補論 2B 参照

(命題 2-2)は名目貨幣の増加率の変化が経済に対し影響を与えることから、このシステムでは貨幣の超中立性が成り立たないことを示し、図示すれば図 2-2 のようになる。μ を上昇させると、(2-20)式で表される曲線は変化しないが、(2-21)式で表される直線は右方へシフトする。外部貨幣定常状態は E 点(k^{OUT1}, m^{OUT1})から E'点($k^{OUT1}{}'$, $m^{OUT1}{}'$)へシフトし、k は増加する。ただし、m>0 となるためには $k^{OUT1}{}'<k^{IN1}$ でなければならず、μ が大きくなり過ぎると貨幣は価値を持たない。また、m への影響は効果が相異なる代替効果と所得効果のため定かでない。

図2-2:名目貨幣増加率μの上昇による影響



(2-15)式より定常状態でのインフレ率は、

$$\left(p_{t+1}/p_t\right)-1=\left(1+\mu\right)-1=\mu$$

であり、μ が上昇するとインフレ率も 1 対 1 の関係で上昇する。(命題 2-2)は標準的な Diamond モデルにおいて、長期的にインフレ率が上昇すると資本水準が上昇し、Mundell-Tobin 効果が働くことを示している[15]。

図 2-2 から明らかなように、Mundell-Tobin 効果は資産の保有にかかわる裁

[15]政府支出が労働生産性を上昇させると想定した Ferreira(1999)では名目貨幣増加率(インフレ率)μ が十分小さい場合や大きい場合には必ず Mundell-Tobin 効果が起こり、μ が中間的な値の場合には資本水準の動きが反転する可能性があるが、シミュレーションを行った結果では常に Mundell- Tobin 効果が起こったとしている。また、Ferreira(1999)では労働生産性を考慮しているため、そこでの外部貨幣定常状態は労働者 1 人当たりの変数が定率(効率労働(effective labor)の成長率)で成長する均斉成長経路(balanced growth path)である。

定条件(2-21)式が右方へシフトするため発生する。貨幣と資本は個人のポートフォリオ上、粗代替関係にあり、μ を上昇させると定常状態における貨幣の収益率が低下し資本の収益率が相対的に上昇する。そのため、資本への投資がより多く行われ、その結果、(仮定 1)より裁定条件(2-21)式が保たれる[16]。

本章でのモデルの枠組みにおいて、逆 Mundell-Tobin 効果を発生させるには裁定方程式に何らかの修正が必要である。この点に関して次節以降で詳細に検討を行っていく。

２.２.４． 動学

(2-18)、(2-19)式で表されるシステムには定常状態が３つ存在し得る。１つが(命題 2-1)でみてきたように $m=m^{OUT1}>0$、$k=k^{OUT1}>0$ となる外部貨幣定常状態である。２つ目が $m=0$、$k=k^{IN1}>0$ となる内部貨幣定常状態である。最後が $m=0$、$k=0$ の自明な解[17]である。本章では貨幣が正の価値を持つ定常状態に関心があるため、外部貨幣定常状態に焦点を絞りその定常状態の近傍における動学を検討する[18]。

資本蓄積方程式(2-18)式より、

$$k_{t+1}-k_t = w(k_t)-k_t-m_t \qquad (2\text{-}23)$$

であるので、$k_t=k_{t+1}$ となる経路(KK 曲線)は(2-23)式より、

$$w(k_t)-k_t-m_t=0$$

となり、KK 曲線は図 2-3 のようになる。裁定方程式(2-19)式で $m_t=m_{t+1}$ となる経路を求めるためにまず、(2-18)式を(2-19)式に代入すると、

$$f'[w(k_t)-m_t]=[1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t)$$

となり、これを整理すると、

$$m_{t+1}-m_t = m_t\{(1+\mu)f'[w(k_t)-m_t]-1\} \qquad (2\text{-}24)$$

となる。$m_t=m_{t+1}$ であるためには $m\neq 0$ の場合(2-24)式より、

$$f'[w(k_t)-m_t]=1/(1+\mu) \qquad (2\text{-}25)$$

を満たさなければならない。(2-25)式を満たす曲線を MM 曲線とする。(2-25)式より、

$$dm_t/dk_t = w'(k_t) \qquad (2\text{-}26)$$

が得られる。$k_t>0$ において $w'(k_t)>0$ であるので、(2-26)式の符合は正となる。よって、MM 曲線は図 2-3 のように k-m 平面上で右上がりになる。

---

[16]Orphanides and Solow(1990)で指摘されている通り、Diamond モデルにおいて Mundell-Tobin 効果が働く理由はインフレ率の変動がポートフォリオに影響を与えるためであり、これは Tobin(1965)でのメカニズムと密接に対応している。

[17]この解が存在するには $w(0)=0$ でなければならない。

[18]以下の動学分析は Azariadis(1993)に多くを負う。

(2-23)式から明らかなように、

$k_{t+1} \geq k_t$ iff $w(k_t) - k_t - m_t \geq 0$

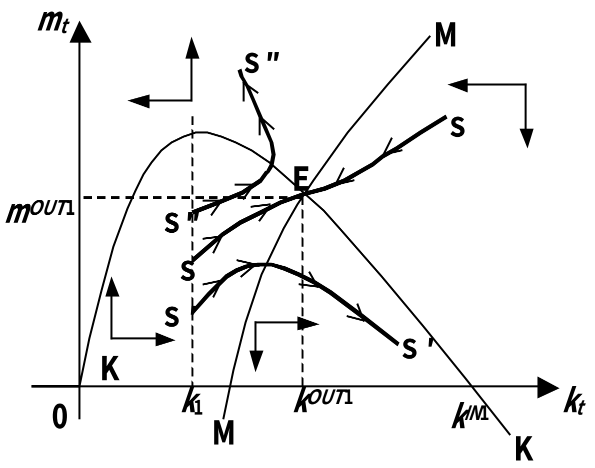
であり、KK 曲線の上側(下側)では k は減少(増加)する。また、(2-24)式から明らかなように、

$m_{t+1} \geq m_t$ iff $m_t\{(1+\mu)f'[w(k_t) - m_t] - 1\} \geq 0$

であり、m>0 の場合、MM 曲線の右側(左側)では m は減少(増加)する。

図 2-3 の位相図から明らかなように、E 点の外部貨幣定常状態(k^{OUT1}, m^{OUT1})に収束する経路は SS のみである。k は状態変数である一方、m はジャンプ変数で自由に調整されるため、k の初期値 k_1 が与えられればこの経路は実現される。初期状態が SS より下であれば A 点の内部貨幣定常状態(k^{IN1},0)に収束する。初期状態が SS より上であれば m は増加を続けるが、個人は完全予見のもと合理的に行動するため、そのようなことは起こらない。

図2-3:動学



以上の位相平面解析から示唆されるように、外部貨幣定常状態(k^{OUT1}, m^{OUT1})の近傍における動学は次の命題にまとめられる[19]。

(命題 2-3) 設定した仮定のもとで、(2-18)、(2-19)式で表される世代重複経済において、外部貨幣定常状態の近傍における動学は、その定常状態に収束する決定的で単調な鞍点経路である。

---

[19]本章では外部貨幣定常状態に議論を集中するため他の定常状態の近傍での動学分析は行わないが、容易に確かめられるように、内部貨幣定常状態(k^{IN1},0)は沈点(sink)、自明な定常状態(0,0)は湧点(source)である。

証明

補論 2C 参照

外部貨幣定常状態の近傍における動学はその定常状態に収束する決定的で単調な鞍点経路であり、インフレ率の上昇は経済を振動させることなく資本水準を上昇させる[20]。しかし、次節で検討していくように逆 Mundell- Tobin 効果が生じるケースでは異なる結果となる。

２.３． 資本に関する収穫非逓減性の考慮

２.３.１． モデル

本節では生産関数に外部効果を導入し検討を行う。前節の標準モデルと同様、２期間離散形の世代重複経済を想定する(記号の使い方も同様)が、以下の点で前節と異なる。

生産

Boldrin(1992)に基づき、外部効果は k に依存し $\varphi(k)$ で表され、生産関数 φ を、

$$\phi(k_t) \equiv \varphi(k_t) f(k_t) \tag{2-27}$$

と定義する。$\varphi(k)$ は経済全体に対する外部効果を表し、スケール・ファクターとする。ここでの外部効果は経験を通じた学習(learning-by-doing)として資本蓄積に伴い副次的に発生するとし、$\varphi(k)$ に関し次の仮定を設ける。ただし簡単化のため、Boldrin(1992)よりも限定的な想定を置く[21]。

(仮定 5)

$$\varphi'(k) > 0,\ \varphi''(k) < 0,\ \text{for}\ \ \forall k>0$$

$$\varphi(0) = 1,\ \lim_{k\to\infty}\varphi(k) = \varepsilon < \infty$$

(仮定 5)は外部効果を表す関数 $\varphi(k)$ が連続２回微分可能で、強い意味で凹関数で有限であり、k=0 のとき外部効果は働かないことを示す。この仮定は

[20] Ferreira(1999)においても緩やかな仮定のもとで外部貨幣定常状態が鞍点になることが示されている。

[21] 本節では外部効果にかなり限定的な想定を置いたが、Boldrin(1992)は貨幣が存在しない世代重複モデルにおいて外部効果により広範な想定を置くことで、定常状態だけでなく恒久的な成長状態も可能であることを示している。

Ferreira(1999)で用いられたものと同様であるが、そこでの外部効果は政府支出が効率労働を上昇させるものとして行われている。

(仮定 2)と関連して、次の仮定を設ける。

(仮定 2')

$$\lim_{k\to\infty}\phi'(k)<1$$

外部効果が存在する場合の賃金率を ω_t、粗利子率を R_t^{de}(いずれも消費財の単位数で測った実質値)とすると、

$$\omega_t = \varphi(k_t)w(k_t) = \varphi(k_t)[f(k_t)-k_t f'(k_t)] = \omega(k_t) \qquad (2\text{-}1')$$

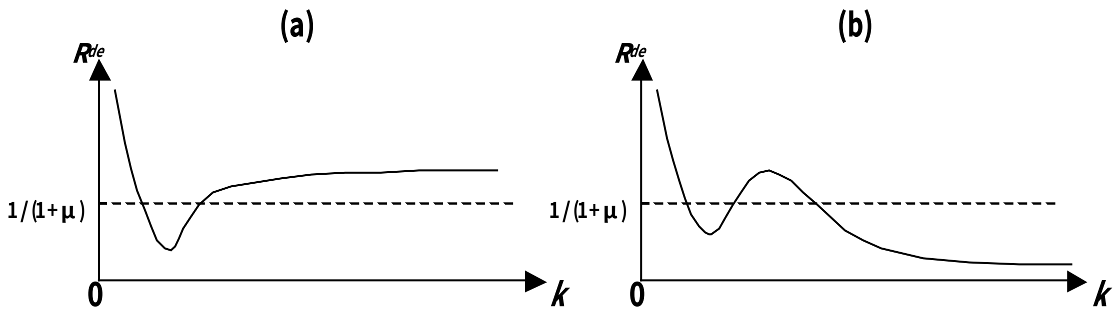
$$R_t^{de} = \varphi(k_t)f'(k_t) \qquad (2\text{-}2')$$

となる。前節での実質粗利子率 R^d は k に関し単調に減少したが、R^{de} は(仮定 5)より k に関し非減少的となる区間が存在し得る。R^{de} の曲線の形状を明確にするには関数をさらに特定化する必要がある。例えば、$f(k)$を代替弾力性が 1 より大きい CES 型や Cobb-Douglas 型に特定化した場合、

$$\lim_{k\to 0}[\varphi(k)f'(k)] = \infty$$

となる。(仮定 5)より外部効果は資本蓄積がある程度進んだときに強く働くため、代替弾力性が 1 より大きい CES 型のケースでは図 2-4 の(a)、Cobb-Douglas 型のケースでは(b)ようになり得る。

図2-4:外部効果が存在する場合の粗利子率



(仮定 3)は次のように置き換えられる。

(仮定 3’)

$R_{t+1}{}^{de} \geq R_{t+1}{}^{m}$

個人

ここでの貯蓄 s_t は、

$s_t = \omega(k_t) = d_t + m_t$ (2-8’)

老年期の消費についての予算制約式は、

$c_{t+1}{}^{2} \leq R_{t+1}{}^{de} d_t + R_{t+1}{}^{m} m_t$ (2-9’)

となる。第 t 期の個人は $\omega(k_t)$、$R_{t+1}{}^{de}$、$R_{t+1}{}^{m}$ を所与として、(2-8’)、(2-9’)、(2-10)式のもと、(2-7)式を最大化する。最大化のための 1 次条件は、

$\left(R_{t+1}{}^{de} - R_{t+1}{}^{m}\right) m_t = 0, \quad R_{t+1}{}^{de} \geq R_{t+1}{}^{m}$

となる。前節と同様、実質貨幣需要が正(m_t>0)であるためには、$R_{t+1}{}^{de} = R_{t+1}{}^{m}$ とならなければならず、$R_{t+1}{}^{de} > R_{t+1}{}^{m}$ であれば、m_t=0 となる。

資本蓄積方程式は(2-12)、(2-8’)式より、

$k_{t+1} = \omega(k_t) - m_t$ (2-18’)

裁定方程式は(2-2’)、(2-15)式より、

$\varphi(k_{t+1}) f'(k_{t+1}) = [1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t)$ (2-19’)

となる。

２．３．２． 定常状態

定常状態では、$k_t = k_{t+1} = k$、$m_t = m_{t+1} = m$ と置いて(2-18’)、(2-19’)式より、

$k = \omega(k) - m$ (2-20’)

$\varphi(k) f'(k) = 1/(1+\mu)$ (2-21’)

となる。外部貨幣定常状態が存在することを保証するため、(仮定 4)に加え次の仮定を設ける。

(仮定 4’) $\omega(k)$は以下を満たす。

$\omega''(k) < 0$, for $\forall k>0$

(仮定 4’)は(仮定 4)の(b)と(仮定 5)を考慮すればさほど強い仮定ではないと考えられる。(仮定 5)を考慮すれば(仮定 4)の(a)と同様に、

$\lim_{k\to 0} \omega'(k) = \lim_{k\to 0} w'(k) = \lim_{k\to 0} [-kf''(k)] > 1$ あるいは $\omega(0) = w(0) > 0$

となる。$\omega'(k)$は(2-1')式、(仮定 1)、(仮定 5)より、

$$\omega'(k)=\varphi'(k)w(k)+\varphi(k)w'(k)>0,\ \text{for}\ \ \forall k>0$$

となる。

外部貨幣定常状態(k^{OUT2},m^{OUT2})の存在に関し、実質粗利子率 $R^{de}=\varphi(k)f'(k)$が単調な減少関数にならない可能性があるため、前節のように明確にならないが、ここでの内部貨幣定常状態での資本水準を k^{IN2} として次の命題が成り立つ。

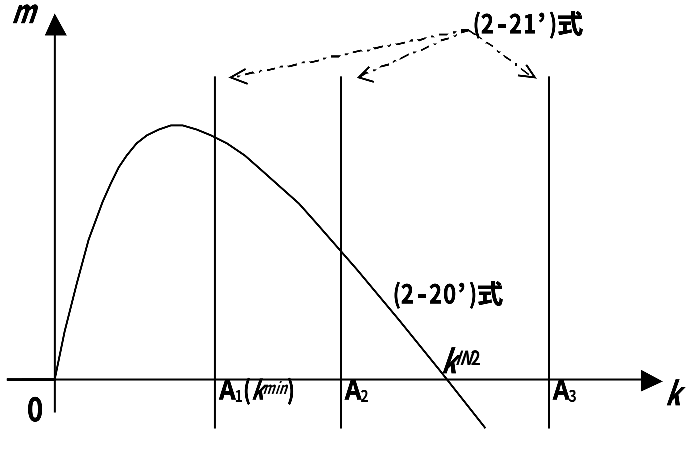
(命題 2-4)　設定した仮定のもとで、(2-18')、(2-19')式で表される外部効果の存在する世代重複経済において、(2-21')式を満たす資本・労働比率 $k>0$(最小のものを k^{min} とする)が存在し、$k^{min}<k^{IN2}$ が満たされれば外部貨幣定常状態は少なくとも 1 つ存在する。

証明

補論 2D 参照

(命題 2-4)を図示すると、例えば図 2-5 のようになる。(命題 2-4)の証明の(b)のケースでは、(2-21')式で表される直線が複数存在する可能性があり、(2-21')式を満たす $k>0$ が外部貨幣定常状態であるためには、k^{IN2} より小さくなければならない(図 2-5 での A_1、A_2 点での k のみ外部貨幣定常状態となる)。

図2-5:定常状態(外部効果が存在する場合)



２.３.３.　比較静学(インフレ率の上昇による影響)

外部貨幣定常状態(k^{OUT2},m^{OUT2})において、名目貨幣増加率(インフレ率) μ の変化が経済に与える影響に関し、実質粗利子率 R^{de} が資本・労働比率 k について

減少すれば(命題 2-2)と同様であるが、R^{de}が k について増加するとき次の命題が成り立つ。

(命題 2-5) 設定した仮定のもとで、(2-18')、(2-19')式で表される外部効果の存在する世代重複経済において、名目貨幣増加率μを恒常的に上昇させた場合、外部貨幣定常状態での実質粗利子率 R^{de}が資本・労働比率 k に関し増加するとき、新たな外部貨幣定常状態において k は減少する。

証明
　補論 2E 参照

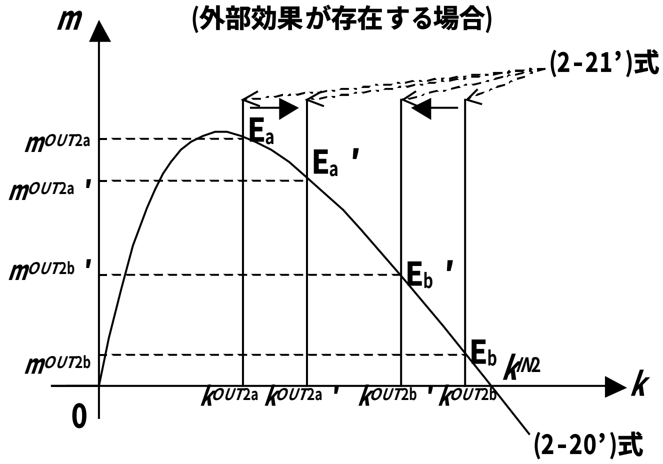
(命題 2-5)を図示すれば、例えば図 2-6 のようになる。これは $f(k)$を代替弾力性が 1 より大きい CES 型に特定化し、R^{de}が図 2-4 の(a)のようになり外部貨幣定常状態が２つ(E_a、E_b 点)存在する場合である。μを上昇させると、(2-20')式で表される曲線は変化しない。外部貨幣定常状態 E_a 点では R^{de}が k に関し減少するため、(2-21')式で表される直線は右方へシフトし、新たな外部貨幣定常状態は E_a'点になり k は増加する。E_b 点では R^{de}が k に関し増加するため、(2-21')式で表される直線は左方へシフトし、新たな外部貨幣定常状態は E_b'点になり k は減少する。k の低い外部貨幣定常状態では外部効果があまり強くないため資本に関し収穫逓減的で前節の場合と同様であるが、k の高い外部貨幣定常状態では外部効果が強く資本に関し収穫逓増的であるため、μの上昇(貨幣の実質粗収益率の低下)に伴い裁定条件より資本の実質粗収益率も低下し k が低下する。ただし、μが上昇し過ぎると貨幣は正の価値を持ち得ず、外部貨幣定常状態は消滅する。

Ferreira(1999)では貨幣発行益による政府支出が効率労働を上昇させるとする外部効果を導入しているが、逆 Mundell-Tobin 効果が生じることは明確に示されていない。本章では資本水準の上昇に伴う外部効果を導入することで、逆 Mundell-Tobin 効果が生じ得ることを示すことが可能となった。

また、Fischer(1993)はインフレ率と労働力成長率の間に有意な水準で相関関係は認められないが、インフレ率と資本蓄積、および、インフレ率とソロー残差である生産性の間には有意な水準で負の相関関係が認められることを実証的に示している[22]。本節のモデルにおいて(仮定 5)を考慮すると逆 Mundell-Tobin 効果が働く場合、Fischer(1993)での結果と整合性の取れたものとなる。

[22]Fischer(1993)では広範な国を含む 1961-88 年にかけてのデータで分析を行っているが、それより古い期間(1950-77 年)のデータで分析を行っている Kormendi and Meguire(1985)ではインフレが投資を通じて経済成長に影響を与えるとしている。また、1950-85 年にかけての中南米諸国に限定して実証分析を行った De Gregorio(1993)では投資水準を通じてではなく投資の生産性を通じてであるとしている。

図2-6:名目貨幣増加率μの上昇による影響
(外部効果が存在する場合)



２.３.４．　動学

(2-18')、(2-19')式で表されるシステムでの外部貨幣定常状態(k^{OUT2}, m^{OUT2})の近傍における動学を検討する。資本蓄積方程式(2-18')式において k_t=k_{t+1} となる経路(K^eK^e 曲線)は図 2-7 のようになり、前節と同様、K^eK^e 曲線の上側(下側)では k は減少(増加)する。

裁定方程式(2-19')式で m_t=m_{t+1} となる経路を求めるためにまず、(2-18')式を(2-19')式に代入すると、

$$\varphi[\omega(k_t)-m_t]f'[\omega(k_t)-m_t]=[1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t)$$

となり、これを整理すると、

$$m_{t+1}-m_t=m_t\{(1+\mu)\varphi[\omega(k_t)-m_t]f'[\omega(k_t)-m_t]-1\} \qquad \text{(2-24')}$$

となる。m_t=m_{t+1} であるためには $m\neq0$ の場合(2-24')式より、

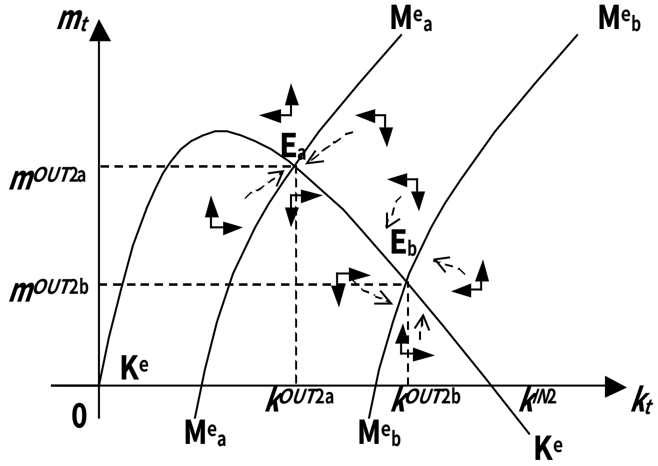
$$\varphi[\omega(k_t)-m_t]f'[\omega(k_t)-m_t]=1/(1+\mu) \qquad \text{(2-25')}$$

を満たさなければならない。(2-25')式を満たす曲線を M^eM^e 曲線とする。(2-25')式より、

$$dm_t/dk_t=\omega'(k_t) \qquad \text{(2-26')}$$

が得られる。k_t>0 において $\omega'(k_t)$>0 であるので(2-26')式の符合は正となり、M^eM^e 曲線は k-m 平面上で右上がりになる。実質利子率が k について非減少的となる区間が存在する場合、所与の μ に対し M^eM^e 曲線は複数存在する可能性がある。図示すれば、例えば図 2-7(図 2-6 のケースに対応)のようになる(M^eM^e 曲線は $M^e{}_aM^e{}_a$、$M^e{}_bM^e{}_b$ 曲線で表されている)。

図2-7:動学(外部効果が存在する場合)



(2-24')式より、

$m_{t+1} \geq m_t$ iff $m_t\{(1+\mu)\varphi[\omega(k_t)-m_t]f'[\omega(k_t)-m_t]-1\}\geq 0$

であり、m>0 のとき M^eM^e 曲線の近傍における m の動きは次の２つの場合に分けられる。$d[\varphi(k)f'(k)]/dk<0$ の場合、M^eM^e 曲線(図 2-7 では $M^e{}_aM^e{}_a$ 曲線)の右側(左側)では m は減少(増加)する。$d[\varphi(k)f'(k)]/dk>0$ の場合、M^eM^e 曲線(図 2-7 では $M^e{}_bM^e{}_b$ 曲線)の右側(左側)では m は増加(減少)する[23]。

$d[\varphi(k)f'(k)]/dk<0$ となる E_a 点の近傍における動学は、その外部貨幣定常状態に収束する決定的で単調な鞍点経路であり、これは前節の外部効果の存在しない場合と同様である。$d[\varphi(k)f'(k)]/dk>0$ となる E_b 点の近傍における動学は図 2-7 の位相図から示唆されるように、非決定的な経路や内生的振動が起こる可能性があり、次の命題にまとめられる。

(命題 2-6)　設定した仮定のもとで、(2-18')、(2-19')式で表される外部効果の存在する世代重複経済において、外部貨幣定常状態(k^{OUT2},m^{OUT2})での実質粗利子率が資本水準 k に関して増加するとき、その定常状態の近傍における動学は次のようになる。

(a) $0<\left.\dfrac{d[\varphi(k)f'(k)]}{dk}\right|_{k=k^{OUT2}}\leq\dfrac{[1+\omega'(k^{OUT2})]-2\sqrt{\omega'(k^{OUT2})}}{(1+\mu)m^{OUT2}}$ の場合

$\omega'(k^{OUT2})<(>)1$ であれば、その外部貨幣定常状態に収束(その外部貨幣定常状態の近傍から発散)する単調であるが非決定的な経路である。

[23] $d[\varphi(k)f'(k)]/dk=0$ のケースはここでは想定していないが、その場合、m は変化しない。

(b) $\dfrac{\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]-2\sqrt{\omega'\left(k^{OUT2}\right)}}{(1+\mu)m^{OUT2}} < \left.\dfrac{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]}{dk}\right|_{k=k^{OUT2}} < \dfrac{2\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]}{(1+\mu)m^{OUT2}}$の場合

$\omega'(k^{OUT2})<(>)1$ であれば、その外部貨幣定常状態に収束(その外部貨幣定常状態の近傍から発散)する非決定的な振動経路である。

(c) $\left.\dfrac{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]}{dk}\right|_{k=k^{OUT2}} > \dfrac{2\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]}{(1+\mu)m^{OUT2}}$の場合

その外部貨幣定常状態に収束する決定的な鞍点経路であるが振動する。

証明

補論 2F 参照

外部貨幣定常状態の近傍における動学は、Mundell-Tobin 効果が起こる場合、外部効果が存在しない場合と同様であるが、(命題 2-6)より逆 Mundell-Tobin 効果が起こる場合、非決定的な経路や内生的振動が起こり、外部効果が経済への撹乱要因になっていることを示している。(2-18')式より m_t が大きければ(小さければ) k_{t+1} は小さく(大きく)なり、(2-19')式より資本に関し収穫逓増的であれば実質粗収益率は低下(上昇)し、裁定条件が維持されるためには m_{t+1} は小さく(大きく)なる必要がある。よって、外部効果が強いと経済が振動する可能性が高まる。

安定性に関して、$\omega'(k^{OUT2})>1$ となる場合は K^eK^e 曲線の傾きが正となる場合であり、資本水準の限界的な上昇により労働所得(賃金)が大きく上昇し貨幣需要が増加する場合である。それは、生産関数が Cobb-Douglas 型や代替弾力性が 1 より大きい CES 型であれば、資本水準が十分低い場合である。しかし、裁定条件(2-21')式が満たされるためには資本蓄積がある程度進み利子率が低下しなければならないため、生産関数をそのように特定化した場合、外部貨幣定常状態が不安定になることはあまりないと考えられる[24]。

以上より、外部貨幣定常状態において外部効果が大きい場合、インフレ率の

[24]一見したところ資本に関し収穫逓増が起こる場合、インフレ率が上昇すると資本への投資がますます行われ貨幣が保有されなくなり(裁定条件が無効化し貨幣が正の価値を持たない)、外部貨幣定常状態が不安定になると考えられそうだが、$\omega'(k^{OUT2})<1$ の場合(図 2-7 の K^eK^e 曲線の傾きが負となる場合)は資本水準を上昇させても所得があまり増加しないときであり、そのため貨幣は価値を持ち続け安定になると考えられる。また、$f(k)$を CES 型(Cobb-Douglas 型の場合、$k<k^{IN2}$ を満たすほど小さな k に対し $f'(k)$の影響が大きくなり過ぎるため、(命題 2-4)の証明での(b)の状況を作り出すのは困難である)、外部効果を Ferreira(1999)に基づき、

$\varphi(k)=2-\exp(-k/\gamma)$, with $\gamma>0$

に特定化し数値シミュレーションを行ったところ、逆 Mundell-Tobin 効果は $\omega'(k^{OUT2})<1$ のときしか観察できず、パラメーターの広い範囲で外部貨幣定常状態は安定になると考えられる。

上昇は長期的に資本水準を低下させ、経済が新たな外部貨幣定常状態へ収束する過程では振動する可能性がある。

２.４． 裁定条件が非束縛的となる場合：貨幣の役割の考慮

２.４.１． モデル

本節では貨幣に何らかの役割を与え資産の保有にかかわる裁定条件が非束縛的となるケースについて考察し、第２.２，２.３節の結果と比較検討する。第２.２節の標準モデルと同様、２期間離散形の世代重複経済を想定する(記号の使い方も同様)が、以下の点で標準モデルと異なる。

個人

個人は老年期の消費の一定割合 τ ($\in(0,1)$)に対し貨幣で税を支払わなければならないとする。これは貨幣に税の支払手段という役割を与えるためのかなり恣意的な仮定であるが、例えば、介護などの公的福祉サービスに対し老年期に保険料を支払わなければならないような状況である。個人はそのことをあらかじめ知っており、s_tを m_tと d_tに振り分ける際、そのことを考慮しなければならないとする。よって、次の制約が課せられることになる[25]。

$$R_{t+1}{}^m m_t \geq \tau c_{t+1}{}^2 \quad (2\text{-}28)$$

また、老年期の消費は予算制約より、

$$(1+\tau)c_{t+1}{}^2 \leq R_{t+1}{}^m m_t + R_{t+1}{}^d d_t \quad (2\text{-}29)$$

を満たさなければならない。

個人のポートフォリオにおいて貨幣の保有量と資本への投資額を決定付けるため、本節では $R_{t+1}{}^m = R_{t+1}{}^d$のとき資本より貨幣のほうが選好されると仮定し、さらに次の仮定を設ける。

(仮定 3”)

$$R_{t+1}{}^d > p_t / p_{t+1} = R_{t+1}{}^m$$

(仮定 3”)は貨幣が収益率で資本への投資に強い意味で支配されることを表し、

[25](2-28)式の制約条件は老年期の消費の一定割合に対し貨幣が必要であることを表し、一種のキャッシュ・イン・アドバンス制約と解釈することも可能である。Hahn and Solow(1995)、von Thadden(1999)ではそのようなモデル化が行われている。

現実的に通常、観察される状況である。もし(仮定 3”)が満たされなければ、経済は直ちに k=0 に収束する。この仮定により標準モデルでの資産保有を決定付ける裁定条件が非束縛的となる。

(仮定 3”)より若者はできるだけ貨幣の保有を手控えるため、(2-28)、(2-29)式は等号で成立する。よって、

$$c_{t+1}^2 = R_{t+1}^d d_t \qquad (2\text{-}30)$$

となる。

第１期の老人に関して、M_0、k_1 を所与として、

$$M_0 / p_1 = m_1 / (1+\mu) = \tau c_1^2$$

$$c_1^2 = R_1^d k_1$$

となる。

政府

政府は老人の消費に対し税を徴収するので若者１人当たりの実質政府支出 g_t は、

$$g_t = [\mu/(1+\mu)] m_t + \tau c_t^2$$

となる。g_t は内生変数であり経済に何も影響を与えないと仮定しているため、これまでと同様、以下の議論において g_t の経路は無視する。

生産

生産関数 $f(k)$に関して、以下での議論をより明瞭なものとするため、次の仮定を設ける。

(仮定 6)　$f(k)$は以下を満たす。

$$d[f'(k)k]/dk > 0,\ \text{for}\ \ \forall k>0$$

(仮定 6)は資本水準の上昇に伴い生産における資本の貢献額が上昇することを表す。この仮定はさほど強いものではなく、Cobb-Douglas 型生産関数や代替弾力性が１より大きい CES 生産関数であれば満たされる。

２.４.２.　定常状態

均衡状態において資本蓄積は第２.２節と同様、(2-18)式で表される。資産保有の裁定条件に関して、(仮定 3”)を置いたため(2-19)式はもはや有効でない。こ

こでの個人のポートフォリオにおける貨幣保有は、税の支払条件を満たしつつなるだけ貨幣保有を手控えることを表す(2-28)式(等号で成立)で決定される。(2-28)式に(2-30)式を代入し(2-2)、(2-12)、(2-15)式を用いて整理すると、

$$m_{t+1}=\tau(1+\mu)f'(k_{t+1})k_{t+1} \tag{2-31}$$

となる。(2-31)式が個人のポートフォリオにおいて資産保有を決定付けることになる。

(仮定 3”)は(2-2)、(2-15)式を用いると、

$$f'(k_{t+1})>[1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t) \tag{2-32}$$

と表される。

以上よりこのシステムは(2-18)、(2-31)、(2-32)式で表される。k、m をそれぞれ定常状態での値とすると、定常状態において(2-18)式は(2-20)式、(2-31)、(2-32)式はそれぞれ、

$$m=\tau(1+\mu)f'(k)k \tag{2-33}$$

$$f'(k)>1/(1+\mu) \tag{2-34}$$

となる。

これまで設定してきた仮定をもとに、外部貨幣定常状態(k^{OUT3},m^{OUT3})に関し次の命題が成り立つ[26]。

(命題 2-7) 設定した仮定のもとで、(2-18)、(2-31)、(2-32)式で表される世代重複経済において、定常状態で(2-34)式を満たし以下の条件(2-35)式を満たせば外部貨幣定常状態が存在する。

$$\lim_{k\to 0} w'(k)-1>\tau(1+\mu)\lim_{k\to 0} d[f'(k)k]/dk \quad \text{あるいは} \quad w(0)>0 \tag{2-35}$$

証明

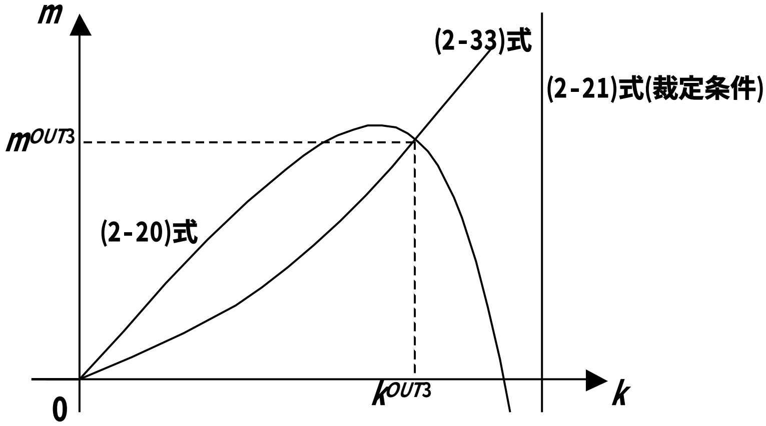
補論 2G 参照

(命題 2-7)を図示すれば図 2-8 のようになる。標準モデルでの裁定条件は非束縛的にならなければならず((2-34)式参照)、そのためにはμが十分大きくなり貨幣の実質粗収益率が小さくなる必要がある。(命題 2-7)は外部貨幣定常状態の一意性を保証するものではないが、議論の簡単化のため以下では、外部貨幣定常状態が一意に存在すると想定する。

---

[26](2-35)式の後半は(仮定 4)の(a)の後半と同様であり代替弾力性が 1 より大きい CES 生産関数であれば満たされる。(2-35)式の前半は(仮定 4)の(a)の前半よりややきつい仮定となる。

図2-8:定常状態



２.４.３．　比較静学(インフレ率の上昇による影響)

外部貨幣定常状態(k^{OUT3},m^{OUT3})において､名目貨幣増加率(インフレ率)μ を恒常的に上昇させたときの資本水準すなわち経済活動の水準に与える影響は、次の命題にまとめられる。

(命題 2-8)　設定した仮定のもとで、(2-18)、(2-31)、(2-32)式で表される世代重複経済において、外部貨幣定常状態が一意に存在すると想定する。名目貨幣増加率 μ を恒常的に上昇させたとき､新たな外部貨幣定常状態における資本水準 k は低下する。

証明
　補論 2H 参照

(命題 2-8)を図示すると図 2-9 のようになる。μ を上昇させると定常状態での資本蓄積方程式(2-20)式に変化はないが、定常状態での税の支払条件(2-33)式が原点を軸として反時計回りにシフトする。外部貨幣定常状態は E 点から E'点へシフトし、新しい外部貨幣定常状態では以前の資本水準より低下する。

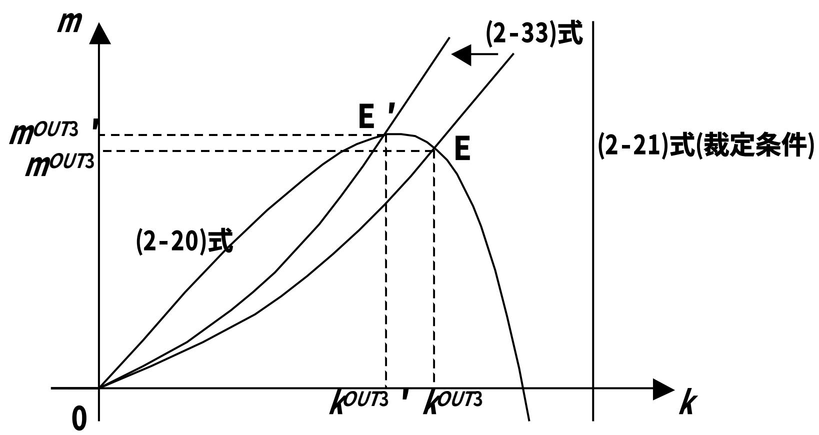
(命題 2-8)は長期的に逆 Mundell-Tobin 効果が働くことを示している。μ を上昇させると貨幣の実質粗収益率は下がり、その実質粗収益率が粗デフレ率であることに注意すると、インフレ率の上昇は手持ち貨幣の実質価値の目減りを意味する。しかし、個人は老年期の税支払手段を確保するためより多くの貨幣を確保しなければならず、その結果、資本への投資額は低下する。

本節のモデルにおいて逆 Mundell-Tobin 効果が生じるメカニズムは前節のモ

デルの場合と大きく異なる。前節のモデルでは収穫非逓減性のため、インフレ率の上昇に対する資産の保有に関する裁定条件の反応が第２.２節の標準モデルの場合と異なることで逆 Mundell-Tobin 効果が生じた。本節のモデルでは、その裁定条件を非束縛的((2-34)式)にし、個人のポートフォリオにおける資産保有を決定付ける新たな条件(税の支払条件(2-33)式)を導入したため、逆 Mundell-Tobin 効果が起こった。

本節では貨幣に税の支払い手段という役割を与えたがその他、流動性、安全性の確保や財購入のための支払手段等、貨幣に何らかの役割を与え、資産保有を決定付ける新たな条件を導入することで、同様の結果は広範に得られると考えられる[27]。個人のポートフォリオにおいて貨幣と他の資産との粗代替性が弱まる以上、この種のモデル化において逆 Mundell- Tobin 効果を発生させることは比較的容易であると考えられる。

図2-9:名目貨幣増加率μの上昇による影響



２.４.４. 動学

外部貨幣定常状態(k^{OUT3},m^{OUT3})の近傍における動学は、次の命題にまとめられる[28]。

---

[27]例えば、Stockman(1981)は無限視野の最適成長モデルにおいて、投資財の購入に貨幣が必要であるとするキャッシュ・イン・アドバンス(CIA)制約を導入することで、逆 Mundell- Tobin 効果が働くことを示している。Cooley and Hansen(1989)でも CIA 制約を導入し余暇と労働が代替的な関係にありインフレ率が上昇すれば余暇の需要が増加する(余暇の消費には貨幣が必要でないため)一方、労働供給が減少するため生産量が低下し投資額さらには資本水準が低下して逆 Mundell- Tobin 効果が働くことを示している。

[28]ここでは所与の k_1、M_0 に基づき m_1 が決まるため決定的な動学経路と解釈したが、もし m_1 が自由に決まるならば非決定的な経路となる。

(命題 2-9)　設定した仮定のもとで、(2-18)、(2-31)、(2-32)式で表される世代重複経済において、外部貨幣定常状態(k^{OUT3}, m^{OUT3})が一意に存在すると想定する。外部貨幣定常状態の近傍における動学は次のようになる。

(a) $w'\left(k^{OUT3}\right)-\tau(1+\mu)\left[f''\left(k^{OUT3}\right)k^{OUT3}+f'\left(k^{OUT3}\right)\right]>0$ の場合

単調で決定的にその外部貨幣定常状態に収束する経路である。

(b) $-1<w'\left(k^{OUT3}\right)-\tau(1+\mu)\left[f''\left(k^{OUT3}\right)k^{OUT3}+f'\left(k^{OUT3}\right)\right]<0$ の場合

その外部貨幣定常状態に収束する決定的な振動経路である。

(c) $w'\left(k^{OUT3}\right)-\tau(1+\mu)\left[f''\left(k^{OUT3}\right)k^{OUT3}+f'\left(k^{OUT3}\right)\right]<-1$ の場合

その外部貨幣定常状態の近傍から発散する決定的な振動経路である。

証明

補論 2I 参照

容易に確認できるように生産関数が Cobb-Douglas 型、すなわち、

$f(k_t)=Ak_t^{\alpha}$, with $A>0, \alpha\in(0,1)$

であればより明確な結果が得られ、(命題 2-9)の(a)のケースになる[29]。

２.４.５.　資本に関する収穫非逓減性を考慮した場合

ここでは本節のモデルにおいて前節と同様、資本蓄積に伴い外部効果が発生し資本の収穫非逓減性が生じる場合について簡単に考察する。

生産関数が $f(k)$から$\phi(k)\equiv\varphi(k)f(k)$に、実質粗利子率が $R^d=f'(k)$から $R^{de}=\varphi(k)f'(k)$に、実質賃金率が $w(k)$から$\omega(k)=\varphi(k)w(k)$に変更される点を除けば、モデルの展開は本節と同様である。注意すべきは(2-32)式の条件が、

$\varphi(k_{t+1})f'(k_{t+1})>[1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t)$

となり、定常状態での(2-34)式が、

$$\varphi(k)f'(k)>1/(1+\mu) \tag{2-34'}$$

となることである。(2-34')式を満たす区間は資本に関する収穫非逓減性のため不

[29](命題 2-9)の証明での(2-a5)式は、

$A[(1-\alpha)-\tau(1+\mu)\alpha]\alpha(k^{OUT3})^{\alpha-1}$

となる。外部貨幣定常状態では、

$k^{OUT3}=A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[(1-\alpha)-\tau(1+\mu)\alpha\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

となるので、これを代入し整理すると、(2-a5)式はαとなる。

連続となる可能性があり、例えば図 2-7 のケース(R^{de}が図 2-4 の(a)となる場合に対応)では、$k\in[k^{OUT2a},k^{OUT2b}]$において(2-34')式は満たされず、外部貨幣定常状態は存在しない。このケースでは資本蓄積に伴い資本の実質粗収益率が低下し(2-34')式が満たされなくなるものの､外部効果が強まるに従い資本の実質粗収益率が再び貨幣の実質粗収益率を上回り(2-34')式が満たされる｡μが十分大きい場合であれば､貨幣の実質粗収益利が十分小さくなり(2-34')式は満たされる｡図 2-4 の(b)のように資本水準が大きくなるに従い資本の実質粗収益率が最終的に 0 に近付く場合でも同様である[30]。

以上より､μの水準により(2-34')式を満たす区間が連続とならないケースが起こり得るが、資本蓄積に伴う外部効果を導入した場合においても、本節の結果と同様、資産保有に関する裁定条件を非束縛的にし、税の支払条件により個人のポートフォリオでの資産配分が決定されることになる。

２.５． 結論

本章では Diamond 型の世代重複モデルを用いて、逆 Mundell-Tobin 効果が発生し得るケースについて検討を行った。第２.２節で検討したように、標準モデルでは Mundell-Tobin 効果が必ず起こったが、実証的に受け入れ難い結果であった。そのメカニズムにおいて重要な役割を果たしたのが資産保有にかかわる裁定条件である。本章ではその裁定条件に注目し、逆 Mundell-Tobin 効果を発生させる方法として２つに分類した。一方が第２.３節での資本に関する収穫逓増性を考慮しインフレ率の変動が裁定条件に与える効果を反転させるものであり、他方が第２.４節での裁定条件を非束縛的にするものである。

第２.３節では資本蓄積に伴い外部効果が発生すると想定して、この裁定条件に変更を加えた。外部貨幣定常状態が存在すれば、それは複数存在する可能性があった。外部効果が強く資本に関し収穫逓増的である場合､逆 Mundell-Tobin 効果が発生することが示された。標準モデルにおいて外部貨幣定常状態の近傍における局所動学は決定的で単調な鞍点経路であったが、逆 Mundell-Tobin 効果が発生するケースでは非決定的な経路や振動経路となった。これはインフレ率の上昇(あるいは拡張的な貨幣政策)が資本水準を低下させるだけでなく経済に撹乱をもたらすことを意味する。

第２.４節では貨幣に何らかの役割を与えることで個人のポートフォリオにおける貨幣と資本への投資の粗代替性を弱め、標準モデルでの裁定条件が非束縛

[30] k-m 平面上、R^{de}が図 2-4 の(a)のようになるケースではμの上昇に伴い(2-34')式を等号で満たす直線が消滅し((2-34')式を満たさない区間が消滅し)、(b)のようになるケースでは(2-34')式を満たす区間が拡大する。

的となるケースについて検討を行った。そこでは、裁定条件に代わり資産保有を決定付ける新たな条件(税の支払い条件)が有効に作用し逆 Mundell-Tobin 効果が生じた。

本章では逆 Mundell-Tobin 効果が生じる可能性について議論を集中したため、それが生じる状況についてあまり明確でない。第２.３節のモデルでは外部貨幣定常状態が複数存在する可能性があり、逆 Mundell-Tobin 効果が支配的な定常状態に経済が収束する保証はない。また、逆 Mundell-Tobin 効果が生じる程度に外部効果が強くなる状況を明確にするには、外部効果等の関数の性質をさらに特定化する必要がある。そのためには実証的背景を踏まえた上で行う必要があると考えられる。

補論 2A: (命題 2-1)の証明

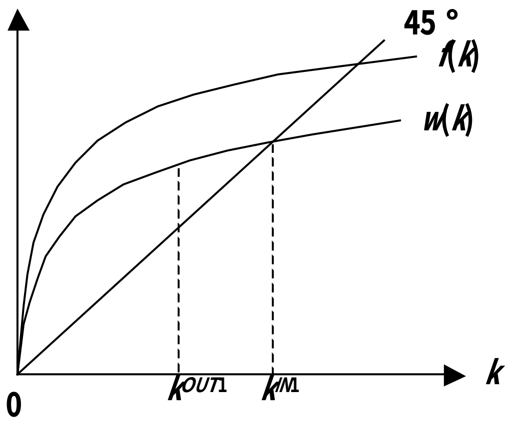
本論文ではグラフを活用しながら証明を行っていく。Tirole(1985)は世代重複経済に貨幣が存在し得ることの詳細な証明を行っているが(正確には、Tirole(1985)はバブルが存在し得ることの証明を行っており、本章での貨幣は本来的に価値のないバブルに相当する)、ここでは概略的な証明を行う。まず、k^{IN1} が一意に存在することをみる(内部貨幣定常状態(貨幣が存在しない世代重複モデルでの非自明な定常状態)の存在に関する詳細な議論は Galor and Ryder(1989)を参照)。k^{IN1} は(2-20)式より、

$$k^{IN1} = w\left(k^{IN1}\right)$$

を満たさなければならない。図 2-A1 に示されているように(仮定 1)、(仮定 2)、(仮定 4)および $f(k) > w(k)$に注意すれば、$w(k)$で表される曲線は $k>0$ において 45°線と１度だけ交わる。よって、$k^{IN1}>0$ は一意に存在する。

定常状態において(2-20)式は k が一定であるために満たさなければならない m の値を決定する。$m>0$ であるためには $w(k)>k$ となる必要があり、よって、$k^{IN1}> k^{OUT1}$ が成り立たなければならない。その場合、m は一意に決まる。一方、k^{OUT1} は(2-21)式を満たさなければならないので、(仮定 1)に注意すれば $k^{IN1}> k^{OUT1}$ より (2-22)式が満たされなければならない。　□

図2-A1:定常状態



補論 2B: (命題 2-2)の証明

μ の変化は外部貨幣定常状態(k^{OUT1}, m^{OUT1})での資本蓄積を表す(2-20)式に影響を与えないが、裁定条件を表す(2-21)式には影響を与る。(2-21)式を全微分し整理すると(k^{OUT1}, m^{OUT1})では、

$$dk/d\mu\Big|_{k=k^{OUT1}} = -1\Big/\left[(1+\mu)^2 f''\left(k^{OUT1}\right)\right] \qquad \text{(2-a1)}$$

となる。(仮定 1)より(2-a1)式の符合は正となる。 □

補論 2C: (命題 2-3)の証明

(2-18)、(2-19)式より定常状態(k,m)でのヤコビ行列 J は、

$$J = \begin{pmatrix} dk_{t+1}/dk_t & dk_{t+1}/dm_t \\ dm_{t+1}/dk_t & dm_{t+1}/dm_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'(k) & -1 \\ (1+\mu)w'(k)f''(k)m & (1+\mu)\left[f'(k)-f''(k)m\right] \end{pmatrix}$$

となる。

外部貨幣定常状態(k^{OUT1}, m^{OUT1})では(2-21)式を用いると、

$\det J = w'(k^{OUT1})$

$\mathrm{tr}J = \det J + 1 - (1+\mu)f''\left(k^{OUT1}\right)m^{OUT1}$

が得られる。$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}J\lambda + \det J$ を特性方程式(λ は特性根)とすると、

$p(1) = 1 - \mathrm{tr}J + \det J = (1+\mu)f''\left(k^{OUT1}\right)m^{OUT1}$

となる。(仮定 1)より、$\det J > 0$、$\mathrm{tr}J > 0$、$p(1) < 0$ であるので、２つの特性根を λ_1、λ_2 とすると、

$0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$

となり、この定常状態は鞍点である。 □

補論 2D: (命題 2-4)の証明

第２.２節の場合と同様、内部貨幣定常状態 k^{IN2} は一意に存在する。(2-20’)式より k^{IN2} は、

$$k^{IN2} = \omega\left(k^{IN2}\right)$$

を満たさなければならない。図 2-A2 に示されているように、(仮定 1)、(仮定 2’)、(仮定 4)、(仮定 4’)、(仮定 5) および $\phi(k) > \omega(k)$ に注意すれば、$\omega(k)$ で表される曲線は $k>0$ において 45°線と１度だけ交わる。よって、$k^{IN2}>0$ は一意に存在する。

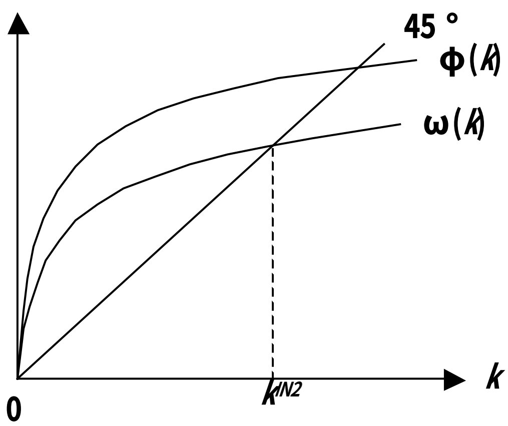
定常状態での裁定方程式(2-21’)式に関して、次の２つのケースが想定される。

(a) 外部効果があまり強くなく実質粗利子率が $\forall k>0$ について減少関数となる場合、すなわち、

$$d\left[\varphi(k) f'(k)\right]/dk < 0,\ \text{for}\ \ \forall k>0$$

(b) 外部効果が強くある $k>0$ について非減少関数となる場合、すなわち、

$$d\left[\varphi(k) f'(k)\right]/dk \geq 0,\ \text{for}\ \ \exists k>0$$



(a)のケースであれば外部効果が存在しない場合と同様、所与の μ に対し(2-21’)式を満たす $k>0$ が存在すればそれは一意に存在する。一方、(b)の場合、(2-21’)式を満たす $k>0$ が複数存在する可能性がある(図 2-4 参照)。$k^{min}<k^{IN2}$ であれば外部貨幣定常状態(k^{OUT2}, m^{OUT2})が少なくとも１つ存在し、(2-21’)式を満たす $k>0$ のうち、$k<k^{IN2}$ であるものが k^{OUT2} となる。　□

補論 2E: (命題 2-5)の証明

μ の変化は外部貨幣定常状態での資本蓄積を表す(2-20’)式に影響を与えないが、裁定条件を表す(2-21’)式には影響を与る。(2-21’)式を全微分し整理すると

(k^{OUT2}, m^{OUT2})では、

$$dk/d\mu\Big|_{k=k^{OUT2}} = -1\Big/\left\{(1+\mu)^2 d\left[\varphi(k)f'(k)\right]/dk\Big|_{k=k^{OUT2}}\right\} \qquad (2\text{-a2})$$

となる。(2-a2)式の符合は $d\left[\varphi(k)f'(k)\right]/dk\Big|_{k=k^{OUT2}}$ に依存し、それが正であれば(2-a2)式の符合は負となる。 □

補論 2F: (命題 2-6)の証明

(2-18')、(2-19')式より定常状態(k,m)でのヤコビ行列 J は、

$$J = \begin{pmatrix} \omega'(k) & -1 \\ (1+\mu)\omega'(k)m\{d[\varphi(k)f'(k)]/dk\} & (1+\mu)\varphi(k)f'(k) - (1+\mu)m\{d[\varphi(k)f'(k)]/dk\} \end{pmatrix}$$

となる。外部貨幣定常状態(k^{OUT2}, m^{OUT2})では、

$\det J = \omega'(k^{OUT2}) > 0$

$$\mathrm{tr}J = \omega'\left(k^{OUT2}\right) + 1 - (1+\mu)m^{OUT2}\left\{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]/dk\Big|_{k=k^{OUT2}}\right\}$$

となり、$p(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{tr}J\lambda+\det J$ を特性方程式(λ は特性根)とすると、

$$p(1) = 1 - \mathrm{tr}J + \det J = (1+\mu)m^{OUT2}\left\{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]/dk\Big|_{k=k^{OUT2}}\right\} > 0$$

$$p(-1) = 1 + \mathrm{tr}J + \det J = 2 + 2\omega'\left(k^{OUT2}\right) - (1+\mu)m^{OUT2}\left\{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]/dk\Big|_{k=k^{OUT2}}\right\}$$

となる。Δ を判別式とすると、

$$\begin{aligned}\Delta = \mathrm{tr}J^2 - 4\det J = &\left\langle(1+\mu)m^{OUT2}\left\{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]/dk\Big|_{k=k^{OUT2}}\right\}\right\rangle^2 \\ &- 2\left[\omega'\left(k^{OUT2}\right)+1\right](1+\mu)m^{OUT2}\left\{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]/dk\Big|_{k=k^{OUT2}}\right\} + \left[\omega'\left(k^{OUT2}\right)-1\right]^2\end{aligned}$$

となる。

(ⅰ). (命題 2-6)の(c)が満たされる場合

$p(-1)<0$ となり、

$\lambda_1<-1, \lambda_2\in(-1,0)$

となる。外部貨幣定常状態は鞍点になり、その定常状態の近傍での動学経路は振動する。

(ⅱ). $0 < \dfrac{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]}{dk}\Bigg|_{k=k^{OUT2}} < \dfrac{2\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]}{(1+\mu)m^{OUT2}}$ の場合

$p(-1)>0$ となり、さらに、

(ⅱ-1). $\dfrac{\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]-2\sqrt{\omega'\left(k^{OUT2}\right)}}{(1+\mu)m^{OUT2}}<\left.\dfrac{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]}{dk}\right|_{k=k^{OUT2}}$

$<\dfrac{\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]+2\sqrt{\omega'\left(k^{OUT2}\right)}}{(1+\mu)m^{OUT2}}$ の場合

Δ<0 であり、det J に注意すると $\omega'(k^{OUT2})<(>)1$ であれば、

mod(λ_i)<(>)1(i=1,2)

となる。外部貨幣定常状態は沈点(湧点)になり、その定常状態の近傍での動学経路は振動する。

(ⅱ-2). $\left.\dfrac{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]}{dk}\right|_{k=k^{OUT2}}\leq\dfrac{\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]-2\sqrt{\omega'\left(k^{OUT2}\right)}}{(1+\mu)m^{OUT2}}$ の場合

Δ≥0 であり、tr$J$>0 であることに注意すると $\omega'(k^{OUT2})<(>)1$ であれば、

$\lambda_1, \lambda_2<(>)1$

となる。外部貨幣定常状態は沈点(湧点)になり、その定常状態の近傍での動学経路は単調である。

(ⅱ-3). $\dfrac{\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]+2\sqrt{\omega'\left(k^{OUT2}\right)}}{(1+\mu)m^{OUT2}}\leq\left.\dfrac{d\left[\varphi(k)f'(k)\right]}{dk}\right|_{k=k^{OUT2}}<\dfrac{2\left[1+\omega'\left(k^{OUT2}\right)\right]}{(1+\mu)m^{OUT2}}$ の場合

Δ≥0 であり、tr$J$<0 であることに注意すると $\omega'(k^{OUT2})<(>)1$ であれば、

$\lambda_1, \lambda_2\in(-1,0)(\lambda_1, \lambda_2<-1)$

となる。外部貨幣定常状態は沈点(湧点)になり、その定常状態の近傍での動学経路は振動する。

(ⅱ-1)、(ⅱ-2)、(ⅱ-3)より、(命題 2-6)の(a)、(b)が導かれる。 □

補論 2G: (命題 2-7)の証明

まず、$\lim_{k\to 0}f'(k)k=0$ であることを証明する。すべての k>0 およびある $\nu\in(0,1)$ について、

$f(k)-f(0)=kf'(\nu k)$

となる。(仮定 1)より $f'(\nu k)>f'(k)$であるので、(2-1)式を考慮すると、

$f(k)>w(k)=f(k)-kf'(k)>f(0)\geq 0$

が導かれる。$f(k)>w(k)>f(0)$は、

$w(0)=\lim_{k\downarrow 0}w(k)=f(0)\geq 0$

を意味するため、$\lim_{k \to 0} f'(k)k = 0$が導かれる。

よって、定常状態での税の支払条件(2-33)式は *k*-*m* 平面において原点を通り、(仮定 6)より $m(k)$は k の増加関数となる。一方、定常状態における資本蓄積方程式(2-20)式に関して第２.２節でみてきたように(仮定 1)、(仮定 4)の(b)より、$m(k)$は k について強い意味で凹関数になる。(2-35)式を考慮すると(2-20)、(2-33)式を満たす k>0、m>0 となる外部貨幣定常状態(k^{OUT3},m^{OUT3})が少なくとも１つ存在する。　□

補論 2H: (命題 2-8)の証明

(2-20)式に(2-33)式を代入すると、

$$k = w(k) - \tau(1+\mu) f'(k)k$$

となり、この式を全微分し整理すると外部貨幣定常状態(k^{OUT3},m^{OUT3})では、

$$\left.\frac{dk}{d\mu}\right|_{k=k^{OUT3}} = \frac{\tau f'\left(k^{OUT3}\right)k^{OUT3}}{w'\left(k^{OUT3}\right) - 1 - \tau(1+\mu)\left[f''\left(k^{OUT3}\right)k^{OUT3} + f'\left(k^{OUT3}\right)\right]} \qquad \text{(2-a3)}$$

となる。

(2-a3)式の分子の符号は(仮定 1)より正である。分母に関して、[$w'(k^{OUT3})$-1]は(2-20)式で表される曲線の(k^{OUT3},m^{OUT3})における *k*-*m* 平面上での傾き、$\tau(1+\mu)[f''(k^{OUT3})k^{OUT3}+f'(k^{OUT3})]$ は(2-33)式で表される曲線の傾きを表す。外部貨幣定常状態が一意に存在することから *k*-*m* 平面上、(k^{OUT3},m^{OUT3})において(2-33)式で表される曲線は(2-20)式で表される曲線を下から交差するため、

$[w'(k^{OUT3})-1] < \tau(1+\mu)[f''(k^{OUT3})k^{OUT3}+f'(k^{OUT3})]$

となり(図 2-8 参照)、(2-a3)式の分母の符号は負となる。よって、(2-a3)式の符号は負となる。　□

補論 2I: (命題 2-9)の証明

動学は(2-32)式のもと、(2-18)、(2-31)式で表される。(2-31)式より m_{t+1} は k_{t+1} により決まるため、ヤコビ行列 Jは逆行列を持たず det$J$=0 となる。そこで、(2-18)式より(2-31)式を考慮し m_tを消去すると、

$$k_{t+1} = w(k_t) - \tau(1+\mu) f'(k_t)k_t \qquad \text{(2-a4)}$$

となる。(2-a4)式は k に関する１階の差分方程式であり、このシステムの動学は１変数で表すことができる。ただし、(2-a4)式は t>1 についてである。

外部貨幣定常状態(k^{OUT3},m^{OUT3})の近傍における動学を調べるため、(2-a4)式を全微分し整理すると(k^{OUT3},m^{OUT3})では、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k^{OUT3}} = w'\left(k^{OUT3}\right) - \tau(1+\mu)\left[f''\left(k^{OUT3}\right)k^{OUT3} + f'\left(k^{OUT3}\right)\right] \qquad \text{(2-a5)}$$

となる。

外部貨幣定常状態が一意に存在することから、

$$w'\left(k^{OUT3}\right) - 1 < \tau(1+\mu)\left[f''\left(k^{OUT3}\right)k^{OUT3} + f'\left(k^{OUT3}\right)\right]$$

となり(図 2-8 参照)、(2-a5)式は 1 より小さい。

(命題 2-9)の(a)が成り立てば、

$$0 < dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k^{OUT3}} < 1$$

となり、k_t は振動することなく単調に k^{OUT3} に収束する。k_1、M_0 は所与であり、$f'(k_1)k_1=c_1^2$ より c_1^2 が決まり、$M_0/p_1=m_1/(1+\mu)=\tau c_1^2$ より m_1 が決まるため、(2-18)式より k_2 が決まる。(2-31)式より m_2 が決まり以後、k_t、m_t は同様に決定されていく。よって、(k^{OUT3}, m^{OUT3})の近傍における動学は決定的なものである。

(命題 2-9)の(b)、(c)のケースも同様にして導かれる。　□

補論 2J: 厚生的観点からの検討

本文中では外部貨幣定常状態における政策効果として名目貨幣増加率(インフレ率)μ の変化が資本蓄積に与える影響について検討しているが、この補論では外部貨幣定常状態における個人の効用水準を検討することで、厚生面から μ の変化が与える影響について考察する。

標準的 Diamond モデルの場合

個人の効用水準は老年期の消費水準で表すことができ、(2-13)式より(2-12)、(2-17)、(2-18)式を考慮すると、

$$c_t^2 = f(k_t) - k_{t+1} - [\mu/(1+\mu)]m_t = f(k_t) - k_{t+1} - [\mu/(1+\mu)][w(k_t) - k_{t+1}]$$

となる。定常状態では(定常状態での消費水準を c^2 とする)(2-21)式を活用すると、

$$c^2 = f(k) - k - [1 - f'(k)][w(k) - k] \qquad \text{(2-a6)}$$

となる。

外部貨幣定常状態において μ の変化が効用水準へ与える影響は(2-a6)式より、

$$dc^2/d\mu = \{-[1 - f'(k)]w'(k) + f''(k)[w(k) - k]\}dk/d\mu \qquad \text{(2-a7)}$$

となる。(仮定 1)、$1>f'(k)$、$w(k)-k=m>0$ であるので、(2-a7)式の{・}内の符号は負となる。(命題 2-2)より $dk/d\mu>0$ であるので $dc^2/d\mu<0$ となる。

よって、μ を上昇させることにより個人の効用水準は悪化する。μ の上昇に伴い動学的により非効率な状態となることに加え、生産物のうち政府の取り分(インフレ税による政府の収入)が増加する力が働く(ただし、実質貨幣保有残高

(税ベース)が減少する可能性があるため税収が必ずしも増加するわけではない)ためである。

資本に関する収穫非逓減性を考慮した場合

第 t 期の老人の消費水準は(2-27)、(2-18')式を考慮すると、

$$c_t^{\,2}=\varphi(k_t)f(k_t)-k_{t+1}-[\mu/(1+\mu)]m_t=\varphi(k_t)f(k_t)-k_{t+1}-[\mu/(1+\mu)][\omega(k_t)-k_{t+1}]$$

となる。定常状態では(2-21')式を活用すると、

$$c^2=\varphi(k)f(k)-k-[1-\varphi(k)f'(k)][\omega(k)-k] \qquad (2\text{-a8})$$

となる。

外部貨幣定常状態において μ の変化が効用水準へ与える影響は(2-a8)式より、

$$\frac{dc^2}{d\mu}=\varphi'(k)f(k)\frac{dk}{d\mu}-[1-\varphi(k)f'(k)]\omega'(k)\frac{dk}{d\mu}+[\omega(k)-k]\frac{d[\varphi(k)f'(k)]}{d\mu} \qquad (2\text{-a9})$$

となる。$\omega(k)$-k=m>0、$d[\varphi(k)f'(k)]/d\mu$ <0 であるので(2-a9)式の第３項の符号は負であるが、第１項と第２項のため(2-a9)式の符号は明確とならない。実質粗収益率 R^{de}=$\varphi(k)f'(k)$が k に関し減少するとき $dk/d\mu$ >0 となるため、(仮定 5)、1>$\varphi(k)f'(k)$であることを考慮すると、(2-a9)式の第１項の符号は正であるが第２項の符号は負となる。R^{de} が k に関し増加するとき(命題 2-5)より $dk/d\mu$ <0 となるため、(2-a9)式の RHS の第１項の符号は負であるが第２項の符号は正となる。

以上より、ここでは外部効果が存在するため μ の変化が個人の効用水準に与える影響は明確にならない。

裁定条件を非束縛的とし貨幣を税の支払手段とした場合

(2-30)式より(2-2)、(2-12)式を考慮すると、

$$c_t^{\,2}=f'(k_t)k_t$$

となり、定常状態では、

$$c^2=f'(k)k \qquad (2\text{-a10})$$

となる。

外部貨幣定常状態において μ の変化による効用水準への影響は(2-a10)式より、

$$dc^2/d\mu=\{d[f'(k)k]/dk\}(dk/d\mu) \qquad (2\text{-a11})$$

となる。(命題 2-8)より $dk/d\mu$ <0 であり(仮定 6)を考慮すると $dc^2/d\mu$ <0 となる。

よって、μ を上昇させることにより個人の効用水準は悪化する。μ の上昇により収益率の劣る貨幣をより多く保有しなければならないためである。