第３章　インフレーションの内生化Ⅰ：財政的側面からの分析*

３.１．はじめに

本章ではDiamondモデルを用い、財政的側面からインフレーションが内生的に決定される場合について検討を行う。

多くの文献では貨幣が含まれる成長モデルあるいは世代重複モデルにおいて名目貨幣増加率すなわち長期的にはインフレ率を外生的に扱い、インフレ率が資本蓄積等の実物経済に影響を与えるものとして分析が行われている。しかし、そのような理論研究の実証的背景であるインフレと実物経済との相関関係に関する実証研究の結果は、因果関係が必ずしもインフレから実物経済になっていることを意味しない。因果関係が実物経済からインフレ、あるいは２者ともに共通の要因により影響を受ける場合、名目貨幣増加率を外生的に捉えることは不適切なものとなる。また、貨幣政策が受動的である場合、名目貨幣増加率を外生的に捉えた分析は適切でなく、この点は古くはBlack(1972)により指摘されたことである[1]。本章では Diamond モデルを用い、従来より広く行われてきた想定と異なり名目貨幣増加率を内生的に捉え、インフレが内生的に決定されるものとして扱う。本章では貨幣量が内生的に決定されるため、逆因果仮説(reverse causation hypothesis)と関連したものとなる[2]。

本章では財政政策に注目する。Phelps(1973)は労働所得に対し課税が行われる場合、流動性に対しても課税を行うこと、すなわち、貨幣の増発による貨幣発行益も活用することが最適な政策となることを示し[3]、特に、貨幣需要が金利に対し非弾力的である場合、金融、財政の効率性の観点から貨幣発行益は魅力的な財源であるとしている。実際、Click(1998)で推計されているように、政府支出のうち多くの割合を貨幣発行益に依存している経済が多数存在する。しかし、名目貨幣増加率を所与として扱った場合、結果として生じる貨幣発行益は受動的に決定され、政府支出の水準も受動的に決定される。政府財政の多くを貨幣発行益に依存する経済において、このようなモデル化はミスリーディングである。本章では、政府支出の水準を与件(パラメーター)として扱い、その与件

---

*本章は久米(2004a)に基づく。

[1]Black(1972)は能動的貨幣政策の実現性に疑問を呈したうえで、やや皮肉を込めて、他の筆者がモデルにおいて受動的貨幣政策が採られた場合､何が起こるかを示そうとすることを望むと述べている。

[2]King and Plosser(1984,footnote1)は逆因果仮説を、銀行システムを考慮したものと中央銀行による政策の反応を強調したものとに分類しているが､その分類によれば本章は後者に属することになる。

[3]より最近では Bhattacharya and Haslag(2001)により示されている。

を満たすように名目貨幣増加率、すなわち長期的にインフレ率が内生的に決定される状況を想定する。換言すれば、財政当局が主導的立場にあり、中央銀行(貨幣当局)が追従的立場にあると想定する。

本章では次の構成に従って検討を行っていく。第３.２節では、本章で扱うモデルとして貨幣が含まれる形での Diamond 型の世代重複モデルを用い検討を行う。ただし、政府支出の水準およびその財源を与件として扱い、財源として若年期の個人に対する一括税(lump-sum tax)と貨幣発行益が存在すると想定する。第２章で検討した通り、標準的な Diamond モデルにおいて貨幣が正の価値を持つ場合、貨幣の収益率が代替的資産、すなわち資本の収益率と等しいとする裁定条件が成り立たなければならないが、第３.３節では、貨幣が収益率で劣る資産であるにもかかわらずそれが正の価値をもつ根拠として法定準備による法的規制を導入し、第３.２節の結果と比較検討を行う。第３.４節では本章のまとめを行う。厚生的観点からの分析は補論で行い、個人の効用水準への政策効果について考察する。

３.２． 標準的 Diamond モデルの場合

３.２.１． モデル

第２章で検討した標準的な Diamond モデルと同様、２期間離散形の世代重複経済を想定する(記号の使い方も以下で言及する場合を除き同様)。ただし、本章では以下で詳細に検討するように、財政政策を所与とし名目貨幣増加率が受動的に調整されるものとする。

生産

企業の生産活動は第２章での標準モデルと同様であり、生産関数 f に関して(仮定 1)、(仮定 2)が成り立つとする。企業は競争的に行動するため生産要素市場では(2-1)、(2-2)式が成り立つ。

個人

個人は貯蓄を資本への投資あるいは貨幣の保有で行うため(2-6)式が成り立つ。資本が保有され生産が行われることを保証するため(仮定 3)が成り立つとする。

個人は老年期のみ消費を行い効用関数 u は(2-7)式で表すことができるとする。第 0 期の個人(第 1 期の老人)には M_0 の貨幣と K_1 の資本が与えられ、それらの粗収益を基に消費を行うとする。

第 t 期(t>0)の若者は供給した労働に対し所得(賃金) $w(k_t)$ を受け取り、一括税

として τ の所得税が課せられるとする。τ $(0<\tau<w(k_t))$は与件であり、老人には一括税が課せられないとする[4]。若者は課税後の労働所得(可処分所得)$(w(k_t)-\tau)$をすべて貯蓄 s_t にまわし、(2-6)式を考慮すると、

$$s_t=w(k_t)-\tau=d_t+m_t \tag{3-1}$$

となる。老年期の消費についての予算制約式は(3-1)式に注意すると(2-9)式となる。第 t 期の個人は $w(k_t)$、$R_{t+1}{}^d$、$R_{t+1}{}^m$ を所与として、(3-1)、(2-9)式および非負制約(2-10)式のもと(2-7)式を最大化する。

最大化のための１次条件は $m_t\geq 0$ であることに注意すると(2-11)式となる。実質貨幣需要が正$(m_t>0)$であるためには、$R_{t+1}{}^d=R_{t+1}{}^m$ となる必要があり、$R_{t+1}{}^d>R_{t+1}{}^m$ であれば $m_t=0$ となる。

政府

貨幣を含む成長モデルあるいは世代重複モデルでは第２章での標準モデルのように名目貨幣増加率を外生的に扱い政府支出を内生的に捉える場合が多いが、本章ではそのような想定と異なり、政府支出を外生的に捉える。政府は各期において若者１人当たり実質で g の支出を行うとする。Azariadis(1993,ch.20)では利付国債により所与の g が賄われると想定し分析が行われているが、ここでは純粋交換経済での世代重複モデルにおいて Bhattacharya and Haslag(2001)が行った想定と同様に、g は若者に対する一括税 τ と貨幣発行益により賄われ、政府の財政バランスは維持されるとする。τ も所与として扱うため、プライマリー財政赤字$(g-\tau)$が貨幣化されることを意味する。よって、各期には、

$$g=\tau+\left(M_t-M_{t-1}\right)/p_t \tag{3-2}$$

が成り立つ[5]。g と τ を与件として扱うため(3-2)式より、貨幣量は受動的に決定される。逆因果仮説により Tobin(1970)は総需要の変動[6]に反応して貨幣量および生産が決定されるものとし、Keynes 流のモデルを用い分析を行っている。本章では簡単化のため、政府支出は財が消費されるだけでありその支出自体は経済に何も影響を与えないとする。

貨幣(法定不換紙幣)は g を賄うため政府(中央銀行)により独占的に発行されるとする。第$(t\text{-}1)$期から第 t 期にかけての経済全体での名目貨幣残高の増加率を $\mu_t(>0)$とすると M_t は、

[4]労働所得のない老年期に一括税が課せられないとする仮定は現実性に欠けるものではないと考えられる。また、Bhattacharya and Haslag(2001)は老年期に一括税が課せられる場合、インフレ税を用いることは最適とならないことを示している。

[5]本章では Sachs and Larrain(1993,ch11)での定義に従い、貨幣発行益を$(M_t-M_{t-1})/p_t$とし、インフレ税(inflation tax)を$[(p_t-p_{t-1})/p_t](M_t/p_t)$とする。両者は定常状態であれば一致する。

[6]Tobin(1970)は総需要のうち民間投資が変動する場合に集中して分析を行っているが、政府支出が増加した場合は民間投資が増加した場合より貨幣需要はより大きく増加するとしている。

$$M_t = (1+\mu_t)M_{t-1} \qquad (3\text{-}3)$$

に従い変動する[7]。$M_0(>0)$は第 1 期の老人に与えられ所与である。$\mu_t>0$ であることは g のうちいくらかは貨幣発行益で賄われることを意味し、

$$g>\tau \qquad (3\text{-}4)$$

とならなければならない。

μ_t は政策的に決定される与件でなく内生的に決定される変数であり、(3-2)、(3-3)式より、

$$\mu_t = (g-\tau)/[(M_t/p_t) - g + \tau] \qquad (3\text{-}5)$$

となる[8]。

均衡条件

競争均衡ではすべての個人および企業は価格を所与として最適な行動をとり、各市場は均衡する。第 t 期において資本市場では(2-12)式、財市場では、

$$f(k_t) = c_t^{\,2} + d_t + g \qquad (3\text{-}6)$$

貨幣市場では(2-14)式が成り立つ。

第 t 期から第(t+1)期にかけての貨幣の保有による実質粗収益率 $R_{t+1}{}^m$ は粗デフレ率になるので、(3-3)、(2-14)式を考慮すると、

$$R_{t+1}{}^m = \frac{p_t}{p_{t+1}} = \frac{M_t}{M_{t+1}}\frac{M_{t+1}/p_{t+1}}{M_t/p_t} = \frac{1}{1+\mu_{t+1}}\frac{m_{t+1}}{m_t} \qquad (3\text{-}7)$$

となる。

(2-2)、(3-7)式を考慮すると(2-11)の第 1 式は、

$$\{f'(k_{t+1}) - [1/(1+\mu_{t+1})](m_{t+1}/m_t)\}m_t = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

となる。

以上より均衡状態では、(3-5)式は(2-14)式より、

$$\mu_t = (g-\tau)/(m_t - g + \tau) \qquad (3\text{-}9)$$

となる。これは政府の財政バランスが維持されることを表す。(2-12)式は(3-1)式より、

$$k_{t+1} = w(k_t) - \tau - m_t \qquad (3\text{-}10)$$

となる。これは資本の蓄積経路を表す。貨幣が正の価値を持つ(m>0)ためには

---

[7]本章でのモデルは政府の予算制約式を考慮してインフレ率の内生性を導いているため、物価水準の財政理論(FTPL(Fiscal Theory of the Price Level))と関連したものとなる。ただし、本章のモデルではインフレ率は最終的に名目貨幣残高の変化によりもたらされる。

[8]M_t、μ_t、および p_t の決定に関して、実質貨幣需要 m_t の決定を受け、政府の予算制約$(g-\tau)/(m_t-g+\tau)=(M_t-M_{t-1})/M_{t-1}=\mu_t$((3-3)、(3-5)式および貨幣市場の均衡条件(2-14)式より)から名目貨幣供給量 M_t (t 時点において M_{t-1} は既に決定されている)あるいはその増加率 μ_t が決まり、$m_t=M_t/p_t$ より p_t が調整されると解釈する。

(3-8)式より、

$$f'(k_{t+1}) = [1/(1+\mu_{t+1})](m_{t+1}/m_t) \qquad (3\text{-}11)$$

とならなければならない。これは資本の実質粗収益率が貨幣の実質粗収益率に等しくなければならない裁定条件を表す。

３.２.２.　定常状態

ここでのシステムはμ_t、m_t、k_tに関して(3-9)、(3-10)、(3-11)式で表される。k_tは前期の貯蓄により決まる歴史的事実で状態変数であり、m_tは完全予見のもと自由に決定されるジャンプ変数である(初期値も自由に決まる)。名目貨幣増加率であるμ_tは内生変数となる。

本章では均衡解のうち定常状態に焦点を合わせ検討を行っていく。定常状態(k, m, μ)では(3-9)、(3-10)、(3-11)式より、

$$\mu = [(g-\tau)/(m-g+\tau)] \qquad (3\text{-}12)$$

$$k = w(k) - \tau - m \qquad (3\text{-}13)$$

$$f'(k) = 1/(1+\mu) \qquad (3\text{-}14)$$

となり、(3-12)、(3-14)式よりμを消去すれば、

$$[1-f'(k)]m = g - \tau \qquad (3\text{-}15)$$

となる。(3-13)、(3-15)式よりk>0、m>0となる外部貨幣定常状態(k^{OUT1}, m^{OUT1})の存在について検討を行っていく。

外部貨幣定常状態が存在することを保証するため、第２章と同様、$w(k)$に関して(仮定 4)が成り立つとする。k^*を$f'(k)=1$を満たすkの水準(黄金律)、k^{IN}を(3-13)式において$\tau=0$のとき、$m=0$、$k>0$となる定常状態(内部貨幣定常状態)として、外部貨幣定常状態(k^{OUT1}, m^{OUT1})の存在に関し次の命題が成り立つ[9]。

(命題 3-1)　設定した仮定のもとで、(3-9)、(3-10)、(3-11)式で表される世代重複経済において、以下の条件(3-16)式が満たされれば、(3-4)式を満たすある政府支出g、ある若者への一括税τに対し、外部貨幣定常状態が存在する。

$$k^* < k^{IN} \qquad (3\text{-}16)$$

証明

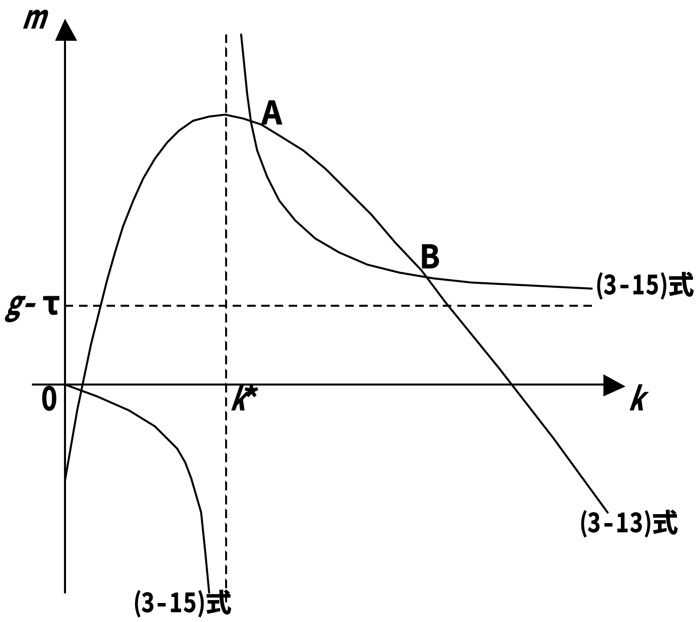
補論 3A 参照

(命題 3-1)を図示すると図 3-1 のようになる(図の導出手順については(命題

[9]外部貨幣定常状態が存在するためのgおよびτの取り得る範囲に関する議論については補論 3A で行っている。

3-1)の証明を参照)[10]。(3-15)式で表される曲線は双曲線となるが、本章では m>0 となる外部貨幣定常状態に関心があるため、以下では m<0 の領域は無視する[11]。図 3-1 から示唆されるように、(命題 3-1)は外部貨幣定常状態の一意性を保証しない。(3-13)式で表される曲線と(3-15)式で表される曲線との間に接点が存在する場合を除き、外部貨幣定常状態が存在すればそれは偶数個存在する。特に(3-15)式で表される曲線が k-m 平面において凸となる場合[12]、２つの曲線が接する場合を除き、図 3-1 のように外部貨幣定常状態が存在すればそれは２つ存在する。

図3-1:外部貨幣定常状態



第２章の標準モデルで検討した通り、名目貨幣増加率μ(定常状態でのインフレ率でもある)を外生的に扱った場合、外部貨幣定常状態が存在すればそれは一意に存在するが、本章でのモデル化のように政府支出 g(および一括税τ)を外生的に扱いμを内生変数とした場合、図 3-1 のようなケースでは２つ存在する。それは、インフレ率と貨幣発行益(インフレ税)との間に Laffer 曲線の性質が存在するためである。図 3-1 の A 点(B 点)は Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局

---

[10]図 3-1 で m>0 において(3-15)式で表される曲線は、Inada 条件が満たされれば、

$$\lim_{k\to\infty} m = g - \tau$$

となるため、m=g-τを漸近線とする。

[11]政府債務を貨幣だけでなくより広い意味で捉えるならば、m<0 のケースは政府が民間部門に対し債権者となるときであり、その場合の分析も意味を持つものとなる。

[12]生産関数が Cobb-Douglas 型であれば、(3-15)式で表される曲線は k-m 平面において凸となる。

面に相当し、(3-12)式から容易に確認できるように、図 3-1 の A 点でのインフレ率は B 点でのインフレ率より低くなる。また、以下で検討するように２つの外部貨幣定常状態はともに収束し得る定常状態であるため、経済の初期状態(資本水準)が同様であっても同様の経済状態に収束するとは限らない。

本章のモデル化では g のうち τ で賄えない不足分(g-τ)を貨幣発行益で賄うと想定しているが、所与の τ のもと g が大きくなり過ぎると外部貨幣定常状態は存在し得ない。図 3-1 において g が大きくなるにつれ、m>0 での(3-15)式で表される曲線が右上方にシフトし(次節参照)、(3-13)式で表される曲線との交点は消滅する。これは Laffer 曲線の性質からも容易に予想できるように、政府が獲得できる貨幣発行益には限界があるためである。

以下では通常想定される山型の Laffer 曲線の形状を前提として、外部貨幣定常状態が２つ存在する場合について検討を行う[13]。

３.２.３.　比較静学(政府支出の拡大による影響)

政府支出 g を拡大させた場合の影響について検討を行う。g の拡大が貨幣発行益によりファイナンスされる場合、それが経済に与える影響は次の命題にまとめられる。

(命題 3-2)　設定した仮定のもとで、(3-9)、(3-10)、(3-11)式で表される世代重複経済において、外部貨幣定常状態が２つ存在すると想定する。政府支出 g を恒常的に貨幣発行益により拡大させた場合、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面にあるとき、新たな外部貨幣定常状態では資本水準 k は増加し(減少し)、インフレ率 μ は上昇する(減少する)。

証明

補論 3B 参照

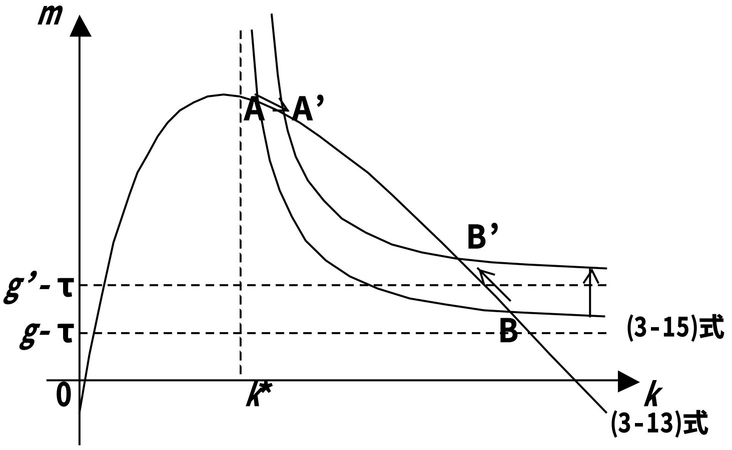
(命題 3-2)を k-m 平面上に図示すれば図 3-2 のようになる。g を g' へ上昇させると、(3-13)式で表される曲線は変化しないが、(3-15)式で表される曲線は上方へシフトする。Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面に位置する外部貨幣定常状態は A 点から A'点(B 点から B'点)へシフトし、k は増加(減少)する。(命題 3-1)での証明の通り、g の増加には限界があり、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の

[13]外部貨幣定常状態が２個より多く存在する場合であっても、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線のいずれの局面(右上がり/右下がり)に位置するかに依存して、以下の比較静学、動学の議論が当てはまる。

右下がりの局面に位置するとき m は増加するが、右上がりの局面に位置するとき m への影響は効果が相異なる代替効果と所得効果のため定かでない。

g の拡大を貨幣発行益によりファイナンスする場合、貨幣発行益が調整される必要があるためインフレ率(名目貨幣増加率)が変化する。貯蓄水準がインフレ率から独立であるため、g の拡大は資本蓄積を表す(3-13)式に影響を与えない。一方、外部貨幣定常状態が A 点(B 点)の Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面に位置するとき、増加した g を賄うに足る貨幣発行益を確保するためにはインフレ率が上昇(低下)しなければならない。よって、貨幣が正の価値を持つための裁定条件((3-14)式)を考慮すると、A 点(B 点)では k が上昇(低下)する。

図3-2:貨幣発行益により*g*を上昇させたときの影響



g の拡大が若者への一括税 τ によりファイナンスされる場合は次の命題にまとめられる。

(命題 3-3)　設定した仮定のもとで、(3-9)、(3-10)、(3-11)式で表される世代重複経済において、外部貨幣定常状態が２つ存在すると想定する。政府支出 g を恒常的に若者への一括税 τ により拡大させた場合、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面にあるとき、新たな外部貨幣定常状態では資本水準 k は増加し(減少し)、インフレ率 μ は上昇する(減少する)。

証明

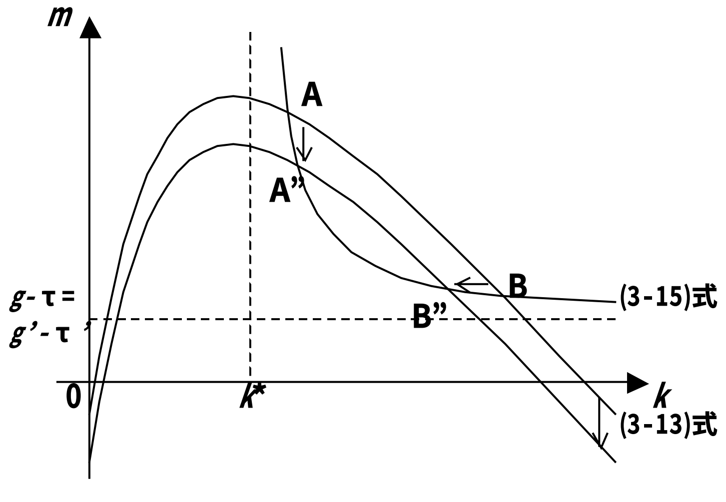
補論 3C 参照

(命題 3-3)を k-m 平面上に図示すれば図 3-3 のようになる。g を g’へ上昇させると同時に τ を τ’に上昇させると、(3-15)式で表される曲線は変化しないが、

(3-13)式で表される曲線は下方へシフトする。外部貨幣定常状態が A 点(B 点)の Laffer 曲線が右上がり(右下がり)の局面に位置する場合、A”点(B”点)へシフトし k は増加(減少)する。また、(命題 3-1)での証明の通り、τ の上昇には限界がある。

g を τ の上昇により拡大させると政府の財政バランス上、貨幣発行益が調整される必要がないため(3-15)式に変化はないが、若者の可処分所得が低下するため貯蓄水準が低下し、k、m ともに低下する圧力が働く。m の低下は貨幣発行益の水準が元の水準に戻るように μ が調整されなければならないことを意味し、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面に位置する場合、μ は上昇(低下)しなければならない。外部貨幣定常状態が A 点の Laffer 曲線の右上がりの局面に位置する場合、μ の上昇に伴い裁定条件から k が上昇し、この効果が貯蓄水準低下に伴う効果を上回るため、A 点では A”点にシフトし k は上昇する。外部貨幣定常状態が B 点の Laffer 曲線が右下がりの局面に位置する場合、μ の低下に伴い裁定条件から k が低下し、この効果と貯蓄水準低下に伴う効果により B 点から B”点にシフトし、k は大きく低下する。

図3-3: τによりgを上昇させたときの影響



以上より、ファイナンスの方法にかかわらず政府支出の増大に伴い、インフレ率と資本水準(生産水準)の間には正の相関関係が観察されることになる。Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察されることを意味し、第２章の標準モデルでの名目貨幣増加率(インフレ率)を外生的にとらえた場合の結果と同様になる。これは(3-14)式の裁定条件が有効に作用しているためである。ただし、本節のモデル化では政府支出の変化を受け、結果として Mundell-Tobin 効果が観

察されているに過ぎない[14]。

３.２.４． 動学

(3-11)式より(3-9)式を考慮してμ_{t+1}を消去すると、

$$m_{t+1} = f'(k_{t+1})m_t + g - \tau \quad (3\text{-}17)$$

となり、動学システムはk_t、m_tに関して(3-10)、(3-17)式で表すことができる。

外部貨幣定常状態の近傍における動学は、次の命題にまとめられる。

(命題 3-4) 設定した仮定のもとで、(3-9)、(3-10)、(3-11)式で表される世代重複経済において、外部貨幣定常状態が２つ存在すると想定する。外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面にあるとき、その定常状態の近傍における動学は、その定常状態に収束する決定的で単調な鞍点経路である(その定常状態に収束する単調ではあるが非決定的な経路である)。

証明

補論 3D 参照

(命題 3-4)を図示すると図 3-4 のようになる。資本蓄積方程式(3-10)式より、

$$k_{t+1} - k_t = w(k_t) - \tau - k_t - m_t \quad (3\text{-}18)$$

であるので、$k_{t+1}=k_t$となる経路(KK 曲線)は(3-18)式より、

$$m_t = w(k_t) - \tau - k_t$$

となる。これは(3-13)式で表される曲線と同様である。(3-18)式から明らかなように、

$$k_{t+1} \geq (<)\, k_t \quad \text{iff} \quad w(k_t) - \tau - k_t - m_t \geq (<) 0$$

であり、KK 曲線の上側(下側)ではkは減少(増加)する。

(3-17)式に(3-10)式を代入することにより、

$$m_{t+1} - m_t = m_t\{f'[w(k_t) - \tau - m_t] - 1\} + g - \tau \quad (3\text{-}19)$$

---

[14] gを一定とし財源の構成を変更した場合の影響も容易に確認することができる。財源のうちτの比率を上昇させた場合､外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の部分に位置すれば､kは減少(増加)しμは低下(上昇)する。τの上昇は貯蓄水準を引き下げる効果を持つ一方、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がりの部分に位置する場合、貨幣発行益への依存度の低下はμを低下させ裁定条件よりkも低下する。この２つの効果によりkは大きく低下する。外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右下がりの部分に位置する場合、μは上昇し裁定条件からkも上昇するため、この効果が貯蓄水準低下による効果を上回るため、kは上昇する。よって、(命題 3-2)、(命題 3-3)と同様、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線のどの局面に位置しようとも、結果として Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察されることになる。

が得られ、$m_{t+1}=m_t$となる経路(MM 曲線)は(3-19)式より、

$$m_t\{1-f'[w(k_t)-\tau-m_t]\}=g-\tau$$

となる。MM 曲線の形状を明確にするには関数をさらに特定化する必要があるが、外部貨幣定常状態における MM 曲線の傾きは$[mf''(k)w'(k)]/[1-f'(k)+mf''(k)]$であり、(仮定 1)より分子の符号は負である。一方、定常状態において(3-15)式の傾きが-1 より小さければ(大きければ)分母の符号は負(正)となる。例えば、図 3-1 において A 点(B 点)で(3-15)式の傾きが-1 より小さければ(大きければ)、そのときの MM 曲線の傾きは正(負)となり、MM 曲線は図 3-4 のようになる。

(3-19)式から明らかなように、

$$m_{t+1}\geq(<)\,m_t \quad \text{iff} \quad m_t\{1-f'[w(k_t)-\tau-m_t]\}\leq(>)g-\tau$$

であり、図 3-4 の MM 曲線の左側(右側)では m は増加（減少）する。

図3-4:動学

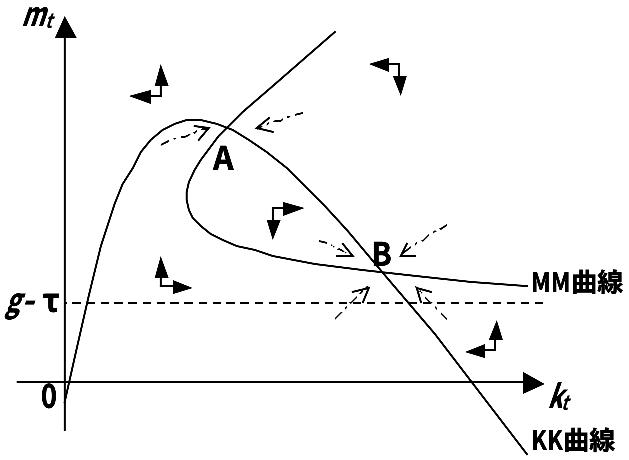


図 3-4 の位相図から示唆されるように、A 点の外部貨幣定常状態に収束する経路は鞍点経路のみである。k は状態変数である一方、m はジャンプ変数で自由に調整されるため、k の初期値(k_1)が与えられればこの経路は実現される。初期状態が鞍点経路より上であれば裁定条件((3-11)式)に従い m は増加しなければならないが、m の増加には限界があり個人は完全予見のもと合理的に行動するため、そのようなことは起こらない。初期状態が鞍点経路より下側の領域では最終的に B 点の外部貨幣定常状態に収束する。B 点での m の水準は財政バランスが保たれるために必要な水準であり、m がその水準より減少し続けることはない(また、初期状態が B 点での m の水準より下方に位置する場合、その m の水準を超えて増加し続けることはない(ただし、A 点に収束する鞍点経路にジャン

プする場合は A 点に収束する))。

２つの外部貨幣定常状態はともに収束し得る定常状態であるため、本節のモデルでは収斂は起こらない。第２章の標準モデルで検討した通り、名目貨幣増加率(インフレ率)を外生的に捉えたモデル化では、外部貨幣定常状態(一意に存在する)に収束する経路は鞍点経路である。本節のモデル化において、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がりの部分に位置する場合(図 3-4 の A 点)は同様の結果となるが、右下がりの部分に位置する場合(図 3-4 の B 点)は非決定的な経路となる。

３.３． 法定準備要件を考慮した場合

３.３.１． モデル

前節では世代重複モデルの構造に依存して貨幣を発生させたため、貨幣の収益率とその代替資産(資本)の収益率が等しくなる必要があった。しかし、貨幣は通常、収益率で劣る資産であり、その想定は現実性に欠けるものである。そこで本節では、貨幣が収益率で劣る資産であるにもかかわらず貨幣が発生し得る環境を想定して検討を行う。キャッシュ・イン・アドバンス等の制約を課し貨幣とその代替資産との間の粗代替性を弱めることで、そのような環境は容易に作り出すことが可能であるが、本節では法定準備要件を導入して検討を行う[15]。

前節と同様、２期間離散形の世代重複経済を想定する(記号の使い方も以下で言及する場合を除き前節と同様)が、以下の点で前節と異なる。

個人

法定準備要件として、個人の保有資産１単位当たり少なくとも$\xi \in (0,1)$の実質貨幣を保有しなければならないとする[16]。よって、(3-1)式を考慮して、

$$m_t \geq [\xi/(1-\xi)]d_t \qquad (3\text{-}20)$$

が成り立たなければならない。第 t 期($t>0$)の個人は $w(k_t)$、$R_{t+1}{}^d$、$R_{t+1}{}^m$ を所与

---

[15]本章でのモデルにおいてキャッシュ・イン・アドバンス制約を活用し貨幣需要を発生させる場合、老年期に消費財の購入の一部を貨幣で行わなければならない等のかなり恣意的な想定が必要となる。前章のように税を貨幣で支払わなければならないとする想定もかなり恣意的なものである。そこで本章のモデルでの想定上、恣意性が比較的少ないと思われる法定準備用件を活用した。この想定は収益率で劣るにもかかわらず貨幣が正の価値を持つ状況を作り出すためのものであり、以降の章においてもその簡便さから法定準備要件を活用している。

[16]個人に法定準備要件が課せられるとする想定はやや恣意的であるが、金融仲介を考慮し金融仲介機関(銀行)に法定準備要件が課せられ、個人が保有可能な資産が金融仲介機関への債権(預金)のみであると想定することも可能であり、そのような想定を置いても以下の分析結果に影響はない。

として、(2-9)、(2-10)、(3-20)式のもと(2-7)式を最大化する。

ρ を(3-20)式に付随するラグランジュ乗数とすると、最大化のための１次条件より、

$$m_t \geq [\xi/(1-\xi)]d_t,\ \rho \geq 0 \quad および \quad \rho\{m_t - [\xi/(1-\xi)]d_t\} = 0$$

となる。$\rho=0$ の場合は $R_{t+1}{}^d = R_{t+1}{}^m$ となることに注意すると、(仮定 3)の条件式と(3-20)式は相補スラック性が成り立ち、次の２つのケースに分けられる。

ケース１:裁定条件が束縛的となる場合

$$m_t \geq [\xi/(1-\xi)]d_t$$

$$R_{t+1}{}^d = R_{t+1}{}^m$$

ケース２: 法定準備要件が束縛的(裁定条件が非束縛的)となる場合

$$m_t = [\xi/(1-\xi)]d_t \tag{3-21}$$

$$R_{t+1}{}^d > R_{t+1}{}^m \tag{3-22}$$

ケース１は前節と同様の状況であるので[17]、以下ではケース２に集中して検討を行う。

(2-12)式を(3-21)式に代入すると、

$$m_t = [\xi/(1-\xi)]k_{t+1} \tag{3-23}$$

となる。(2-2)、(3-7)式を考慮すると(3-22)式は、

$$f'(k_{t+1}) > [1/(1+\mu_{t+1})](m_{t+1}/m_t) \tag{3-24}$$

となる。ケース２でのシステムは μ_t、m_t、k_t に関して(3-9)、(3-10)、(3-23)、(3-24)式で表される。

３.３.２.　定常状態

定常状態(k,m,μ)では、(3-9)式は(3-12)式、(3-10)式は(3-13)式、(3-23)、(3-24)式はそれぞれ、

$$m = [\xi/(1-\xi)]k \tag{3-25}$$

$$f'(k) > 1/(1+\mu) \tag{3-26}$$

---

[17]ただし、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がりの局面に位置する場合のみになるケースがあり、また、ケース１と２が共存しどちらのケースになるかが確定できない場合があり得る(脚注 18 も参照)。

となる。(3-12)、(3-26)式よりμを消去すれば、

$$[1-f'(k)]m < g-\tau \tag{3-27}$$

となる。

外部貨幣定常状態(k^{OUT2}, m^{OUT2})の存在について、次の命題が成り立つ。

(命題 3-5)　設定した仮定のもとで、(3-9)、(3-10)、(3-23)、(3-24)式で表される世代重複経済において、(3-26)式が満たされれば、(3-4)式を満たすある政府支出g、ある若者への一括税τ、および以下の(3-28)式を満たす$\xi \in (0,1)$((仮定 4)の(a)の後半が満たされる場合はすべての$\xi \in (0,1)$)に対し、外部貨幣定常状態が存在する。

$$\lim_{k\to 0}[(1-\xi)w'(k)] = \lim_{k\to 0}[-(1-\xi)kf''(k)] > 1 \tag{3-28}$$

証明

補論 3E 参照

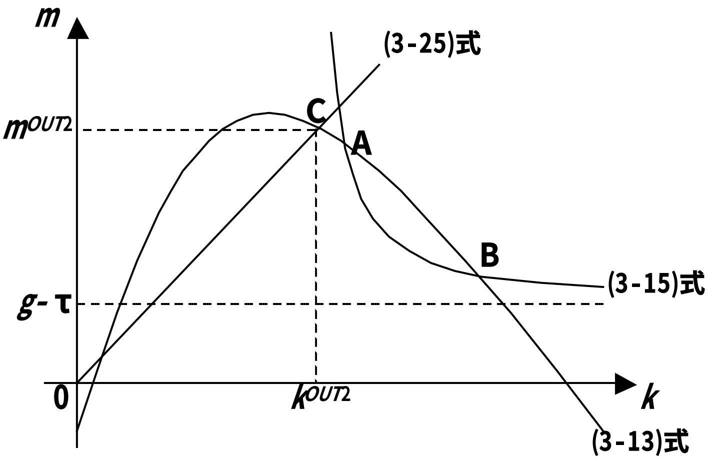
(命題 3-5)を図示すると図 3-5 のようになる。(3-13)式で表される曲線と(3-25)式で表される直線の交点(C 点)が(3-27)式を満たす領域((3-15)式で表される曲線の原点側の領域(ただし$\mu>0$ であるためには $m>g-\tau$ でなければならない))にあれば、それが外部貨幣定常状態となる。図 3-5 では(3-13)式で表される曲線と(3-25)式で表される直線との交点が２つ存在するが、kの水準が低い交点では$\mu>0$ を満たさない可能性があり、また、以下の動学分析で明らかになるようにその交点は不安定なものであるため、安定な外部貨幣定常状態は一意に存在する。以下の分析では kの水準が高い外部貨幣定常状態に集中して検討を行う。

ケース２では裁定条件を非束縛的にし((3-27)式が満たされる)、貨幣の発生根拠を法定準備要件に求めている。ξが小さくなり法定準備要件が緩やかになる((3-25)式で表される直線が原点を軸に時計回りにシフトする)と資本がより多く保有され、図 3-5 では A 点を超えると裁定条件が束縛的になる。よって、ξの変化に伴い体制転換が起こりケース 1 となる可能性がある[18]。一方、ξが大きく

[18]ケース 1 となるには当然、(3-13)式で表される曲線と(3-15)式で表される曲線が $m>0$ において交点(図 3-5 の A,B 点)を持たなければならない。また、図 3-5 で(3-25)式で表される直線がξの低下に伴い原点を軸に時計回りにシフトしA点を超えると(図3-5において(3-25)式の直線がA,Bの間を通る場合)ケース 1 となり、A 点が外部貨幣定常状態となる。さらにξが低下し(3-25)式で表される直線が B 点を超え $m>g-\tau$ の領域にあれば、ケース 1 と 2 が共存することになり、3 つの外部貨幣定常状態(A,B,C 点)のうち経済がどの定常状態に落ち着くかは確定できない。その場合、C 点では kの水準が高く mの水準が低いときであり、(3-12)式から示唆されるように、政府の予算制約を満たすためにはμが高くなければならず、(3-26)式を満たすことが可能となる。一方、A,B 点では C 点に比べ kの水準が低く法定準備要件を満たすことが可能となる。よって、

なり法定準備要件がきつくなる((3-25)式で表される直線が原点を軸に反時計回りにシフトする)と資本保有が低下し、外部貨幣定常状態が存在しなくなる可能性がある。

図3-5:外部貨幣定常状態



３.３.３.　比較静学(政府支出の拡大による影響)

前節と同様に、政府支出 g を拡大させた場合の影響について検討を行う。g の拡大が貨幣発行益によりファイナンスされる場合の経済に与える影響は、次の命題にまとめられる。

(命題 3-6)　設定した仮定のもとで、(3-9)、(3-10)、(3-23)、(3-24)式で表される世代重複経済において、(安定な)外部貨幣定常状態が存在すると想定する。その定常状態において政府支出 g を恒常的に貨幣発行益により拡大させた場合、新たな外部貨幣定常状態では資本水準 k は変化しないが、インフレ率 μ は上昇する。

証明

補論 3F 参照

(命題 3-5)は k-m 平面上、図に変化はない。貨幣発行益による g の変化に対し、法定準備要件(3-25)式は g、μ から独立であるため影響を受けず、前節で検討した通り、資本蓄積を表す(3-13)式も μ から独立であるため影響を受けず、k、m の水準はともに変化しない。課税ベースである m が一定のもと g の上昇に伴

A,B,C 点いずれも収束可能な定常状態となる。

い必要となる貨幣発行益を確保するには、μ が上昇しなければならない((3-12)式参照)。よって、貨幣発行益による g の拡大は、μ を上昇させるものの経済活動の水準に影響を与えない。

この結果は消費を老年期のみとし貯蓄がインフレ率から独立になるようにモデル設定を行ったことが一因であるが、貯蓄水準がインフレ率の変化から影響を受ける場合、資本蓄積は影響を受ける。例えば、効用が若年期、老年期の消費(c_t^1, c_{t+1}^2)に依存し効用関数が、

$u(c_t^1, c_{t+1}^2)=(1-\beta)\ln c_t^1+\beta\ln c_{t+1}^2$, with $\beta\in(0,1)$

で表され、老年期に一括税が課せられインフレ率の上昇が貯蓄水準を引き上げる効果を持つ場合、μ、k はともに上昇し、結果としてインフレ率と資本水準の間の相関関係は正となり、Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察されることになる。

若者への一括税 τ により g を拡大させた場合の影響は次の命題にまとめられる。

(命題 3-7)　設定した仮定のもとで、(3-9)、(3-10)、(3-23)、(3-24)式で表される世代重複経済において、(安定な)外部貨幣定常状態が存在すると仮定する。その定常状態において政府支出 g を恒常的に若者への一括税 τ により拡大させた場合、新たな外部貨幣定常状態では資本水準 k は減少し、インフレ率 μ は上昇する。

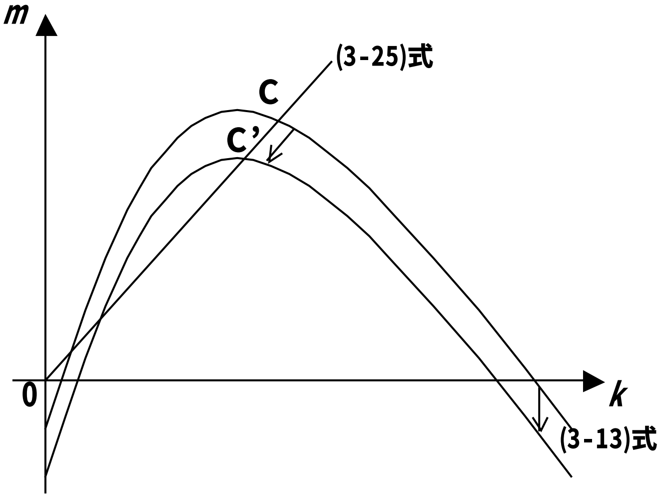
証明

補論 3G 参照

(命題 3-7)を k-m 平面上に図示すれば図 3-6 のようになる。τ の上昇により g を上昇させると、(3-25)式で表される曲線は変化しないが、(3-13)式で表される曲線は下方へシフトする。外部貨幣定常状態は C 点から C'点へシフトし k は減少する。

g を τ の上昇により拡大させると若者の可処分所得が低下するため貯蓄水準が低下し、k、m ともに低下する圧力が働く。貨幣発行益の水準を維持するためには、m の低下に伴い μ が上昇しなければならない。よって、k は低下する一方、μ は上昇する。これは、結果としてインフレ率と資本水準の間に負の相関関係が観察されることになり、逆 Mundell-Tobin 効果と同様の状況が生じる。

図3-6: τによりgを上昇させたときの影響



容易に確認できるように、名目貨幣増加率(インフレ率)μを所与としgを内生変数として扱った場合、μの変化は資本蓄積方程式(3-13)式にも法定準備要件(3-25)式にも影響を与えないため、資本蓄積に影響を与えない[19]。しかし、本節でのモデル設定(ケース２)のように g を所与としμを内生変数として扱った場合、観察されるインフレ率と資本水準の間の相関関係は一様でない。それは前述の通り、政府支出増大のためのファイナンスの方法が資本蓄積に異なった影響を与えるためである[20]。

３.３.４． 動学

外部貨幣定常状態の近傍における動学は次の命題にまとめられる。

(命題 3-8) 設定した仮定のもとで、(3-9)、(3-10)、(3-23)、(3-24)式で表される世代重複経済において、安定な外部貨幣定常状態が存在する場合、その定常状態の近傍における動学は、その定常状態に収束する単調で決定的な経路である。

証明

補論 3H 参照

[19]ただし、前述のようにμの上昇により貯蓄水準を上昇させる場合、Mundell-Tobin 効果が働くことになる。

[20]容易に確認できるように、gを一定としτの依存度を高めると kは低下し、μの影響は明確にならないが多くの場合低下する。τの上昇は貯蓄水準を引き下げるため kは低下し、貨幣発行益への依存度の低下は貯蓄水準低下により mが大きく低下しない限りμを低下させる。結果として、Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察されることになる。

(命題 3-8)より本節のモデルにおいて、収束し得る外部貨幣定常状態では振動せず決定的な経路となる。また容易に確認できるように、名目貨幣増加率を外生的に捉えた場合であっても、外部貨幣定常状態の近傍における動学は(命題 3-8)と同様になる。

３.４． 結論

本章では Diamond 型の世代重複モデルを用い、貨幣量(名目貨幣増加率)およびインフレ率が受動的に決定される場合について検討を行った。政府支出(財政政策)を与件としたうえで本章では、従来より広く行われてきた想定と異なり、名目貨幣増加率(長期的にインフレ率)を所与とせず受動的に決定される内生変数として扱った。名目貨幣増加率を所与とする場合は政府支出の節度が保たれ貨幣量が中央銀行により厳格に管理されている経済に当てはまると考えられるが、本章のモデル設定は財政当局が主導的立場にあり中央銀行が追従的であるような経済に当てはまると考えられる。本章での結果は、名目貨幣増加率(インフレ率)を所与とする従来より広く行われてきたモデル化での結果と異なるものであった。

第３.２節では、世代重複モデルの構造に依存して貨幣を発生させ検討を行った。名目貨幣増加率を所与とした従来より広く行われてきたモデル化では、外部貨幣定常状態が存在すればそれは一意に存在し、その定常状態での近傍における動学は決定的で単調な鞍点経路である。一方、本章でのモデル化では名目貨幣増加率(インフレ率)と貨幣発行益(インフレ税)の間に Laffer 曲線の性質が生じるため、外部貨幣定常状態が存在すればそれは複数(通常想定されるケースでは２つ)存在し、その定常状態での近傍における動学は Laffer 曲線の右上がりに位置する場合、決定的で単調な鞍点経路であるが、右下がりに位置する場合、単調ではあるが非決定的なものとなった。政府支出を拡大させた場合、ファイナンスの方法(貨幣発行益/若者への一括税)および外部貨幣定常状態が Laffer 曲線のどの局面(右上がり/右下がり)に位置するかにかかわらず、インフレ率と資本水準との相関関係は正となった。これは結果として Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察されることを意味した。この結果は、名目貨幣増加率を所与とした場合と同様であり、貨幣が正の価値を持つための裁定条件が有効に作用しているためであった。

第３.３節では、世代重複モデルの構造に依存せず裁定条件を非束縛的にし、貨幣が収益率で支配されるにもかかわらず正の価値を持つ場合について検討を行った。本章ではその方法として法定準備要件を活用した。その要件が束縛的

となる場合、安定な外部貨幣定常状態が存在すればそれは一意に存在した。政府支出を拡大させた場合、ファイナンスの方法により政府支出の変化が貯蓄水準に与える影響が異なったため、結果として観察されるインフレ率と資本水準の相関関係は異なる結果となった。貨幣発行益によりファイナンスされる場合、２者の相関関係は無相関となる一方、若者への一括税によりファイナンスされる場合、負となり逆 Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察されることになった。ただし、第３.３.３節で言及した通り前者の場合、本章でのモデルを少し変更することでその相関関係は正となり得る。外部貨幣定常状態の近傍における動学は、単調で決定的なものであった。

インフレ率と経済成長に関する実証研究は盛んに行われているが、それら２者の間に観察される相関関係は必ずしも因果関係がインフレから経済成長へとなっていることを意味しない。インフレ率が内生変数となるような場合、因果関係をそのように捉えることはミスリーディングであり、第３.３節でのケースのように、結果として生じる相関関係が異なることもあり得る。

第１章で言及した通り、少なくとも高インフレの状態であれば逆 Mundell-Tobin 効果が働くとされているが、従来からのモデル化のように名目貨幣増加率を所与と捉えた場合は Mundell-Tobin 効果が働くためこの問題に言及することができない。名目貨幣増加率を内生的に捉えた場合であっても、第３.２節でのモデル化のように資本と貨幣の間の裁定条件が有効に作用する場合、結果として Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察されることになる。しかし、第３.３節でのモデル化のように裁定条件が非束縛的となり財政支出拡大に伴う財源調達が資本蓄積に影響を与える場合、逆 Mundell-Tobin 効果と同様の状況が生じた(本章では若者への一括税でファイナンスされる場合)。第３.３節でのモデル化では必ずしもインフレ率と資本水準との相関関係が負になるわけではないが、インフレ率から資本蓄積という本来の因果関係を変え両変数を内生化することで、結果として逆 Mundell-Tobin 効果と同様の状況を見出すことが可能であることを示している。

本章ではインフレ率を内生変数とするため、政府支出(財政政策)に注目しそれを与件として扱った。これはあくまで１つの試みであり、インフレ率を内生変数とするための方法はその他さまざまなものが考えられることは言うまでもない。また、政府支出自体は実物経済に何も影響を与えないと仮定したが、その支出に伴い外部効果が生じる場合、本章での結果は異なるものとなることが予想される[21]。最後に、本章ではインフレ率を内生変数として捉えることの正当性

[21]特に、政府支出により経済全体に対し外部効果が強く働き資本に関し収穫非逓減となる場合、第２章で示した通り逆 Mundell-Tobin 効果が発生し得る。

について、実証的観点からは触れてこなかった[22]。本章でのモデル化が正当なものであるためには、実証的背景をより詳細に検討する必要があると考えられる。

補論 3A: (命題 3-1)の証明

ここでは、外部貨幣定常状態(m^{OUT1},k^{OUT1})が存在するための(3-4)式を満たす政府支出 g、若者への一括税 τ の取り得る範囲についても検討する。まず、$k^{IN}>0$ が一意に存在することをみる。k^{IN} は(3-13)式より、

$$k^{IN}=w\left(k^{IN}\right)$$

を満たさなければならない。図 3-A1 に示されているように(仮定 1)、(仮定 2)、(仮定 4)および $f(k)>w(k)$に注意すれば、$w(k)$で表される曲線は $k>0$ において 45°線と 1 度だけ交わる。よって、k^{IN} は一意に存在する。

(3-13)式において $\tau=0$ のとき m が最大となる k ($\in(0,k^{IN})$)は、一次条件より $w'(k)-1=0$ を満たさなければならない。そのときの $k(=w'^{(-1)}(1))$を $k^{\tau0,\max}$ とする。$\tau(>0)$が、

$$\tau<w\left(k^{\tau0,\max}\right)-k^{\tau0,\max} \qquad (3\text{-a}1)$$

を満たせば、(3-13)式において $m>0$ となる $k>0$ が存在する。(3-a1)式を満たす τ を所与とし(3-13)式において $m=0$、$k>0$ となる最大の k($k=w(k)-\tau$ を満たす $k>0$ は図 3-A1 のように２つ存在する場合がある)を $k^{\tau,IN}(<k^{IN})$とする。

(3-13)式で表される曲線は(仮定 1)、(仮定 4)より k-m 平面上、強い意味で凹である。一方、(3-15)式で表される曲線では、傾きが$(g-\tau)f''(k)/[1-f'(k)]^2$ となり(仮定 1)より負であり、また、

$$k>k^*\Rightarrow m>0$$

$$k<k^*\Rightarrow m<0$$

$$\lim_{k\downarrow k^*}m(k)=\infty,\ \lim_{k\uparrow k^*}m(k)=-\infty$$

となるため、(3-15)式で表される曲線は図 3-1 のように、$k=k^*$を漸近線として双曲線になる。g が減少していき τ に近付くにつれ、$m>0$ での(3-15)式で表される曲線は $k=k^*$、$m=0$ で表される L 字型に近付く。$m>0$ となるためには $k>k^*$を満たさなければならず、$k^*<k^{\tau,IN}$ であればその時の τ を所与とし少なくとも(3-4)式を満たす g が限りなく τ に近ければ、(3-13)式で表される曲線と(3-15)式で表される曲線は $k>0$、$m>0$ において交点を持ち、外部貨幣定常状態が存在する。

所与の τ のもと g が取り得る範囲を求めるため、(3-13)、(3-15)式より m を消

[22]ただし、Barro(1997)はインフレから経済成長への因果関係を検証するため、インフレに対し有意であり外生変数として重要な操作変数(instrumental variable)を探し出すことを行っている。操作変数として、中央銀行の独立性、インフレのラグ、旧植民地宗主国について検討を行っているが、総じて因果関係はインフレから経済成長にあると結論付けている(旧植民地宗主国に関してはインフレの操作変数になり得るとしている)。

去し $G(k)$を、

$$G(k) \equiv g = [1 - f'(k)][w(k) - \tau - k] + \tau \tag{3-a2}$$

と定義すれば、g の取り得る最大値 g^{max} は、

$$\max_{k^* < k < k^{\tau, IN}} G(k) = g^{\max}$$

である。(3-a2)式から g^{max} では 1 次条件より、

$$w'(k) - 1 = (g - \tau) f''(k) / [1 - f'(k)]^2$$

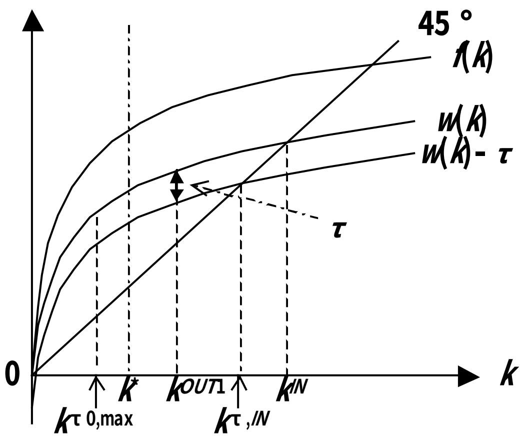
を満たさなければならず、これは(3-13)式で表される曲線と(3-15)式で表される曲線が接する場合である。よって、所与の τ に対し g が、

$$\tau < g \leq g^{max} \tag{3-a3}$$

であれば、$\mu > 0$ を満たす外部貨幣定常状態が存在する。

以上より、(3-16)式が満たされれば、(3-4)式を満たす g、τ を適当に選ぶことにより外部貨幣定常状態が存在する。そのためには τ が $k^* < k^{\tau, IN}$ を満たし、その τ を所与として g は(3-a3)式を満たさなければならない。　□

図3-A1:定常状態



補論 3B: (命題 3-2)の証明

外部貨幣定常状態(k, m, μ)において、(3-12)、(3-13)、(3-14)式をそれぞれ全微分し整理すると、

$$MA \begin{pmatrix} dk \\ dm \\ d\mu \end{pmatrix} = VA1 \cdot dg + VA2 \cdot d\tau \tag{3-a4}$$

$$MA \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & (g-\tau)/\mu^2 \\ 1-w'(k) & 1 & 0 \\ f''(k) & 0 & 1/(1+\mu)^2 \end{pmatrix}, \quad VA1 \equiv \begin{pmatrix} (1+\mu)/\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad VA2 \equiv \begin{pmatrix} -(1+\mu)/\mu \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\det MA = \frac{1}{(1+\mu)^2}\left\{[w'(k)-1]-\left[\frac{mf''(k)}{1-f'(k)}\right]\right\}$$

となり、{・}内の１つ目の[・]は k-m 平面上において(3-13)式で表される曲線の傾き、２つ目の[・]は(3-15)式で表される曲線の傾きを表す。外部貨幣定常状態が２つ存在するとき、その定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面に位置すれば、(3-15)式で表される曲線は(3-13)式で表される曲線を上から交差(下から交差)するため(図 3-1 参照)、detMA>0(<0)となる。

gを恒常的に貨幣発行益により拡大させる場合は(3-a4)式より $d\tau$ =0 と置いて、

$dk/dg = \{1/[\mu(1+\mu)]\}/\det MA$

となるので、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面に位置すれば、dk/dg>0(<0)となる。同様にして、

$d\mu/dg = -\{[(1+\mu)/\mu]f''(k)\}/\det MA$

となるので、(仮定 1)を考慮すると外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面にあれば、$d\mu/dg$ >0(<0)となる。　□

補論 3C: (命題 3-3)の証明

ここでは､政府支出 gの増加が若者への一括税 τ の増加により賄われるため、(3-a4)式において dg=$d\tau$ と置くことにより、

$$dk/dg = \left[1/(1+\mu)^2\right]/\det MA$$

が得られる。外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面にあれば、dk/dg>0(<0)となる。同様にして、

$d\mu/dg = -f''(k)/\det MA$

が得られ、(仮定 1)を考慮すると外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面にあれば、$d\mu/dg$ >0(<0)となる。　□

補論 3D: (命題 3-4)の証明

(3-10)式を用いて(3-17)式より k_{t+1} を消去すると、

$m_{t+1} = f'\{[w(k_t)-\tau]-m_t\}m_t + g - \tau$ (3-a5)

となり、動学システムは m_t、k_t に関して(3-10)、(3-a5)式で表される。(k,m)を

定常状態とし、(3-10)、(3-a5)式を全微分し整理するとヤコビ行列 J は、

$$J=\begin{pmatrix} dk_{t+1}/dk_t & dk_{t+1}/dm_t \\ dm_{t+1}/dk_t & dm_{t+1}/dm_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w'(k) & -1 \\ mw'(k)f''(k) & f'(k)-mf''(k) \end{pmatrix}$$

となる。(仮定 1)を考慮すると、

$\det J = w'(k)f'(k)>0$

$\mathrm{tr} J = w'(k)+f'(k)-mf''(k)>0$

となる。$p(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{tr}J\lambda+\det J$ を特性方程式(λ は特性根)とすると、

$$p(1)=1-\mathrm{tr}J+\det J=\left[1-f'(k)\right]\left\{\left[\frac{mf''(k)}{1-f'(k)}\right]-\left[w'(k)-1\right]\right\}$$

となる。$p(1)$の$[1-f'(k)]$は$[f'(k^*)-f'(k)]$であるので外部貨幣定常状態では正となる。{・}内の符号は(命題 3-2)での証明と同様に、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の局面にあるとき負(正)となるため、$p(1)<0(>0)$である。

Δを判別式とし(仮定 1)を考慮すると、

$$\begin{aligned}\Delta&=\mathrm{tr}J^2-4\det J=\left[w'(k)+f'(k)-mf''(k)\right]^2-4w'(k)f'(k)\\&=\left[w'(k)\right]^2+\left[mf''(k)\right]^2+\left[f'(k)\right]^2-2mw'(k)f''(k)+2mf'(k)f''(k)-2w'(k)f'(k)-4mf'(k)f''(k)\\&=\left[w'(k)-mf''(k)-f'(k)\right]^2-4mf'(k)f''(k)>0\end{aligned}$$

となる。

以上より、２つの特性根をλ_1、λ_2とすると、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がりの部分にあるとき、

$0<\lambda_1<1<\lambda_2$

となり、この定常状態は鞍点となる。外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右下がりの部分にあるときは、(3-13)式で表される曲線の傾きが負となる場合であるので(図 3-1 参照)、

$w'(k)<1$

となり、$f'(k)<1$ であることを考慮すると、

$0<\det J=w'(k)f'(k)<1$

となる。よって、この定常状態では、

$\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$

となり沈点となる。　□

補論 3E: (命題 3-5)の証明

(3-13)、(3-25)式より m を消去すれば、

$$k=(1-\xi)\left[w(k)-\tau\right] \tag{3-a6}$$

となり、定常状態は(3-26)式のもと k に関して(3-a6)式に支配される。(3-a6)式の RHS は(仮定 1)、(仮定 4)より k に関して単調に増加し、強い意味で凹関数である。(3-a6)式において $\tau=0$ のとき、所与の $\xi\in(0,1)$に対し(3-28)式が満たされれば((仮定 4)の(a)の後半が満たされる場合はすべての $\xi\in(0,1)$に対し)、(仮定 2)、$f(k)>(1-\xi)w(k)$に注意すると $k>0$ となる解が一意に存在する(図 A2 参照)。その解を k^{INB} とする。

所与の ξ のもと $k\in(0,k^{INB})$において $\tau=0$ のとき(3-a6)式の(RHS-LHS)が最大となる k は、一次条件より$(1-\xi)w'(k)-1=0$ を満たさなければならない。そのときの $k(=w'^{(-1)}(1/(1-\xi)))$を $k^{\tau 0,\max B}$ とすると τ (>0)が、

$$\tau < w\left(k^{\tau 0,\max B}\right) - k^{\tau 0,\max B} / \left(1-\xi\right) \qquad (3\text{-a7})$$

を満たせば、(3-a6)式において $k(=k^{OUT2})>0$ となる解が存在する。k が決まれば m は(3-25)式より決まる。

(3-12)式より外部貨幣定常状態において g は、

$$g = \tau + \left[\mu/\left(1+\mu\right)\right]m$$

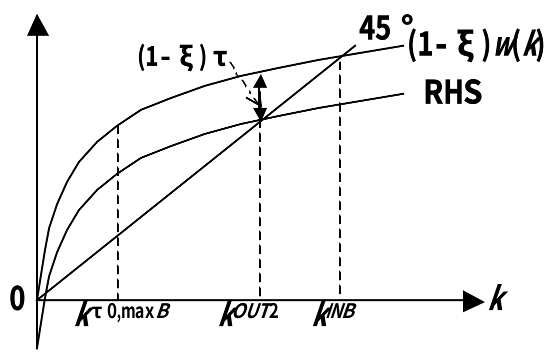
を満たさなければならないが、τ、m を所与とし $\mu>0$ となる有限な解が得られるためには、

$$\tau < g < \tau + m \qquad (3\text{-a8})$$

を満たさなければならない。

以上より、(3-28)式を満たす所与の $\xi\in(0,1)$(ただし(仮定 4)の(a)の後半が満たされる場合はすべての $\xi\in(0,1)$)のもと、(3-a7)式を満たす τ、その τ を所与とし(3-a8)式を満たす g に対し外部貨幣定常状態が存在する。 □

図3-A2:定常状態



補論 3F: (命題 3-6)の証明

外部貨幣定常状態(k,m,μ)において、(3-12)、(3-13)、(3-25)式をそれぞれ全微分し整理すると、

$$MB\begin{pmatrix} dk \\ dm \\ d\mu \end{pmatrix} = VB1\cdot dg + VB2\cdot d\tau \qquad (3\text{-a}9)$$

$$MB \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & (g-\tau)/\mu^2 \\ 1-w'(k) & 1 & 0 \\ \xi/(1-\xi) & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad VB1 \equiv \begin{pmatrix} (1+\mu)/\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad VB2 \equiv \begin{pmatrix} -(1+\mu)/\mu \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\det MB = \left[(g-\tau)/\mu^2\right]\left\{\left[w'(k)-1\right]-\left[\xi/(1-\xi)\right]\right\}$$

となり、{・}内の１つ目の[・]は *k-m* 平面上において(3-13)式で表される曲線の傾き、２つ目の[・]は(3-25)式で表される直線の傾きを表す。(安定な)外部貨幣定常状態(外部貨幣定常状態が２つ存在する場合は *k* の水準の高い定常状態)では、(3-25)式で表される直線が(3-13)式で表される曲線を下から交差するため(図 3-5 参照)、det*MB*<0 となる。

*g*を恒常的に貨幣発行益により拡大させるときは(3-a9)式より $d\tau=0$ と置いて、

$$dk/dg = 0$$

となる。同様にして、

$$d\mu/dg = \left\langle\left[(1+\mu)/\mu\right]\left\{\left[w'(k)-1\right]-\left[\xi/(1-\xi)\right]\right\}\right\rangle/\det MB$$

となり、(安定な)外部貨幣定常状態では分子の{・}内の符号は負となるため、$d\mu/dg>0$ となる。　□

補論 3G: (命題 3-7)の証明

(3-a9)式において $dg=d\tau$ と置くことにより、

$$dk/dg = \left[(g-\tau)/\mu^2\right]/\det MB$$

が得られ、$dk/dg<0$ となる。同様にして、

$$d\mu/dg = -\left[\xi/(1-\xi)\right]/\det MB$$

が得られ、$d\mu/dg>0$ となる。　□

補論 3H: (命題 3-8)の証明

(3-10)、(3-23)式より m_t を消去し整理すると、

$$k_{t+1} = (1-\xi)\left[w(k_t)-\tau\right] \qquad (3\text{-a}10)$$

となり、ここでの動学システムは１階の１変数 *k* で表すことができる。(3-a10)式より定常状態 *k* では、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k}=(1-\xi)w'(k)$$

となる。これは(命題 3-5)の証明での(3-a6)式の RHS の傾きである。(命題 3-5)の証明での図 A2 のように外部貨幣定常状態が２つ存在し得る(外部貨幣定常状態が１つの場合は、以下の k の水準が高い定常状態と同様)。k の水準が高い定常状態では、図 A2 から明らかなように、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k}\in(0,1)$$

となり、k の水準が低い定常状態では、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k}>1$$

となる。よって、k の水準が高い外部貨幣定常状態のみ安定であり、その定常状態の近傍における動学は単調である。(3-10)、(3-23)式より、

$$m_t=\xi[w(k_t)-\tau]$$

となり、状態変数である k_t の決定を受け m_t も決定されるため、安定な外部貨幣定常状態の近傍における動学は決定的となる。　　□

補論 3I: 厚生的観点からの検討

本文中では外部貨幣定常状態における政策効果として実質政府支出 g の変化が経済に与える影響について検討しているが、この補論では外部貨幣定常状態における個人の効用水準を検討することで、厚生面から g の変化が与える影響について考察する。

標準的 Diamond モデルの場合

個人の効用水準は老年期の消費水準で表すことができる。(3-6)式より(2-12)、(2-14)、(3-2)、(3-3)、(3-10)式を考慮すると、

$$c_t^{\,2}=f(k_t)-k_{t+1}-g=f(k_t)-k_{t+1}-\tau-[\mu_t/(1+\mu_t)][w(k_t)-k_{t+1}-\tau] \tag{3-a11}$$

となる。定常状態では(3-14)式を活用すると、

$$c^2=f(k)-[1-f'(k)]w(k)-f'(k)k-f'(k)\tau \tag{3-a12}$$

となる。

g の拡大が貨幣発行益によりファイナンスされる場合、外部貨幣定常状態において g の変化が効用水準に与える影響は(3-a12)式より、

$$dc^2/dg=\{-[1-f'(k)]w'(k)+f''(k)[w(k)-k-\tau]\}dk/dg \tag{3-a13}$$

となる。(仮定 1)、$1>f'(k)$、$w(k)$-k-$\tau=m>0$ であるので、(3-a13)式の RHS の{・}内の符号は外部貨幣定常状態において負となる。(命題 3-2)より外部貨幣定常状

態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の部分に位置しているとき $dk/dg>(<)0$ であるので $dc^2/dg<(>)0$ となる。

よって、g の拡大が貨幣発行益によりファイナンスされる場合、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の部分に位置しているとき g を上昇させると個人の効用水準は悪化(改善)する。外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がりの部分に位置しているとき g の拡大に伴い動学的により非効率な状態となることに加え、政府の取り分(インフレ税による税収)が増加する。外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右下がりの部分に位置しているとき g が上昇するものの μ の低下に伴い動学的により効率的な状態となる。

g の拡大が若者への一括税 τ によりファイナンスされる場合、外部貨幣定常状態において g の変化が効用水準に与える影響は(3-a12)式より、

$$dc^2/dg=\{-[1-f'(k)]w'(k)+f''(k)[w(k)-k-\tau]\}dk/dg-f'(k) \tag{3-a14}$$

となる。(命題 3-3)より外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がり(右下がり)の部分に位置しているとき $dk/dg>(<)0$ である。前述の通り、(3-a14)式の第１項の{・}内の符号は外部貨幣定常状態において負となり、第２項($-f'(k)$)の符号は負である。

よって、外部貨幣定常状態が Laffer 曲線の右上がりの部分に位置しているときは前のケースと同様、$dc^2/dg<0$ となり個人の効用水準は悪化する。ただし、右下がりの部分に位置しているときの dc^2/dg の符号は不明確となる。τ の上昇は若者の可処分所得を減少させるため、前のケースと異なり、個人の効用水準を悪化させる可能性がある。

法定準備要件を考慮した場合

定常状態では(3-a11)式より、

$$c^2=f(k)-k-g \tag{3-a15}$$

である。g の拡大が貨幣発行益によりファイナンスされる場合、外部貨幣定常状態において g の変化が効用水準に与える影響は(3-a15)式より、

$$dc^2/dg=[f'(k)-1]dk/dg-1 \tag{3-a16}$$

となる。(命題 3-5)より $dk/dg=0$ であるので $dc^2/dg<0$ となる。

よって、g の拡大が貨幣発行益によりファイナンスされる場合、個人の効用水準は悪化する。k が一定のため若者の所得に変化はなくポートフォリオにも変化はないが、実質貨幣残高が一定である一方、μ が上昇しインフレ税が増加するため、(3-a15)式から示唆されるように個人の消費に回される財は減少する。

g の拡大が若者への一括税 τ によりファイナンスされる場合、外部貨幣定常状態において g の変化が効用水準に与える影響は(命題 3-7)より $dk/dg<0$ であるので、(3-a16)式より動学的に効率的な状態($f'(k)>1$)であれば前のケースと同様、

$dc^2/dg<0$ となり個人の効用水準は悪化する。一方、動学的に非効率な状態($f'(k)<1$)であれば dc^2/dg の符号は不明確となる。k の低下により動学的非効率性が改善されるため、個人の効用水準が改善される可能性が残る。