第４章　インフレーションの内生化Ⅱ：公開市場操作を通した分析*

４.１．はじめに

本章では流動性リスクが含まれる Diamond 型の世代重複モデルを用い、中央銀行による国債市場での公開市場操作を通した貨幣政策の効果について考察する。

多くの貨幣的成長モデルではモデル上の取り扱いの利便性から貨幣供給が非現実的な想定(例えば、貨幣保有者への利息や補助金として新たな貨幣が供給される)のもと行われている。本章ではそのようなモデル化と異なり、貨幣供給ルートを明確にしたうえでモデル分析を行う。現実的に主な貨幣供給ルートは中央銀行による市中銀行等への貸出と公開市場操作である。中央銀行による貸出は量的制約が課せられ柔軟な貨幣供給手段でないことが多いため、本章では貨幣供給ルートとして中央銀行による公開市場操作のみ考慮し検討を行っていく。また、ここでのモデル化では第３章と関連しインフレーションが外生的に決まるものではなく、公開市場操作により内生的に決定される。

公開市場操作を考慮するため本章では国債をモデル内に導入する。国債に正の価値を持たせる方法として多くの文献では、生産的資本への投資による収益率が国債の収益率と等しいという裁定条件が想定されている[1]。しかし、国債は資本への投資に比べ流動性・安全性が高く貨幣的性格を持つ。そこで本章では、国債が資本への投資と粗代替関係にある場合と、貨幣と粗代替関係にある場合の２つのケースに分けて検討する。そのためには貨幣が資本と区別され、貨幣が収益率で劣る資産であるにもかかわらず貨幣需要がモデル内から発生する必要がある。本章では Schreft and Smith(1997,1998)に基づき[2]、流動性リスクを考慮した世代重複モデルを用いる。そこでは経済が空間的に隔離され、経済間のコミュニケーションに制限が課せられているため、持ち運び可能な流動性資産として貨幣に対する需要が内生的に発生する[3]。

このようなモデル化において本章では、公開市場操作による拡張的貨幣政策の効果に注目する。景気浮揚策としての拡張的貨幣政策がしばしば注目を集め

---

*本章は久米(2004b)に基づく。

[1]例えば、Schreft and Smith(1997,1998)参照。

[2]Schreft and Smith(1997,1998)のモデルは Champ, Smith, and Williamson(1996)のモデルをベースとして生産を考慮したモデルである。

[3]経済が空間的に隔離され経済間のコミュニケーションに制限が課せられていることにより流動性資産(貨幣)に対する需要が内生的に発生するというアイデアは Townsend(1980,1987)に基づく。

るが、その政策の効果を通してインフレ率および資本蓄積について検討を行う。また、第３章と同様、インフレ率と資本水準が内生的に決定されるため、それら２者の相関関係について検討することで、結果として逆 Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察される可能性について考察する。本章では拡張的貨幣政策の定義として Wallace(1984)に基づき国債・貨幣比率の低下を考えるが、名目ベースで必ずしも貨幣増加率が上昇することを意味しない。そこで、名目ベースでの拡張的貨幣政策の効果についても検討を加える。

本章では次の構成に従って検討を行っていく。第４.２節では、本章で扱うモデルの設定を行う。貨幣が含まれる Diamond 型の世代重複モデルを用いるが前述の通り、経済が空間的に隔離され、経済間のコミュニケーションが制限されていることにより、流動性需要が内生的に発生すると想定する。第４.３節では国債が正の価値を持つ根拠として、国債が資本と粗代替関係にあり両者の収益率が等しいと想定して分析する。第４.４節では国債が貨幣と同様に流動性リスクが存在しない資産として分析し、第４.３節での結果と比較検討する。第４.５節では本章のまとめを行う。厚生的観点からの分析は補論で行い、個人の効用水準への政策効果について考察する。

４.２．モデル環境

第２章で検討した標準的な Diamond モデルと同様、２期間離散形の世代重複経済を想定する(記号の使い方も以下で言及する場合を除き同様)。ただし、本章では Schreft and Smith(1997,1998)をベースとして、経済は空間的に隔離された同一の２つの地域からなり、２つの地域間のコミュニケーションは制限されているとする。このため、以下で検討していくように流動性資産に対する需要が内生的に発生し、Diamond and Dybvig(1983)と関連して、不確実な流動性需要に対し銀行が保険機能の役割を担うことになる。Schreft and Smith(1997,1998)では国債を収益性資産とし流動性を認めていないが、本章ではそのような場合に加え国債が収益性は低いが貨幣と同様に流動性資産とみなされる場合についても検討を行う。

第 t 世代は全体(２つの地域を合わせた合計)で大きさを１に正規化した連続体であるとする。若者はどちらかの地域に割り振られ、各地域には常に同数の若者が存在すると仮定する。以下でみていくように、個人は老年期の消費のために貯蓄をすべて銀行へ預金する。銀行と企業は各地域において完全競争のもと個人とは別に与えられたものとし、市場へ自由に参入できるとする。

生産

企業の生産活動は第2章での標準モデルと同様であり、生産関数fに関して(仮定 1)、(仮定 2)が成り立つとする。企業は競争的に行動するため生産要素市場では(2-1)、(2-2)式が成り立つ。$w(k)$に関して(仮定 4)の(b)が成り立つとする。

個人

個人は老年期のみ消費を行い第 t 期の個人の効用は老年期の消費 (c_{t+1}^2)に依存するとし、解析的取り扱いを容易なものとするため、効用関数 $u(c_{t+1}^2)$を次のように対数型に特定化する[4]。

$$u(c_{t+1}^2)=\ln c_{t+1}^2 \tag{4-1}$$

第1期の老人は期初に保有する資産の粗収益を基に消費を行うとする。

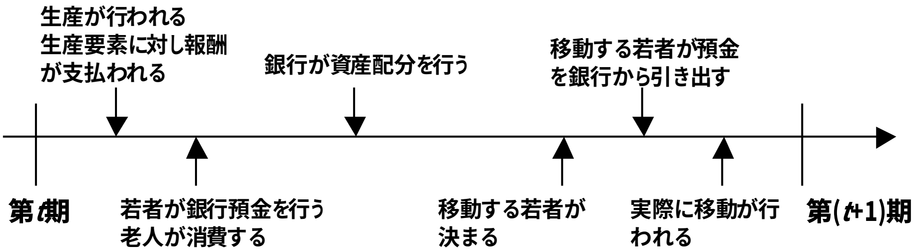
個人は他地域の個人とコミュニケーションをとることができないが、同一地域内の個人とは可能であるとする。貨幣は他地域へ持ち運び可能な資産(流動性資産)であるとする。本章では国債にも流動性を認め分析を行うため、国債も持ち運び可能であるとする。ただし、第 t 期末に他地域へ持ち運ばれた国債(実質ベース)は第(t+1)期において1単位当たり r_{t+1} 単位の財と取引されるとする。r_{t+1} は国債が流動性資産である場合の実質粗収益率と解釈することができる。資本に関して、投資の懐妊期間が長いか資本の清算あるいは運送コストがかかり過ぎると想定することにより、資本を流動性資産へ変換することあるいは他地域へ持ち運ぶことは不可能であるとする。

各期の期初において、各地域内でアウタルキー的に財、労働、資産の取引が行われ、その後(各期末に)、$\pi\in(0,1)$の割合の若者が無作為に選ばれ他方の地域に移動するものとする。πは期間を通し一定でありすべての個人に知られているとする。移動しない個人は預金の預け先である銀行とコミュニケーションをとることができ、銀行預金を基に小切手、クレジット・カード等により老年期に財を購入することが可能であるため、必ずしも流動性資産を必要としない。移動する個人は老年期に預金の預け先である銀行とコミュニケーションをとることができずクレジットで財を購入することが不可能であるため、老年期の消費のために流動性資産を保有する必要がある。

以上より、主な経済活動のタイミングをまとめると図 4-1 のようになる[5]。

[4]これまでの章でのモデル環境と異なり、ここではリスクが存在し効用関数を対数型にし危険回避的とする。この想定により以下で明らかなように、資産配分を決定付けることが可能となる。
[5]図 4-1 の作成に際し、特に Schreft and Smith(1997,1998,2002)を参考にしている。

図4-1:主な経済活動のタイミング



政府

第３章と同様、財政当局は経済全体で各期において若者１人当たり実質で g の支出を行い、若者に一括税 τ を課すとする。本章では g、τ を与件として捉え、各期において実質のプライマリー財政赤字$(g-\tau)$($(g-\tau)$が負であればプライマリー財政黒字)が発生する。財政当局は１期満期の利付国債を発行すると仮定する。第 t 期の名目ベースでの若者１人当たりの発行残高を B_t とし、実質発行残高は B_t/p_t である。B_0 は第１期の老人と中央銀行に与えられているとする。第 t 期から第$(t+1)$期にかけての国債の名目粗利子率を $I_{t+1}{}^b$ とすると、実質粗収益率 $R_{t+1}{}^b$ は、

$$R_{t+1}{}^b \equiv (p_t/p_{t+1})I_{t+1}{}^b$$

となる。国債の名目利息が非負である状況を想定するため、

$$R_{t+1}{}^b \geq p_t/p_{t+1}$$

となる。b_t を全体での若者１人当たりの実質での国債需要量とする。国債は民間部門あるいは中央銀行により保有され、実質ベースでの若者１人当たりの保有額をそれぞれ $b_t{}^p$、$b_t{}^c$ とすると、

$$b_t \equiv b_t{}^p + b_t{}^c$$

である。

中央銀行は無コストで貨幣を発行できるとし、第 t 期の名目ベースでの若者１人当たりの発行残高を M_t(実質ベースでは M_t/p_t)とする。M_t は第３章と同様、(3-3)式に従い変動すると想定する。中央銀行は保有国債を売却することにより M_t を減少させることが可能であるため、$\mu_t<0$(ただし、$\mu_t>-1$)となる状況も想定可能である。M_0 は第１期の老人に与えられているとする。

Schreft and Smith(2002)でのモデル化と同様に次の想定を行う。中央銀行は

バランスシート上の制約として、

$$M_t/p_t \le b_t^c \qquad (4\text{-}2)$$

を満たさなければならないとする。(4-2)式は貨幣を発行するには同額以上の資産(国債)を保有しなければならないことを意味する[6]。中央銀行による国債の保有額は国債の発行総額以下であるため、

$$0 \le b_t^c \le B_t/p_t$$

となる。中央銀行が保有する国債から発生する利息は財政当局に払戻されるとする[7]。第$(t+1)$期の名目ベースでのその払戻額を T_{t+1}(実質ベースでは T_{t+1}/p_{t+1})とすると、

$$T_{t+1}/p_{t+1} \equiv \left(R_{t+1}{}^b - p_t/p_{t+1}\right)b_t^c \qquad (4\text{-}3)$$

となる。よって、財政バランスは次のように表される。

$$g-\tau = B_{t+1}/p_{t+1} - R_{t+1}{}^b\left(B_t/p_t\right) + T_{t+1}/p_{t+1} \qquad (4\text{-}4)$$

ただし、第1期には、

$$g-\tau = B_1/p_1 - \left(I_1{}^b/p_1\right)B_0 + \left(I_1{}^b - 1\right)\left(B_0{}^c/p_1\right) \qquad (4\text{-}4')$$

となり、$B_0{}^c$ は第1期初に中央銀行が保有する名目国債残高であり、$B_0{}^c$ および $I_1{}^b$ は所与であるとする。

資産

上述の通り、資本への投資、貨幣、国債の3つの資産が存在する。本章の想定では、資産を収益性資産と移動する個人が携帯する流動性資産に分類することができる。資本への投資は収益性資産、貨幣は流動性資産であり、流動性プレミアムを考慮し(仮定 3”)を設ける。

貨幣は流動性資産であるが本章の想定では国債にも流動性を認めるため、貨幣が正の価値を持つために次の仮定が必要となる。

(仮定 7)

$$p_t/p_{t+1} \ge r_{t+1}$$

---

[6]例えば、日本銀行が紙幣(日本銀行券)を発行するには、発行額以上の保証物件を保有しなければならないと法的に定められている。

[7]例えば、日本銀行は国債利息等の収益から紙幣発行費(本章では紙幣の発行にコストはかからないとしている)等の諸経費を差し引いた剰余金からさらに各種積立金、配当金を差し引いた残額を国庫に納付している。

国債が価値を持つためには収益性資産あるいは流動性資産として需要されなければならない。本章では以下での議論の簡単化のため、次の仮定を設ける。

(仮定 8)

次の２式が成り立ち、２式の間には相補スラック性が成り立つ。

$$R_{t+1}{}^{d} \geq R_{t+1}{}^{b}, \quad p_t / p_{t+1} \geq r_{t+1}$$

(仮定 8)は国債が収益性資産あるいは流動性資産のいずれかであることを表す。また、国債の空売りは認められていないとする[8]。

以上より、本章での経済は次の２つのケースに分類することができる。

ケース１:国債が収益性資産となる場合

$$R_{t+1}{}^{d} = R_{t+1}{}^{b} > p_t / p_{t+1} > r_{t+1}$$

ケース２:国債が流動性資産となる場合

$$R_{t+1}{}^{d} > R_{t+1}{}^{b} \geq p_t / p_{t+1} = r_{t+1}$$

資産は収益性資産あるいは流動性資産として需要される。各資産需要において最も収益率の高い資産が選択されるため、資産の間には粗代替関係が存在する。ケース１では国債が収益性資産として資本への投資と粗代替関係にあり、ケース２では流動性資産として貨幣と粗代替関係にある。

銀行

個人が他地域へ移動する確率 π は、個人レベルでは確率変数であるが経済全体としては確定的であるので、大数の法則により銀行は保険機能の役割を担うことができる。若者は第 t 期に可処分所得($w(k_t)-\tau$)をすべて銀行に預金し、移動することになった若者は預金を引出す。銀行は集めた預金を基に資本への投資、貨幣あるいは国債の保有を行う。銀行の設立は自由であり、銀行は各資産の収益率を所与として競争的に振る舞うとする。第 t 期初に預けた預金に対し第

[8]もし国債の空売りを認めるならば、裁定取引を排除するため $R_{t+1}{}^{d} \leq R_{t+1}{}^{b}$ の仮定が必要となる。しかし、この仮定を認めると以下でのケース２は起こり得ない。本章では国債が流動性資産とみなされる場合についても検討を行うことを目的としているため、敢えて国債の空売りは認めないと想定している。

t 期末に移動する個人(預金者)は $d_{t+1}{}^m$、移動しない個人は $d_{t+1}{}^n$ の実質粗収益率を第(t+1)期初に実現するものとする[9]。

銀行には次の制約が課せられる。

$$m_t + b_t{}^p + d_t \leq w(k_t) - \tau \qquad (4\text{-}5)$$

$$\left[\pi d_{t+1}{}^m + (1-\pi) d_{t+1}{}^n\right]\left[w(k_t) - \tau\right] \leq (p_t / p_{t+1}) m_t + R_{t+1}{}^b b_t{}^p + R_{t+1}{}^d d_t \qquad (4\text{-}6)$$

$$\pi d_{t+1}{}^m \left[w(k_t) - \tau\right] \leq (p_t / p_{t+1}) m_t + r_{t+1} b_t{}^p \qquad (4\text{-}7)$$

m_t、d_t はそれぞれ銀行による若者１人当たりの実質貨幣需要、資本への投資額である[10]。(4-5)式は銀行の資産が負債(預金)を上回らないことを表し、(4-6)式は預金者への払戻額が資産の粗収益により賄われることを表す[11]。(4-7)式は移動する個人のために十分な流動性資産が準備されていなければならないことを表す。非負制約として、

$$m_t \geq 0, \quad b_t{}^p \geq 0, \quad d_t \geq 0 \qquad (4\text{-}8)$$

が課せられる[12]。

預金市場において銀行は Nash 競争者であるとし、他の銀行が提示する預金利率を所与として、自らの預金利率をアナウンスする。預金者を獲得するための銀行間の競争により、第 t 期において銀行は各資産の実質粗収益率、$w(k_t)$を所与として、(4-5)、(4-6)、(4-7)、(4-8)式の制約のもと、預金者(個人)の期待効用

$$\pi \ln\left\{d_{t+1}{}^m \left[w(k_t) - \tau\right]\right\} + (1-\pi)\ln\left\{d_{t+1}{}^n \left[w(k_t) - \tau\right]\right\} \qquad (4\text{-}9)$$

を最大化する[13]。各ケース別の効用最大化については次の通りである。

ケース１

銀行は、(4-6)、(4-7)式より、

$$\pi d_{t+1}{}^m \left[w(k_t) - \tau\right] = (p_t / p_{t+1}) m_t$$

---

[9]移動する個人は第 t 期末に預金を引出すため、$d_{t+1}{}^m$ はその後第(t+1)期初の消費財購入時に実現している実質粗収益率である。

[10]第２章での標準モデルにおいて m_t、d_t はそれぞれ個人による若者１人当たりの実質貨幣需要、資本への投資額を表していたが、ここでは銀行による変数である。

[11]貨幣は第 t 期から第(t+1)期にかけてデフレ率に相当する実質収益率を生むため p_t/ p_{t+1} を乗じている。

[12]$b_t{}^p \geq 0$ は前述の通り、国債の空売りを認めていないことに対応する。

[13]Schreft and Smith(2002)と同様に、銀行を若者による結託(coalition)と解釈し、その銀行が個人の期待効用を最大化すると想定することも可能である。

$$(1-\pi)d_{t+1}{}^{n}\left[w(k_t)-\tau\right]=R_{t+1}{}^{b}b_t{}^{p}+R_{t+1}{}^{d}d_t$$

および(4-5)、(4-8)式((4-5)式は等号で成立)の制約のもと、各資産の実質粗収益率、$w(k_t)$を所与として(4-9)式を最大化する。その結果、

$$m_t=\pi\left[w(k_t)-\tau\right] \tag{4-10}$$

が得られ、これは準備率($m_t/[w(k_t)-\tau]$)がπで一定であることを表す。(4-10)式が満たされれば銀行は移動する個人に対し必要な流動性を提供しつつ個人の期待効用を最大化することが可能となる。

ケース２

銀行は、(4-6)、(4-7)式より、

$$\pi d_{t+1}{}^{m}\left[w(k_t)-\tau\right]=\left(p_t/p_{t+1}\right)m_t+r_{t+1}b_t{}^{p}$$

$$(1-\pi)d_{t+1}{}^{n}\left[w(k_t)-\tau\right]=R_{t+1}{}^{d}d_t$$

および(4-5)、(4-8)式((4-5)式は等号で成立)の制約のもと、各資産の実質粗収益率、$w(k_t)$を所与として(4-9)式を最大化する。その結果、

$$m_t+b_t{}^{p}=\pi\left[w(k_t)-\tau\right] \tag{4-10'}$$

が得られる。ここでも準備率はπで一定であるが、国債も流動性資産とみなされている。

均衡条件

競争均衡では価格を所与として各市場は均衡する。第 t 期において資本市場では(2-12)式、財市場では(3-6)式、国債市場では、

$$b_t{}^{p}+b_t{}^{c}\equiv b_t=B_t/p_t \tag{4-11}$$

となる。中央銀行は国債市場での公開市場操作によってのみ国債を取得し貨幣を供給するため(4-2)式は等号で成立する。よって、貨幣市場では、

$$m_t=M_t/p_t=b_t{}^{c} \tag{4-12}$$

となる[14]。

第 t 期から第(t+1)期にかけての貨幣の実質粗収益率は(3-7)式で表される。(4-5)式(等号で成立)は(2-12)、(4-11)、(4-12)式を考慮すると、

$$k_{t+1}=w(k_t)-\tau-b_t \tag{4-13}$$

---

[14]第 t 期初についても $M_0=B_0{}^{c}$ であるとする。

となり、これは資本蓄積を表す。ケース２の(4-10')式は(4-11)、(4-12)式を考慮すると、

$$b_t = \pi\left[w(k_t) - \tau\right] \tag{4-10''}$$

となる。

政府の予算制約(4-4)式はケース１の場合、(2-2)、(4-3)、(4-11)、(4-12)、(3-7)式を考慮し整理すると、

$$g - \tau = b_{t+1} - f'(k_{t+1})b_t + \left[f'(k_{t+1}) - \frac{1}{1+\mu_{t+1}}\frac{m_{t+1}}{m_t}\right]m_t \tag{4-14}$$

となる。同様にケース２の場合、

$$g - \tau = b_{t+1} - R_{t+1}{}^{b} b_t + \left[R_{t+1}{}^{b} - \frac{1}{1+\mu_{t+1}}\frac{m_{t+1}}{m_t}\right]m_t \tag{4-14'}$$

となる。

Wallace(1984)に従い中央銀行は公開市場操作により民間が保有する国債と貨幣の比率 $\theta_t (\equiv (b_t^p / m_t) \in (0,\infty))$を調整し、期間を通し θ_t を一定($\theta_t = \theta$)に保つとする[15,16]。(4-11)、(4-12)式より、

$$b_t = (1+\theta)m_t \tag{4-15}$$

となる。

(仮定 3'')は(2-2)、(3-7)式より、

$$f'(k_{t+1}) > p_t / p_{t+1} = \left[1/(1+\mu_{t+1})\right](m_{t+1}/m_t) \tag{4-16}$$

と表される。

以下では均衡状態のうち定常状態に焦点を絞り各ケース別に検討を行っていく。

４.３． ケース１:国債が収益性資産とみなされる場合

４.３.１． 定常状態

ケース１でのシステムは k_t、m_t、b_t、μ_t に関し(4-10)、(4-13)、(4-14)、(4-15)、(4-16)式で表される。定常状態(k,m,b,μ)において(4-10)、(4-13)、(4-14)、(4-15)、(4-16)式はそれぞれ、

---

[15]本章では国債・貨幣比率を $B_t/M_t=b_t/m_t$ でなく、中央銀行が民間保有の国債、貨幣の構成比を変更するという観点から b_t^p/m_t を用いている。

[16] $\theta=0(b_t^p=0)$であれば$(g-\tau)$のプライマリー財政赤字が貨幣化されることを意味し、第３章で行われたモデル設定と同様になる。

$$m = \pi[w(k) - \tau] \tag{4-17}$$

$$k = w(k) - \tau - b \tag{4-18}$$

$$g - \tau = [1 - f'(k)]b + \left[f'(k) - \frac{1}{1+\mu}\right]m \tag{4-19}$$

$$b = (1+\theta)m \tag{4-20}$$

$$f'(k) > 1/(1+\mu) \tag{4-21}$$

となる。k>0、b>0(b>0 であれば(4-20)式より m>0 でもある)となる外部貨幣定常状態の存在に関し次の命題が成り立つ。

(命題 4-1)　設定した仮定のもとで、(4-10)、(4-13)、(4-14)、(4-15)、(4-16)式で表される世代重複経済において、以下の条件(4-22)式が満たされれば、ある政府支出 g、ある若者への一括税 τ の組合せに対し、外部貨幣定常状態が存在する。

$1 > \pi(1+\theta)$　かつ

$$\lim_{k\to 0} w'(k) = \lim_{k\to 0}[-kf''(k)] > \frac{1}{1-\pi(1+\theta)} \quad \text{あるいは} \quad w(0)>0 \tag{4-22}$$

証明

補論 4A 参照

(命題 4-1)を k-b 平面上に図示すると図 4-2 のようになる。(4-17)、(4-20)式より、

$$b = \pi(1+\theta)[w(k) - \tau] \tag{4-23}$$

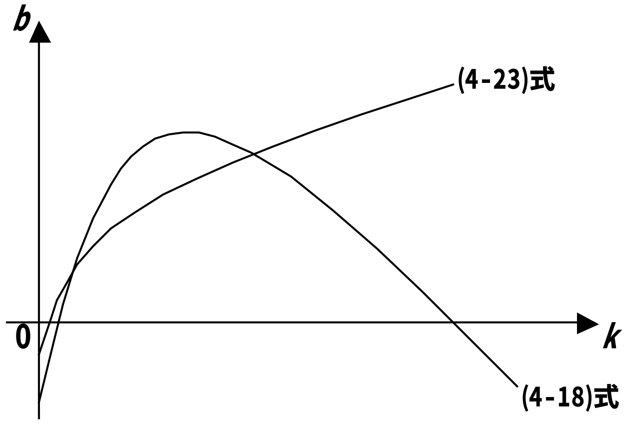
が得られ、(仮定 1)、(仮定 4)の(b)、(4-22)式より(4-18)、(4-23)式で表される曲線は図 4-2 のようになる。b>0 での２つの曲線の交点が外部貨幣定常状態となるが、図 4-2 のようにその定常状態は２つ存在する場合がある。その場合、k の水準が低い定常状態では以下の動学分析で明らかなように不安定となる。よって、収束し得る外部貨幣定常状態は一意に存在する。以下の政策効果については安定な外部貨幣定常状態についてのみ検討を行う。

(4-22)式の２行目は代替弾力性が１より大きい CES 型の生産関数であれば満たされ、生産関数が Cobb-Douglas 型の場合、$(1+\theta)\pi$ が限りなく１に近過ぎない程度に θ あるいは π が小さければ満たされる。(4-22)式の１行目についても θ あるいは π が十分小さければ満たされる。市場に供給される貨幣量が小さ過ぎる、あるいは個人が他地域へ移動するリスクが高過ぎると、必要な流動性(貨幣)需要が満たされず外部貨幣定常状態は存在し得ない。

(命題 4-1)の証明の通り τ の大きさには限界があり，τ が大き過ぎると貯蓄水準が小さくなり必要な貨幣需要は満たされない。g の取り得る範囲にも制限があ

る。(4-21)式が満たされるためにはμ(定常状態でのインフレ率でもある)が十分大きくなる必要があるが、その場合、貨幣発行による利鞘((4-19)式の RHS 第２項)が増加するため財政バランス上、g が十分大きくなる必要がある。一方、μの上昇に伴う貨幣発行による利鞘の拡大には限界があるため、gが大きくなり過ぎると財政バランスが満たされなくなる。

図4-2:外部貨幣定常状態



４.３.２.　比較静学(公開市場操作による貨幣政策の効果)

　ここでは中央銀行が公開市場操作により民間の国債・貨幣比率θを変動させた場合の影響について検討する。θを上昇させ緊縮的貨幣政策を行ったときの経済に与える影響は次の命題にまとめられる。

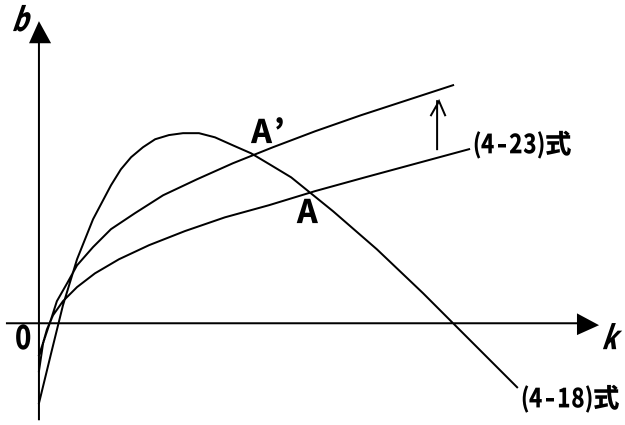
(命題 4-2)　設定した仮定のもとで、(4-10)、(4-13)、(4-14)、(4-15)、(4-16)式で表される世代重複経済において、安定な外部貨幣定常状態が存在すると想定する。その外部貨幣定常状態において民間の国債・貨幣比率θを上昇させた場合、新たな外部貨幣定常状態では資本水準 k は低下、実質貨幣残高 m は低下、実質国債発行残高 b は $w'(k)<(>)1$ であれば増加(減少)、インフレ率μの変化は定かでない。

証明
　補論 4B 参照

　(命題 4-2)を k-b 平面上に図示すれば図 4-3 のようになる。θを上昇させると(4-18)式で表される曲線は変化しないが、(4-23)式で表される曲線は b>0 におい

て上方へシフトし、外部貨幣定常状態は A 点から A'点へ移動する。θ を上昇させると民間の国債保有 b^p を増加させる圧力が働き、国債と資本への投資が競合関係にあることからクラウディング・アウトにより資本水準 k が低下する。(4-17)式より貯蓄の一定割合の流動性資産 m が必要となるが、k が低下し貯蓄水準が低下するため m も低下する。$b(=m+b^p)$は k が低下するため銀行のポートフォリオ上 b が上昇する圧力(代替効果)が働く。$w'(k)<1$ となる場合は所得水準低下による効果(所得効果)は小さく代替効果が強いため b は上昇する。$w'(k)>1$ となる場合は所得が大きく低下し b を低下させる効果が強いため、この所得効果が代替効果を上回り b は低下する[17]。

図4-3: θの上昇による影響



インフレ率(名目貨幣増加率) μ への影響に関して、政府の予算制約式(4-19)式を全微分すると、

$$[1-f'(k)]db - bf''(k)dk + \left[f'(k) - \frac{1}{1+\mu}\right]dm + mf''(k)dk + \frac{m}{(1+\mu)^2}d\mu = 0 \qquad (4\text{-}24)$$

が得られる。(4-19)式はプライマリー財政赤字($g-\tau$)が$[1-f'(k)]$を税率とする国債からの税収と、$[f'(k)-1/(1+\mu)]$を税率とする貨幣からの税収によりファイナンスされていると解釈することができる。(4-24)式の LHS の第 1 項は θ の変化を受けた国債の税ベース効果、第 2 項は国債の税率効果 第 3 項は貨幣の税ベース効果、第 4 項は μ を一定とした場合の貨幣の税率効果を表す[18]。

---

[17] k-b 平面において $w'(k)<(>)1$ となるケースは(4-18)式で表される曲線の傾きが負(正)となるときである。図 4-3 から示唆されるように(安定な)外部貨幣定常状態において $w'(k)>1$ となる程度に所得効果が強くなることはあまり生じないと考えられ、よって θ の上昇により多くの場合、b は上昇すると考えられる。

[18] 税ベース効果、税率効果に分けた分析手法は Espinosa-Vega and Russell(1998)を参考にして

θを上昇させた場合、(4-24)式 LHS の第３項の符号は(4-21)式に注意すると負、第２項と第４項の合計値の符号は(仮定 1)、$b>m$ であることに注意すれば負となる。第１項の符号に関して、$w'(k)<1$ かつ Sargent and Wallace(1981)での仮定と同様に国債の実質収益率が人口成長率を上回る、すなわち $f'(k)>1$ であれば、第１項の符号は負となる。この場合、$d\mu/d\theta>0$ となり緊縮的貨幣政策(θの上昇)にもかかわらずインフレ率が上昇するという Sargent and Wallace(1981)で示された Unpleasant Monetarist Arithmetic と同様の状況になる。ただし、ここでのモデル化において Unpleasant Monetarist Arithmetic の状況になるためには $f'(k)>1$ という仮定は必ずしも必要でなく、国債の税ベース効果があまり大きくなければそのような状況になり得る。θの上昇により m は低下し、政府の予算制約(4-19)式から明らかなように b からの税収があまり大きく変化しなければ財政バランス上、m への税率$[f'(k)-1/(1+\mu)]$が上昇しなければならず、その結果μが上昇する。

一般的直感からは拡張的貨幣政策(θの低下)により資本水準 k は上昇し経済活動の水準も上昇すると考えられる。本章と同様に空間的に隔離されコミュニケーションが制限されたモデルを用いた Schreft and Smith(1998)では、外部貨幣定常状態が２つ存在し k が高く名目利子率が低い定常状態でのみθの低下により k が上昇する[19]。一方、本章のモデル化では収束し得る外部貨幣定常状態が存在すればθの低下により必ず k が上昇し、一般的直感と合致する。景気浮揚策[20]として拡張的貨幣政策がしばしば注目されるが、本章のモデル化においてθの低下は景気浮揚策として有効なものとなる。

θの調整は国債と貨幣の比率の調整であり、名目ベースで貨幣増加率が上昇するとは限らない。θの低下により実質貨幣残高 m は上昇し、緩やかな条件のもと名目貨幣増加率であるμが低下するため、名目ベースでの貨幣増加率は低下し得る。そこで次に名目ベースでの拡張的貨幣政策の効果について検討する。中央銀行が公開市場操作により名目ベースで貨幣増加率を調節する場合、μは

いる。

[19]Schreft and Smith(1998)では資本水準 k と名目利子率 I^b の動きに注目して分析が行われ、正確には外部貨幣定常状態が存在すればそれは２個とは限らずそれより多く存在する可能性がある。k が最も高い(I^b が最も低い)外部貨幣定常状態を含めそこから奇数番目の定常状態においてθの低下により k が上昇する。そこで外部貨幣定常状態が複数存在し得る理由として効用関数を CRRA 型に特定化し相対的危険回避度を１より大きい場合に限定しているため、準備率が I^b の増加関数になることが関係している。I^b が高いと準備率が高く k が押し下げられるため $f'(k)$ が高くなり、I^b が高いとインフレ率も高くなるため $I^b=f'(k)\times$(1+インフレ率)の裁定条件が成り立つ。I^b が低いと準備率が低く k が押し上げられるため $f'(k)$が低くインフレ率も低くなるため裁定条件が維持される。よって、外部貨幣定常状態が２つ以上存在し得る(詳細については Schreft and Smith(1998,sec.Ⅳ)参照)。

[20]本章では景気の浮揚あるいは拡大を単に資本水準の上昇すなわち経済活動の水準の上昇として捉えている。

与件となり θ は内生変数となる。(4-14)、(4-15)、(4-16)式はそれぞれ、

$$g-\tau=b_{t+1}-f'(k_{t+1})b_t+\left[f'(k_{t+1})-\frac{1}{1+\mu}\frac{m_{t+1}}{m_t}\right]m_t \tag{4-25}$$

$$b_t=(1+\theta_t)m_t \tag{4-26}$$

$$f'(k_{t+1})>[1/(1+\mu)](m_{t+1}/m_t) \tag{4-27}$$

となる。(命題 4-2)より次の系が導かれる。

(系)　設定した仮定のもとで、(4-10)、(4-13)、(4-25)、(4-26)、(4-27)式で表される世代重複経済において、安定な外部貨幣定常状態が存在すると想定する。その外部貨幣定常状態において名目貨幣増加率 μ を上昇させた場合、民間の国債・貨幣比率 θ が上昇(下降)すれば新たな外部貨幣定常状態では資本水準 k は低下(上昇)する。

前述の通り緩やかな条件のもと $d\mu/d\theta>0$ となることから、名目ベースでの拡張的貨幣政策は k を低下させ景気対策に有効でない可能性が高い。

中央銀行による公開市場操作の結果、μ あるいは θ のいずれを操作する場合であっても長期的に k と μ の相関関係は負となる可能性が高く逆 Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察されることになる。よって、逆 Mundell-Tobin 効果となることが示された多くの実証研究の結果と整合性の取れたものとなる。ただし、μ を操作する場合は因果関係がインフレ率から資本蓄積への流れになっているが、θ を操作する場合はその変化を受け結果として逆 Mundell-Tobin 効果が観察されているに過ぎない。この結果は第３章での結果と同様、インフレ率と資本水準がともに内生変数であり表面的に逆 Mundell-Tobin 効果が観察される可能性があることを示唆している。

４.３.３.　動学

外部貨幣定常状態の近傍における動学は次の命題にまとめられる。

(命題 4-3)　設定した仮定のもとで、(4-10)、(4-13)、(4-14)、(4-15)、(4-16)式で表される世代重複経済において、安定な外部貨幣定常状態が存在すると想定する。その定常状態の近傍における動学は、その定常状態に収束する単調で決定的な経路である。

証明

補論 4C 参照

(命題 4-3)より本節のモデルにおいて、収束し得る外部貨幣定常状態では振動せず決定的な経路となる。状態変数で初期値が所与である k が決まれば貯蓄水準が決定し、流動性需要は貯蓄水準の一定割合であるので m が決まる。b は(4-15)式より m と固定的な関係にあるので k が決まれば b も決まる。μ は政府の予算制約(4-14)式を満たすように内生的に決定される。(μ を与件とする場合(中央銀行が名目ベースで貨幣増加率を調整する場合)の動学に関する議論は補論 4G 参照)

４.４． ケース２:国債が流動性資産とみなされる場合

４.４.１． 定常状態

ケース２でのシステムは k_t、m_t、b_t、μ_t に関して(4-10")、(4-13)、(4-14')、(4-15)、(4-16)式で表される。簡単化のため $R_{t+1}{}^b$ は与件で期間を通して R^b で一定であるとし、

$$f'(k_{t+1}) > R^b$$

が満たされるとする。政府の予算制約(4-14')式は、

$$g - \tau = b_{t+1} - R^b b_t + \left[R^b - \frac{1}{1+\mu_{t+1}} \frac{m_{t+1}}{m_t} \right] m_t \qquad \text{(4-14")}$$

となる。定常状態(k,m,b,μ)において(4-13)式は(4-18)式、(4-15)式は(4-20)式、(4-16)式は(4-21)式、(4-10")、(4-14")式はそれぞれ、

$$b = \pi[w(k) - \tau] \qquad \text{(4-17')}$$

$$g - \tau = (1 - R^b)b + \left(R^b - \frac{1}{1+\mu} \right) m \qquad \text{(4-19')}$$

となる。$k>0$、$b>0$ となる外部貨幣定常状態の存在に関し次の命題が成り立つ。

(命題 4-4) 設定した仮定のもとで、(4-10")、(4-13)、(4-14")、(4-15)、(4-16)式で表される世代重複経済において、以下の条件(4-28)式が満たされれば、ある政府支出 g、ある若者への一括税 τ の組合せに対し、外部貨幣定常状態が存在する。

$$\lim_{k \to 0} w'(k) = \lim_{k \to 0} [-kf''(k)] > \frac{1}{1-\pi} \quad \text{あるいは} \quad w(0) > 0 \qquad \text{(4-28)}$$

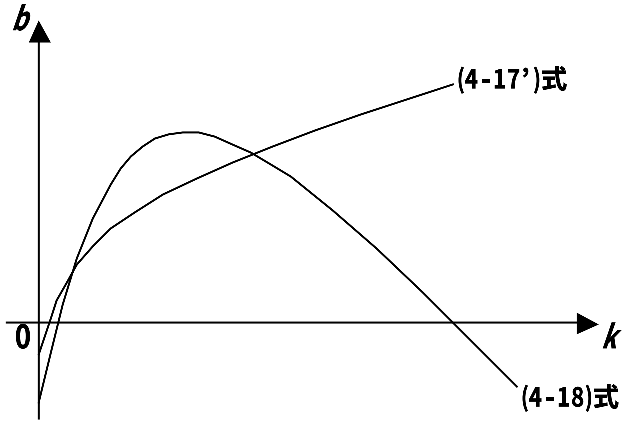
証明

補論 4D 参照

(命題 4-4)を k-b 平面上に図示すると図 4-4 のようになる。b>0 における２つの曲線の交点が外部貨幣定常状態となるが、図 4-4 のようにその定常状態は２つ存在する場合がある。その場合、k の水準が低い定常状態では以下の動学分析で明らかなように不安定であり、収束し得る外部貨幣定常状態が一意に存在することは前節の場合と同様である。以下の政策効果については安定な外部貨幣定常状態についてのみ検討を行う。

(4-28)式は代替弾力性が 1 より大きい CES 型の生産関数であれば満たされ、生産関数が Cobb-Douglas 型の場合、π が限りなく 1 に近過ぎなければ満たされる。ケース 1 の(4-22)式と比べれば緩やかな条件となるが、ケース２では流動性資産として貨幣に加え国債も認められ、流動性需要が満たされ易いためである。またケース 1 と同様、τ の大きさには限界があり、g の取り得る範囲にも制限がある。

図4-4:外部貨幣定常状態



４.４.２.　比較静学(公開市場操作による貨幣政策の効果)

θ を上昇させ緊縮的貨幣政策を行ったときの経済に与える影響は次の命題にまとめられる。

(命題 4-5)　設定した仮定のもとで、(4-10")、(4-13)、(4-14")、(4-15)、(4-16)

式で表される世代重複経済において、安定な外部貨幣定常状態が存在すると想定する。その外部貨幣定常状態において民間の国債・貨幣比率θを上昇させた場合、新たな外部貨幣定常状態では資本水準kは変化せず、実質貨幣残高mは低下、実質国債発行残高bは変化せず、インフレ率μは非減少的である。

証明

　補論 4E 参照

　θを上昇させた場合、(4-18)、(4-17')式ともにθから独立であるためk-b平面上ではグラフに変化はない。ケース２では貨幣、国債ともに流動性資産として価値を持ち無差別であるため、θを変化させても民間が保有する国債と貨幣の比率が変化するのみでありbには影響を与えず、(4-18)式から明らかなようにkにも影響を与えない。ただし、θの変化は b の構成比(民間保有の国債と貨幣)の変化を意味するため、bが一定のもとθの上昇はmの低下を意味する。

　前節と同様に、インフレ率(名目貨幣増加率)μへの影響に関し、政府の予算制約(4-19')式を全微分すると、

$$\left(1-R^b\right)db+\left(R^b-\frac{1}{1+\mu}\right)dm+\frac{m}{\left(1+\mu\right)^2}d\mu=0 \tag{4-24'}$$

が得られる。ここではR^bを一定としているため国債と貨幣の税率効果(μを一定とした場合)は存在せず、税ベース効果((4-24')式 LHS の第１項(国債の税ベース効果)および第２項(貨幣の税ベース効果))のみ存在する。θを上昇させた場合、bは変化しないため国債の税ベース効果は存在しない。しかし、m は減少するため R^b >(=)1/(1+μ)であれば貨幣の税ベース効果は負(0)となりμは上昇する(変化しない)。R^b >1/(1+μ)の場合、政府の予算制約(4-19')式よりmの減少は貨幣発行益の税ベース減少を意味し、その減少分を補うため貨幣の税率[R^b-1/(1+μ)]が上昇しなければならず、その結果μが上昇する。R^b=1/(1+μ)の場合、政府は貨幣発行益による収入を得ていない状況であるため、μの調整は必要でない。

　(命題 4-5)よりθの低下による拡張的貨幣政策は負の影響を与えないもののkに影響を与えることができないため、景気浮揚策として有効でない。次に、中央銀行による名目ベースでの拡張的貨幣政策の効果について検討する。

　μが与件となる一方、θが内生変数となるため(4-14")式は、

$$g-\tau=b_{t+1}-R^b b_t+\left[R^b-\frac{1}{1+\mu}\frac{m_{t+1}}{m_t}\right]m_t \tag{4-25'}$$

となり、(4-15)、(4-16)式はそれぞれ(4-26)、(4-27)式となる。(命題 4-5)より次

の系が導かれる。

(系)　設定した仮定のもとで、(4-10”)、(4-13)、(4-25’)、(4-26)、(4-27)式で表される世代重複経済において、安定な外部貨幣定常状態が存在すると想定する。その外部貨幣定常状態において名目貨幣増加率μを上昇させた場合、新たな外部貨幣定常状態では資本水準kは変化しない。

ケース２は国債がリスク回避手段として用いられている状況であり、そのような場合では国債・貨幣の比率の調整あるいは名目ベースでの貨幣増加率の調整であっても拡張的貨幣政策は、実物経済に影響を与えず景気浮揚策として有効でない。よって、θあるいはμの操作であっても公開市場操作の結果、kとμの間に相関性を見出すことはできない。

４.４.３.　動学

外部貨幣定常状態の近傍における動学は次の命題にまとめられ、前節の場合と同様なものとなる。(μを与件とする場合(中央銀行が名目ベースで貨幣増加率を調整する場合)の動学に関する議論は補論 4G 参照)

(命題 4-6)　設定した仮定のもとで、(4-10”)、(4-13)、(4-14”)、(4-15)、(4-16)式で表される世代重複経済において、安定な外部貨幣定常状態が存在すると想定する。その定常状態の近傍における動学は、その定常状態に収束する単調で決定的な経路である。

証明

補論 4F 参照

４.５.　結論

本章では貨幣の供給ルートを明確にする目的で中央銀行による国債市場での公開市場操作を考慮し、その操作を通した貨幣政策の効果について長期的観点から検討を行った。国債をモデル内に導入するため、資本への投資を収益性資産、貨幣を流動性資産としたうえで、国債の収益性資産としての側面および流動性資産としての側面の両方について注目した。資産を収益性資産と流動性資産に区分けするためモデル内に流動性需要が発生する必要があり、本章では経済が空間的に隔離され経済間のコミュニケーションが制限されることにより流

動性需要が発生する Schreft and Smith(1997,1998)をベースとした世代重複モデルを用いた。そのモデルにおいて国債が正の価値を持つためには資本への投資あるいは貨幣と粗代替関係になければならない。そこで本章では、従来から広く行われているように国債が収益性資産とみなされる場合(ケース１)に加え、流動性資産とみなされる場合(ケース２)について検討を行った。

ケース１、２ともに外部貨幣定常状態が存在する場合、収束し得る定常状態は一意に存在し、その定常状態には単調かつ決定的に収束し得た。公開市場操作により民間の国債・貨幣比率を上昇させた場合、ケース１であれば長期的に資本水準は低下、実質貨幣残高は低下、実質国債発行残高はその需要に対する所得効果が強過ぎなければ増加、インフレ率の変化は定かでなかったが緩やかな条件のもとインフレ率は上昇した。ケース２であれば長期的に資本水準は変化せず、実質貨幣残高は低下、実質国債発行残高は変化せず、インフレ率は非減少的であった。民間の国債・貨幣比率を低下させることによる拡張的貨幣政策はケース１の場合、資本水準を上昇させ経済の活動水準を上昇させる効果があるが、ケース２の場合、実物経済には影響を及ぼし得ない。

国債・貨幣比率の低下は必ずしも名目ベースでの貨幣増加率の上昇を意味しないため、本章ではさらに名目ベースでの拡張的貨幣政策の効果について検討を加えた。ケース１の場合、名目ベースでの拡張的貨幣政策は資本水準を低下させ景気浮揚策として有効でない可能性が高かった。ケース２の場合、実物経済に影響を及ぼすことがなく、よって、いずれの拡張的貨幣政策も景気浮揚策として有効でなかった。

公開市場操作により貨幣供給量が調整される結果、ケース１では逆 Mundell-Tobin 効果と同様の状況が観察される可能性が高かった。ただし、中央銀行が国債・貨幣比率の調整を通じ貨幣供給量を調整する場合、因果関係がインフレから資本蓄積の流れになっているわけではなく、公開市場操作の結果、逆 Mundell-Tobin 効果が観察された。ケース２の場合、公開市場操作は実物経済に影響を及ぼし得ないことからインフレ率と資本水準は無相関となった。

本章ではモデル内に国債を発生させるため、国債が銀行のポートフォリオ上、収益性資産である資本と同等に扱われる場合と流動性資産である貨幣と同等に扱われる場合について検討を行った。国債は通常、ミドルリスク・ミドルリターンの資産であるため、本章でのモデル化は両極のケースであると考えられる。国債を貨幣と資本の中間的資産とみなし本章のモデルで国債に正の価値を持たせることはできないが、ベンチマーク・ケースにはなり得ると考えられる。国債をミドルリスク・ミドルリターンの資産としてモデル内に発生させるためには個人のリスク許容度の考慮、あるいは本章で取り上げなかった国債の他の側面(例えば、国債はデフォルト・リスクの低い資産である)等に注目し変更を加え

る必要があると考えられる。

補論 4A: (命題 4-1)の証明

ここでは、τ および τ を所与としたときの g の取り得る範囲の条件設定も行う。(4-17)、(4-18)、(4-20)式より、

$$k=[1-\pi(1+\theta)][w(k)-\tau] \qquad (4\text{-a1})$$

が得られる。(4-a1)式の LHS、RHS を図示すると図 4-A1 のようになる。言うまでもなく LHS は 45 度線で表され、RHS は(仮定 1)、(仮定 4)の(b)より強い意味で凹である。$[1-\pi(1+\theta)]w(k)$($\tau=0$ のときの RHS)は(4-22)式、(仮定 2)、$f(k)>w(k)$に注意すれば $k>0$ において 45 度線と 1 度交わる。$[1-\pi(1+\theta)]w(k)-k$ が最大となるときの k は 1 次条件より、

$$[1-\pi(1+\theta)]w'(k)-1=0$$

を満たさなければならず、その k を $k^{\tau 0,\max 1}(\equiv w'^{(-1)}\{1/[1-\pi(1+\theta)]\})$とする。$\tau$ が、

$$\tau<w(k^{\tau 0,\max 1})-k^{\tau 0,\max 1}/[1-\pi(1+\theta)] \qquad (4\text{-a2})$$

を満たせば、LHS と RHS は交点を持つ(図 4-A1 のように交点を 2 つ持つ場合がある)。(4-a1)式より $k>0$ が決まれば、(4-17)、(4-20)式より $m>0$、$b>0$ が決まる。

(4-a2)式を満たす τ のもと決定された(k,m,b)を所与として、(4-19)式の RHS は μ に関して増加し、$\mu\downarrow -1$ のとき$-\infty$、$\mu=\infty$のとき$[1-f'(k)]b+f'(k)m$ になる。よって g が、

$$g<[1-f'(k)]b+f'(k)m+\tau \qquad (4\text{-a3})$$

を満たせば $\mu>-1$ となる有限な解が存在する。

(4-21)式は(4-19)式を考慮すると、

$$g>[1-f'(k)]b+\tau \qquad (4\text{-a4})$$

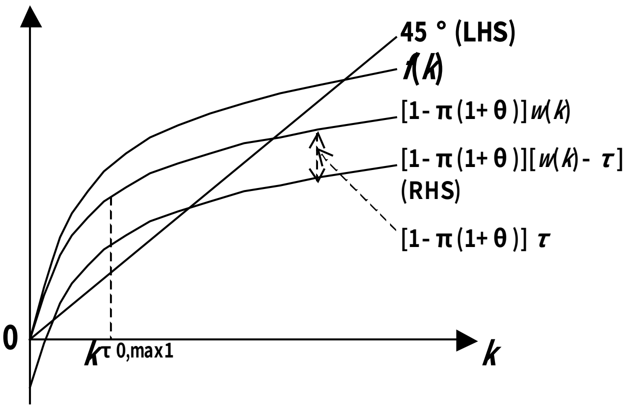
となり、g が(4-a4)式を満たすほど十分大きければ(4-21)式は満たされる。

(4-a3)、(4-a4)式より(4-a2)式を満たす τ を所与とし g は、

$$[1-f'(k)]b+\tau<g<[1-f'(k)]b+f'(k)m+\tau$$

を満たす必要がある。 □

図4-A1:定常状態



補論 4B: (命題 4-2)の証明

外部貨幣定常状態(k,m,b,μ)において、(4-17)、(4-18)、(4-19)、(4-20)式をそれぞれ全微分し整理すると、

$$MA\begin{pmatrix} dk \\ dm \\ db \\ d\mu \end{pmatrix} = VA \cdot d\theta \tag{4-a5}$$

$$MA \equiv \begin{pmatrix} -\pi w'(k) & 1 & 0 & 0 \\ w'(k)-1 & 0 & -1 & 0 \\ -(b-m)f''(k) & f'(k)-1/(1+\mu) & 1-f'(k) & m/(1+\mu)^2 \\ 0 & -(1+\theta) & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad VA \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

となる。

$$\det MA = \frac{m}{(1+\mu)^2}\{[w'(k)-1]-[(1+\theta)\pi w'(k)]\}$$

となり、{・}内の１つ目の[・]は k-b 平面上において(4-18)式で表される曲線の傾き、２つ目の[・]は(4-23)式で表される曲線の傾きを表す。安定な外部貨幣定常状態が存在するとき、その定常状態において(4-23)式で表される曲線は(4-18)式で表される曲線を下から交差するため(図 4-2 参照(外部貨幣定常状態が２つ存在するとき安定な定常状態は k の水準が高い定常状態))、detMA<0 となる。

θ を恒常的に変化させた場合の k への影響は(4-a5)式より、

$$dk/d\theta = \left[m^2/(1+\mu)^2\right]/\det MA$$

となるので、$dk/d\theta$ <0 となる。m への影響は、

$$dm/d\theta = \left[\pi w'(k) m^2/(1+\mu)^2\right]/\det MA$$

となるので、(仮定 1)を考慮すると $dm/d\theta<0$ となる。b への影響は、

$$db/d\theta = \left\{[w'(k)-1]m^2/(1+\mu)^2\right\}/\det MA$$

となるので、$w'(k)<(>)1$ であれば $db/d\theta>(<)0$ となる。μ への影響は、

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{m\{-\pi w'(k)[f'(k)-1/(1+\mu)]-[w'(k)-1][1-f'(k)]+(b-m)f''(k)\}}{\det MA}$$

となり、分子の符号は明確でない。　□

補論 4C: (命題 4-3)の証明

(4-10)、(4-13)、(4-15)式より、

$$k_{t+1} = [1-\pi(1+\theta)][w(k_t)-\tau] \tag{4-a6}$$

となり、動学システムは(4-a6)式より 1 変数 k で表すことができる。(4-a6)式より定常状態 k では、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k} = [1-\pi(1+\theta)]w'(k)$$

となる。これは(命題 4-1)の証明での(4-a1)式の RHS の傾きである。(命題 4-1)の証明での図 4-A1 のように外部貨幣定常状態が２つ存在し得る(外部貨幣定常状態が１つの場合は、以下の k の水準が高い定常状態と同様)。k の水準が高い定常状態では、図 4-A1 から明らかなように、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k} \in (0,1)$$

となり、k の水準が低い定常状態では、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k} > 1$$

となる。k の水準が高い外部貨幣定常状態のみ安定であり、その定常状態の近傍における動学は単調である。k_t は初期値が所与の状態変数であり、k_t の決定を受け(4-10)式より m_t が決まり、b_t も(4-15)式より m_t と固定的に関係付けられるため決まる。よって、動学経路は(4-a6)式に支配される決定的なものである。μ_t は(4-14)式より内生変数として決まる。　□

補論 4D: (命題 4-4)の証明

(4-17')、(4-18)式より、

$$k = (1-\pi)[w(k)-\tau] \tag{4-a7}$$

となる。図 4-A2 のように(4-a7)式の LHS は 45 度線で表され、RHS は(仮定 1)、(仮定 4)の(b)より強い意味で凹である。(1-π)$w(k)$(τ=0 のときの RHS)は(4-28)式、(仮定 2)、$f(k)>w(k)$に注意すれば k>0 において 45 度線と 1 度交わる。(1-π)$w(k)$-k が最大になるときの k は 1 次条件より、

(1-π)$w'(k)$-1=0

を満たさなければならず、その k を $k^{\tau 0,\max 2}$($\equiv w'^{(-1)}[1/(1-\pi)]$)とする。$\tau$ が

$$\tau < w\left(k^{\tau 0,\max 2}\right) - k^{\tau 0,\max 2} / (1-\pi) \qquad \text{(4-a8)}$$

を満たせば、LHS と RHS は交点を持つ(図 4-A2 のように交点を 2 つ持つ場合がある)。(4-a7)式より k>0 が決まれば、(4-17')、(4-20)式より m>0、b>0 が決まる。

(4-a8)式を満たす τ のもと決定された(k,m,b)を所与として、(4-19')式の RHS は μ に関して増加し、μ↓-1 のとき-∞、μ=∞のとき(1-R^b)b+$R^b m$ になる。よって g が、

$$g < \left(1-R^b\right)b + R^b m + \tau \qquad \text{(4-a9)}$$

を満たせば μ>-1 となる有限な解が存在する。

(4-21)式は(4-19')式を用いて整理すると、

$$g > \left(1-R^b\right)b + \left[R^b - f'(k)\right]m + \tau \qquad \text{(4-a10)}$$

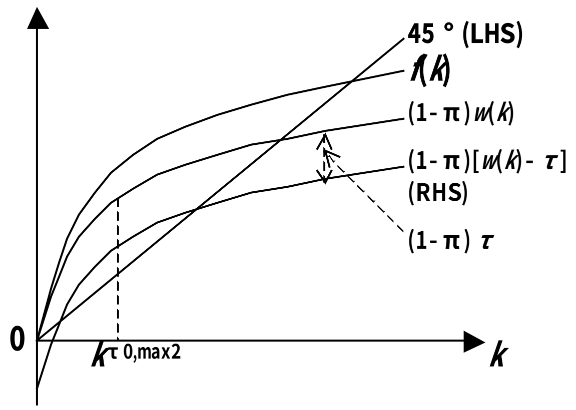
となり、g が(4-a10)式を満たすほど十分大きければ(4-21)式は満たされる。

(4-a9)、(4-a10)式より(4-a8)式を満たす τ を所与とし g は、

$$\left(1-R^b\right)b + \left[R^b - f'(k)\right]m + \tau < g < \left(1-R^b\right)b + R^b m + \tau$$

を満たす必要がある。　□

図4-A2:定常状態



補論 4E: (命題 4-5)の証明

外部貨幣定常状態(k,m,b,μ)において、(4-17')、(4-18)、(4-19')、(4-20)式をそれぞれ全微分し整理すると、

$$MB\begin{pmatrix} dk \\ dm \\ db \\ d\mu \end{pmatrix} = VB \cdot d\theta \tag{4-a11}$$

$$MB \equiv \begin{pmatrix} -\pi w'(k) & 0 & 1 & 0 \\ w'(k)-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & R^b - 1/(1+\mu) & 1-R^b & m/(1+\mu)^2 \\ 0 & -(1+\theta) & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad VB \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

となる。

$$\det MB = \frac{m}{(1+\mu)^2}(1+\theta)\{[w'(k)-1] - \pi w'(k)\}$$

となり、{・}内の１つ目の[・]は k-b 平面上において(4-18)式で表される曲線の傾き、２つ目の$\pi w'(k)$は(4-17')式で表される曲線の傾きを表す。安定な外部貨幣定常状態が存在するとき、その定常状態において(4-17')式で表される曲線は(4-18)式で表される曲線を下から交差するため(図 4-4 参照(安定な外部貨幣定常状態は k の水準が高い定常状態))、detMB<0 となる。

θを恒常的に変化させた場合の k への影響は(4-a11)式より、

$$dk/d\theta = 0$$

となる。m への影響は、

$$dm/d\theta = \left\langle -\left[m^2/(1+\mu)^2\right]\{[w'(k)-1] - \pi w'(k)\}\right\rangle \Big/ \det MB$$

となり、先程と同様に分子の符号は正となるため $dm/d\theta$ <0 となる。b への影響は、

$$db/d\theta = 0$$

となる。μへの影響は、

$$d\mu/d\theta = \left\langle m\left[R^b - 1/(1+\mu)\right]\{[w'(k)-1] - \pi w'(k)\}\right\rangle \Big/ \det MB$$

となり、ケース２では定常状態において $R^b \geq 1/(1+\mu)$であるので先程と同様に分子の符号は非正となり $d\mu/d\theta \geq 0$ である。　□

補論 4F: (命題 4-6)の証明

(4-10'')、(4-13)式より、

$$k_{t+1} = (1-\pi)[w(k_t) - \tau] \tag{4-a12}$$

となり、動学システムは(4-a12)式より1変数 k で表される。(4-a12)式より定常状態 k では、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k}=(1-\pi)w'(k)$$

となる。これは(命題 4-4)の証明での(4-a7)式の RHS の傾きである。(命題 4-4)の証明での図 4-A2 のように外部貨幣定常状態が2つ存在し得る(外部貨幣定常状態が1つの場合は、以下の k の水準が高い定常状態と同様)。k の水準が高い定常状態では、図 4-A2 から明らかなように、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k}\in(0,1)$$

となり、k の水準が低い定常状態では、

$$dk_{t+1}/dk_t\big|_{k_t=k_{t+1}=k}>1$$

となる。k の水準が高い外部貨幣定常状態のみ安定であり、その定常状態の近傍における動学は単調である。ケース 1 の場合と同様、k_t は初期値が所与の状態変数であり、k_t の決定を受け(4-10")式より b_t が決まり、m_t も(4-15)式より b_t と固定的に関係付けられるため決まる。よって、動学経路は(4-a12)式に支配される決定的なものである。μ_t は(4-14")式より内生変数として決まる。　□

補論 4G: μ を与件とする場合(中央銀行が名目ベースで貨幣増加率を調整する場合)の動学について

μ を与件とする場合の動学は θ を与件とする場合と異なり必ずしも明確にならないが、以下の通り、各ケース別におよその検討を行うことは可能である。

ケース 1 の場合

動学システムは(4-10)、(4-13)、(4-25)、(4-26)、(4-27)式で表される。(4-25)式は(4-10)式を考慮すると、

$$g-\tau=b_{t+1}-f'(k_{t+1})b_t+f'(k_{t+1})\pi[w(k_t)-\tau]-\frac{\pi}{1+\mu}[w(k_{t+1})-\tau] \qquad \text{(4-a13)}$$

となる。動学システムは k_t、b_t に関して(4-13)、(4-a13)式に支配される。(4-13)、(4-a13)式より定常状態(k,b)で評価したヤコビ行列 J は、

$$J=\begin{pmatrix} dk_{t+1}/dk_t & dk_{t+1}/db_t \\ db_{t+1}/dk_t & db_{t+1}/db_t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} w'(k) & -1 \\ w'(k)\left[(b-m)f''(k)+\dfrac{\pi}{1+\mu}w'(k)-\pi f'(k)\right] & -\left[(b-m)f''(k)+\dfrac{\pi}{1+\mu}w'(k)\right]+f'(k) \end{pmatrix}$$

となる。

$$\det J=(1-\pi)f'(k)w'(k)>0$$

$$\mathrm{tr}J=-(b-m)f''(k)+\left(1-\frac{\pi}{1+\mu}\right)w'(k)+f'(k)$$

となり、tr$J$の符号に関して、(仮定 1)より第１、３項の符号は正であり、第２項についても 1>π/(1+μ)を満たす程度にπが小さくμが大きければ正となるため、tr$J$>0 となる可能性は高い。

$p(\lambda)=\lambda^2$-tr$J\lambda$+det$J$を特性方程式(λは特性根)とすると、

$$p(1)=1-\mathrm{tr}J+\det J=-\left\{-(b-m)f''(k)+[w'(k)-1][1-f'(k)]+\left[f'(k)-\frac{1}{1+\mu}\right]\pi w'(k)\right\}$$

が得られ、{・}内の第１、３項の符号は正であり、bの需要に対する所得効果が強過ぎず(w'(k)<1)、f'(k)が十分大きければ第２項も正となるため p(1)<0 となり得る。また、政府の予算制約式(定常状態での(4-a13)式)から容易に導けるように、p(1)の{・}内は政府収入の限界的変化を表し、第１項は国債と貨幣の税率効果の合計、第２項は国債の税ベース効果、第３項は貨幣の税ベース効果を表す。第４.３.２節で検討した通り、国債の税ベース効果があまり強過ぎなければ{・}内の符号は正となる。

以上より、外部貨幣定常状態は鞍点となる可能性が高い。θを与件とする場合、初期値が所与の状態変数 k が決まることで b、m が決まったが、ここでは k の決定により(4-10)式から m のみ決まり、b が b>0 となる定常状態に収束する保証はなく b が+∞に発散あるいは 0 に収束する可能性がある。

初期値に関して、所与の k_1 に対し(4-10)式から m_1 が決まり、M_0 は所与、μ は一定であるので $m_1=M_1/p_1$ から p_1 が決まり(4-4')式(ただし、$B_0^c=M_0$ である)より $b_1(=B_1/p_1)$が決まる。ここでは M_1 は M_0 が所与のもと確定的であるが、M_1 が自由に変動する(中央銀行が M_1 を自由に供給する)ならば p_1 の調整を通じ b_1 が自由に決定される。その場合、b は初期値が自由に決まるジャンプ変数と解釈することができ、完全予見のもとで外部貨幣定常状態に収束することは可能である。また、det$J$>0 かつ tr$J$>0 であれば鞍点経路上で振動することはない。

ケース２の場合

動学システムは(4-10")、(4-13)、(4-25')、(4-26)、(4-27)式で表され、それはθが所与の場合と同様、k_t、b_t に関し(4-10")、(4-13)式に支配される。k、b が決まることで(4-25')式より m が決まるが、(1+μ)R^b≥1 であることに注意すると m が特定の初期値を取らない限り m>0 となる定常状態に収束することはない。

初期値に関して、所与の k_1 に対し(4-10")式から $b_1(=B_1/p_1)$が決まり、B_0、M_0、

$I_1{}^b$ は所与であるので(4-4')式より p_1 が決まる。μ は一定であるので所与の M_0 より M_1 が決まり $m_1=M_1/p_1$ から m_1 が決まるが、ケース１の場合と同様、M_1 が自由に変動するならば m_1 は自由に決まる。その場合、m は初期値が自由に決まるジャンプ変数と解釈することができ、完全予見のもとで外部貨幣定常状態に収束することは可能である。

補論 4H: 厚生的観点からの検討

本文中では外部貨幣定常状態における政策効果として民間の国債・貨幣比率 θ、名目貨幣増加率(インフレ率) μ の変化が経済に与える影響について検討しているが、この補論では外部貨幣定常状態における個人の期待効用を検討する(ただし、初期の老人の効用は無視する)ことで、厚生面から θ、μ の変化が与える影響について考察する。

ケース１:国債が収益性資産とみなされる場合

個人の期待効用は(4-9)式より、

$$\pi \ln d_{t+1}{}^{m} + (1-\pi)\ln d_{t+1}{}^{n} + \ln[w(k_t)-\tau] \qquad \text{(4-a14)}$$

となる。期待効用は(4-a14)式より第１、２項の預金金利に依存する部分、第３項の預金額(可処分所得)に依存する部分に分けることができる。容易に確認できるように、銀行の最適化行動より $d_{t+1}{}^{m}=p_t/p_{t+1}$、$d_{t+1}{}^{n}=f'(k_{t+1})$ となるため、(4-a14)式は定常状態において、

$$\pi \ln[1/(1+\mu)] + (1-\pi)\ln f'(k) + \ln[w(k)-\tau] \qquad \text{(4-a15)}$$

となる。

第４．３．２節で検討した通り、θ を上昇させると k は低下し μ は上昇する可能性が高く、μ を上昇させると k は低下する可能性が高いため、(4-a15)式の変化は定かでない。k の低下により預金額は低下するが預金金利による影響が明確でないためである。ただし、預金金利による影響があまり大きくなければ預金額の低下を通じ効用水準は低下する。

ケース２:国債が流動性資産とみなされる場合

(命題 4-5)およびその(系)より、θ を上昇させると k は変化せず μ は非減少的であるため(4-a15)式への影響は非増加的であり、μ を上昇させると k は変化しないため、(4-a15)式への影響は減少的である。ケース２では θ あるいは μ の変化により k へ影響を及ぼすことができなかったため、μ が上昇すれば預金金利の低下を通じて期待効用は低下する。