モノイダル（余）閉圏上の淡中-クライン双対について

太　田　洋　平

概　　要

本稿では淡中–クライン双対のある種のモノイダル圏への一般化について考察する．淡中-クライン双対は淡中再構成定理とクライン表現定理という 2 つの定理からなる．淡中再構成定理は（コ）モノイド対象をその（余）加群の圏と忘却関手から復元できるという定理であり，クライン表現定理は良い条件を満たす圏と関手の組から（コ）モノイド対象を構成し，その表現と忘却関手を考えると元の圏と関手と同値になるという定理である．双代数・ホップ代数などの良い代数のクラスでは，これらの対応によりある種の代数とある種の圏と関手の一対一対応（淡中-クライン双対）を与えることができる．*1 淡中再構成定理の最も単純な例は群 G（モノイドでもよい）の集合への作用全体のなす圏とその忘却関手の組からの群 G の復元である．本稿では [Par96] および [Lyu21] の内容に従い，より一般の状況における淡中-クライン双対について解説する．[Lyu21] ではモノイダル余閉圏における淡中-クライン双対を取り扱っているが，本稿ではモノイダル閉圏上の淡中-クライン双対も平行して取り扱った．

記号と言葉の定義および必要な前提知識

- 圏論の基礎的知識（[LT17] 程度の内容）および学部 3 年生程度の代数学の基礎的知識を仮定する．また本稿では圏論的に双対な命題の証明は行わない．
- 以降 k は体とする．
- 小圏と圏同値な圏 (essentially small category) と小圏の区別はしない．これらをまとめて小圏と表記する．
- 圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ で $\mathcal{C}$ の対象全体，$\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ で $\mathcal{C}$ の射全体を表す．また $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ もしくは $\mathcal{C}(X,Y)$ で X から Y への射全体を表す．また $\mathcal{C}$ の射 f に対して，$\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)$ でそれぞれ f の始域，終域を表す．
- 圏と関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，F から G への自然変換全体を $\mathrm{Nat}(F,G)$ と表す．
- 圏と関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，その極限を $\varprojlim F$，余極限を $\varinjlim F$ と表す．また $\mathcal{C}$ の射 $f, g : X \to Y$ に対し，f と g の equalizer,coequalizer を $\mathrm{Eq}(f,g), \mathrm{Coeq}(f,g)$ と表す．

*1 詳しい内容は [EGNO15]・[Sch92]・[Str07] などに解説がある．

- 集合の圏を $\mathbf{Set}$，有限集合の圏を $\mathbf{set}$，群の圏を $\mathbf{Grp}$，アーベル群との圏を $\mathbf{Ab}$, 体 k 上のベクトル空間の圏を $\mathbf{Vect}_k$，体 k 上の有限次元ベクトル空間の圏を $\mathbf{vect}_k$，群 G の体 k 上の表現の圏を $\mathbf{Rep}_k(G)$，群 G の体 k 上の有限次元表現の圏を $\mathbf{rep}_k(G)$，環 R 上の左加群の圏を ${}_R\mathbf{Mod}$，環 R 上の右加群の圏を $\mathbf{Mod}_R$ と表す．

1. 群の作用のなす圏とその忘却関手からの群の復元

淡中再構成定理の最も単純なモデルケースとして，群の作用のなす圏と忘却関手の対からの群の復元を取り扱う．

定義 1.1 (delooping 圏). G をモノイドとする．$\mathrm{Ob}(\mathbf{B}G) = \{*\}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}G}(*,*) = G$ とし，射の合成を G の積，単位射を単位元とすると $\mathbf{B}G$ は圏をなす．この圏 $\mathbf{B}G$ を G の **delooping 圏** (delooping category) という．

注意 1.2. G を群，$\mathbf{B}G$ を G の delooping 圏とする．このとき $\mathbf{B}G$ から $\mathbf{Set}$ への関手全体のなす圏を $[\mathbf{B}G, \mathbf{Set}]$ と表記する．$F : \mathbf{B}G \to \mathbf{Set}$ は G の元 g に対し，集合 $F(*)$ とその間の写像 $F(g) : F(*) \to F(*)$ を与える．F は関手より $F(g) \circ F(g^{-1}) = F(g^{-1}) \circ F(g) = F(1_G) = 1_{F(G)}$ より，$F(g)$ は全単射である．ここで $F(*)$ の元 x に対して，$g \cdot x = F(g)(x)$ と定義すると，F の関手性より，これは G の $F(*)$ への作用を与えることが分かる．また任意の g の集合への作用はこのような関手で表すことができる．$[\mathbf{B}G, \mathbf{Set}]$ の射 $\psi : F_1 \to F_2$ を群 G の元 $g : * \to *$ へ作用させると以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "g"] & * \arrow[r, rightsquigarrow, "F_1"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "F_2"'] & F_1(*) \arrow[r, "F_1(g)"] \arrow[d, "\psi_*"'] & F_1(*) \arrow[d, "\psi_*"] \\ & & F_2(*) \arrow[r, "F_2(g)"'] & F_2(*) \end{tikzcd}$$

よって $[\mathbf{B}G, \mathbf{Set}]$ は G の集合への左作用の圏と同値である．

補題 1.3. G を群，$U_G : [\mathbf{B}G, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とし，$\hat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}G}(-, *)$ とする．このとき $[\mathbf{B}G, \mathbf{Set}](\hat{G}, -) \simeq U_G$ である．

(証明) $[\mathbf{B}G, \mathbf{Set}]$ の対象 F と $F(*)$ の任意の元 x に対して，$\Phi_F : [\mathbf{B}G, \mathbf{Set}](\hat{G}, F) \ni \varphi \mapsto \varphi_*(1_G) \in F(*) = U_G(F)$ とし，$\Psi_F : U_G(F) = F(*) \to [\mathbf{B}G, \mathbf{Set}](\hat{G}, F)$ を $\Psi_F(x) : \hat{G}(*) = G \ni g \mapsto F(g)(x) \in F(*)$ とする．このとき，また $(\Phi_F \circ \Psi_F)(x) = (\Psi_F(x))(1_G) = F(1_G)(x) = x$ である．また $\hat{G}$ から F への任意の自然変換 φ と任意の $\mathbf{B}G$ の射 g に対し，$(F(g) \circ \varphi_*)(1_G) = (\varphi_* \circ \hat{G}(g))(1_G) = \varphi_*(g \cdot 1_G) = \varphi_*(g)$ が成立する．よって，$(\Psi_F \circ \Phi_F)(\varphi) = \Psi_F(\varphi_*(1_G)) = F(-)(\varphi_*(1_G)) = \varphi$ となる．$[\mathbf{B}G, \mathbf{Set}]$ の任意の射 $\psi : F_1 \to F_2$ をとると，以下の左の図式の可換性が分かり，これより Φ が自然変換となる．また ψ は自然変換より，中央の図式の可換性が言え，これにより，右の図式の可換性が言える．よって Φ, Ψ は自然変換となる．

$$\begin{array}{ccc}
\begin{tikzcd}
{[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},F_1)} \arrow[r, "\Phi_{F_1}"] \arrow[d, "{[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},\psi)}"'] & F_1(*) \arrow[d, "\psi_*"] \\
{[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},F_2)} \arrow[r, "\Phi_{F_2}"'] & F_2(*)
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
F_1(*) \arrow[r, "F_1(g)"] \arrow[d, "\psi_*"'] & F_1(*) \arrow[d, "\psi_*"] \\
F_2(*) \arrow[r, "F_2(g)"'] & F_2(*)
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
F_1(*) \arrow[r, "\Psi_{F_1}"] \arrow[d, "\psi_*"'] & {[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},F_1)} \arrow[d, "{[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},\psi)}"] \\
F_2(*) \arrow[r, "\Psi_{F_2}"'] & {[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},F_2)}
\end{tikzcd}
\end{array}$$

以上より $\mathrm{Hom}_{[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}]}(\hat{G},-)\simeq U_G$ が成立する． □

命題 1.4. G を群，$U_G:[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}]\to\mathbf{Set}$ を忘却関手とする．このとき，$\mathrm{Nat}(U_G,U_G)$ と G は群同型である．

(証明)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nat}(U_G,U_G) &\simeq \mathrm{Nat}([\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},-),[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},-))\simeq[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\hat{G},\hat{G})\\
&=[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}](\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}G}(-,*),\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}G}(-,*))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}G}(*,*)=G
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで 1 番目の同型は補題 1.3 より従う．2 番目と 4 番目の同型は米田の補題より従う．特に 2 番目の同型は $\mathbf{B}G$ は小圏より，$[\mathbf{B}G,\mathbf{Set}]$ は局所小圏となるので，米田の補題が適用できる．この対応による各要素間の対応を追うと，$\mathrm{Nat}(U_G,U_G)$ の合成を積とするモノイド構造と G はモノイド同型となり，これにより群の同型が定まる．特に $\mathrm{Nat}(U_G,U_G)=\mathrm{Aut}(U_G)$ となることが分かる． □

命題 1.4 はより一般に G をモノイドとしても成立する．以降は命題 1.4 を適切に一般化することを目標とする．上記の証明をそのまま一般化する場合，豊穣圏版の米田の補題が必要となる．この方向で書かれたものとして [Alu16] がある．米田の補題を用いた証明はとても簡潔であるが，豊穣圏に関する準備が大変である．本稿では米田の補題を用いずに証明を行う．

2. エンド・コエンド

命題 1.4 の $\mathrm{Nat}(U_G,U_G)$ にあたるものがエンドである．この節ではエンド・コエンドに関する事項を本稿で必要な範囲でまとめる．

定義 2.1 (楔, 余楔). $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を圏，$T:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を関手，W を $\mathcal{D}$ の対象，$\sigma=\{\sigma_X:W\to T(X,X)\}_{X\in\mathcal{C}}$，$\sigma'=\{\sigma'_X:T(X,X)\to W\}_{X\in\mathcal{C}}$ を $\mathcal{D}$ の射の族とする．$\mathcal{C}$ の任意の射 $f:X\to Y$ に対して以下の左の図式が可換となるとき，σ は W から T への**楔** (wedge) であるといい，$\sigma:W\ddot{\to}T$ と表記する．また W から T への楔全体を $\mathrm{W}(W,T)$ と表す．

また，$\mathcal{C}$ の任意の射 $f:X\to Y$ に対して以下の右の図式が可換となるとき，σ' は T から W への**余楔** (cowedge) であるといい，$\sigma':T\ddot{\to}W$ と表記する．また T から W への余楔全体を $\mathrm{CW}(T,W)$ と表す．

$$
\begin{tikzcd}
& W \arrow[dl, "\sigma_X"'] \arrow[dr, "\sigma_Y"] & \\
T(X,X) \arrow[dr, "T(1_X,f)"'] & & T(Y,Y) \arrow[dl, "T(f,1_Y)"] \\
& T(X,Y) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& T(Y,X) \arrow[dl, "T(f,1_X)"'] \arrow[dr, "T(1_Y,f)"] & \\
T(X,X) \arrow[dr, "\sigma'_X"'] & & T(Y,Y) \arrow[dl, "\sigma'_Y"] \\
& W &
\end{tikzcd}
$$

定義 2.2 (エンド，コエンド). $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を圏，$T:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を関手，E,C を $\mathcal{D}$ の対象，$\sigma:E\ddot{\to}T$ を楔，$\sigma':T\ddot{\to}C$ を余楔とする．任意の $\mathcal{D}$ の対象 W と任意の楔 $\tau:W\ddot{\to}T$ に対して，$\mathcal{D}$ の射 $p:W\to E$ が一意的に存在して，任意の $\mathcal{D}$ の対象 X に対して，$\sigma_X\circ p=\tau_X$ を満たすとき，(E,σ) は**エンド** (end) であるといい，$\int_{X\in\mathcal{C}}T(X,X),\mathrm{End}(T)$ などと表す．

また，任意の $\mathcal{D}$ の対象 W と任意の余楔 $\tau':T\ddot{\to}W$ に対して，$\mathcal{D}$ の射 $\iota:C\to W$ が一意的に存在して，任意の $\mathcal{D}$ の対象 X に対して，$\iota\circ\sigma'_X=\tau'_X$ を満たすとき，(C,σ') は**コエンド** (coend) であるといい，$\int^{X\in\mathcal{C}}T(X,X),\mathrm{Coend}(T)$ などと表す．

$$
\begin{tikzcd}
& W \arrow[d, "\exists! p"'] \arrow[ddl, bend right, "\tau_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\tau_Y"] & \\
& E \arrow[dl, "\sigma_X"'] \arrow[dr, "\sigma_Y"] & \\
T(X,X) \arrow[dr, "T(1_X,f)"'] & & T(Y,Y) \arrow[dl, "T(f,1_Y)"] \\
& T(X,Y) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& T(Y,X) \arrow[dl, "T(f,1_X)"'] \arrow[dr, "T(1_Y,f)"] & \\
T(X,X) \arrow[dr, "\sigma'_X"'] \arrow[ddr, bend right, "\tau'_X"'] & & T(Y,Y) \arrow[dl, "\sigma'_Y"] \arrow[ddl, bend left, "\tau'_Y"] \\
& C \arrow[d, "\exists!\iota"'] & \\
& W &
\end{tikzcd}
$$

例 2.3. $\mathcal{C}$ を小圏とし，$F,G:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ を関手とすると，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(-),G(-)):\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ という関手が構成できる．$\mathcal{C}$ は小圏より，$\mathrm{Nat}(F,G)$ は $\mathbf{Set}$ の対象となり，

$$\sigma=\{\sigma_X:\mathrm{Nat}(F,G)\ni\varphi\mapsto\varphi_X\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X),G(X))\}_{X\in\mathcal{C}}$$

は $\mathrm{Nat}(F,G)$ から，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(-),G(-))$ への楔となる．このとき，$\int_{X\in\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X),G(X))$ $=\mathrm{Nat}(F,G)$ である．

例 2.4. 環 R に対して，R を R の積に関するモノイドとみなした場合の delooping 圏を $\mathbf{B}R$ とする．右 R 加群 M は $\mathbf{B}R$ の射 $r:*\to*$ に対して，$M(*)=M,M(*)=-\cdot r$ と定義すると，M は $\mathbf{B}R^{\mathrm{op}}$ から $\mathbf{Ab}$ への関手とみなせる．同様に左 R 加群 N は $\mathbf{B}R$ から $\mathbf{Ab}$ への関手とみなせる．これにより $M\otimes_{\mathbb{Z}}N$ は $\mathbf{B}R^{\mathrm{op}}\times\mathbf{B}R$ から $\mathbf{Ab}$ への関手とみなせる．このとき $\int^{*\in\mathbf{B}R}M(*)\otimes_{\mathbb{Z}}N(*)\simeq M\otimes_R N$ である．

命題 2.5. $\mathcal{C}$ を小圏，$\mathcal{D}$ を完備圏とし，$T:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を関手とする．このとき，$\mathcal{D}$ の対象 D,D' を

$$D = \prod_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} T(X,X), \quad D' = \prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})} T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$$

と定義する．また，$\mathcal{D}$ の射 s, t を任意の $\mathcal{C}$ の射 $f : X \to Y$ に対する以下の図式の普遍性により定義する.（図式の縦方向の射は自然な射影である.）

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\exists ! s"] \arrow[d, "p_X"'] & D' \arrow[d, "q_f"] \\ T(X,X) \arrow[r, "T(1_X, f)"'] & T(X,Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "\exists ! t"] \arrow[d, "p_Y"'] & D' \arrow[d, "q_f"] \\ T(Y,Y) \arrow[r, "T(f, 1_Y)"'] & T(X,Y) \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathrm{End}(T)$ が存在し，$\mathrm{End}(T) \simeq \mathrm{Eq}(s,t)$ となる.

(証明) 任意に $\mathcal{C}$ の射 $f : X \to Y$ をとる．$\mathrm{Eq}(s,t)$ は equalizer であるので，$\sigma : \mathrm{Eq}(s,t) \to D$ が存在して $s \circ \sigma = t \circ \sigma$ を満たす．$\sigma_X = \sigma \circ p_X$ とおくと，$T(1_X, f) \circ \sigma_X = T(1_Y, f) \circ \sigma_Y$ を満たし，$\sigma : \mathrm{Eq}(s,t) \ddot{\to} T$ は楔となる．ここで任意に楔 $\tau : W \ddot{\to} T$ をとると，D の直積としての普遍性より一意的に $\check{\tau} : W \to D$ が存在し，$\check{\tau} \circ p_X = \tau_X$ を満たす．以下の図式の可換性より $s \circ \check{\tau} = t \circ \check{\tau}$ となる.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p_X"] & D' \arrow[d, "q_f"] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ T(X,X) \arrow[r, "T(1_X, f)"] & T(X,Y) & D' \arrow[l, "q_f"'] \\ W \arrow[u, "\tau_X"'] \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[uu, bend left=60, "\check{\sigma}"] \arrow[rr, bend right, "\check{\tau}"'] & T(Y,Y) \arrow[u, "T(f, 1_Y)"'] & D \arrow[l, "p_Y"'] \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

よって Eq の equalizer としての普遍性より，一意的に $\xi : W \to \mathrm{Eq}(s,t)$ が存在し，$\xi \circ \sigma = \check{\tau}$ を満たす．よって任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して $\tau_X = \xi \circ \sigma_X$ となり，$\mathrm{Eq}(s,t)$ は $\mathrm{End}(T)$ の普遍性を満たす. □

命題 2.6. $\mathcal{C}$ を小圏，$\mathcal{D}$ を余完備圏とし，$T : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．このとき，$\mathcal{D}$ の対象 D, D' を

$$D = \coprod_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} T(X,X), \quad D' = \coprod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})} T(\mathrm{cod}(f), \mathrm{dom}(f))$$

と定義する．また，$\mathcal{D}$ の射 s', t' を任意の $\mathcal{C}$ の射 $f : X \to Y$ に対する以下の図式の普遍性により定義する.（図式の縦方向の射は自然な埋め込みである.）

$$\begin{tikzcd} T(Y,X) \arrow[r, "T(f, 1_X)"] \arrow[d, "i_f"'] & T(X,X) \arrow[d, "\iota_X"] \\ D' \arrow[r, "\exists ! s'"'] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(Y,X) \arrow[r, "T(1_Y, f)"] \arrow[d, "i_f"'] & T(Y,Y) \arrow[d, "\iota_X"] \\ D' \arrow[r, "\exists ! t'"'] & D \end{tikzcd}$$

このとき，$C \simeq \mathrm{Coeq}(s', t')$ である.

系 2.7. $\mathcal{C}$ を小圏，$\mathcal{D}$ を圏とし，$T:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を関手とする．$\mathcal{D}$ が完備ならば，$\int_{X\in\mathcal{C}}T(X,X)$ が存在し，$\mathcal{D}$ が余完備ならば，$\int^{X\in\mathcal{C}}T(X,X)$ が存在する．

(証明) 命題 2.5 と命題 2.6 より明らかである． □

命題 2.8 (圏論版フビニの定理). $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$ を圏とし，$T:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\times\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ を関手とする．次の 3 つのエンドのうち 1 つが存在するならば，残りの 2 つも存在し，それらは同型となる．

$$\int_{(X,Y)\in\mathcal{C}\times\mathcal{D}}T(X,X,Y,Y)\simeq\int_{X\in\mathcal{C}}\int_{Y\in\mathcal{D}}T(X,X,Y,Y)\simeq\int_{Y\in\mathcal{D}}\int_{X\in\mathcal{C}}T(X,X,Y,Y)$$

同様に次の 3 つのコエンドのうち 1 つが存在するならば，残りの 2 つも存在し，それらは同型となる．

$$\int^{(X,Y)\in\mathcal{C}\times\mathcal{D}}T(X,X,Y,Y)\simeq\int^{X\in\mathcal{C}}\int^{Y\in\mathcal{D}}T(X,X,Y,Y)\simeq\int^{Y\in\mathcal{D}}\int^{X\in\mathcal{C}}T(X,X,Y,Y)$$

(証明) 命題 2.5 と命題 2.6 よりエンド・コエンドはそれぞれ極限・余極限であるので，順序交換が可能となる． □

命題 2.9. $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$ を圏，$F:\mathcal{D}\to\mathcal{E},T:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を関手とする．このとき，F が連続関手で，$\int_{X\in\mathcal{C}}T(X,X)$ が存在するならば以下が成立する．

$$F\left(\int_{X\in\mathcal{C}}T(X,X)\right)\simeq\int_{X\in\mathcal{C}}F\circ T(X,X)$$

また，F が余連続関手で，$\int^{X\in\mathcal{C}}T(X,X)$ が存在するならば以下が成立する．

$$F\left(\int^{X\in\mathcal{C}}T(X,X)\right)\simeq\int^{X\in\mathcal{C}}F\circ T(X,X)$$

(証明) 命題 2.5 と命題 2.6 よりエンド・コエンドはそれぞれ極限・余極限であるので，成立する． □

命題 2.10. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を圏とし，$T:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を関手，D を $\mathcal{D}$ の対象とする．このとき，$\int_{X\in\mathcal{C}}T(X,X)$ が存在するならば以下が成立する．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(D,\int_{X\in\mathcal{C}}T(X,X)\right)\simeq\int_{X\in\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(D,T(X,X)\right)$$

また，$\int^{X\in\mathcal{C}}T(X,X)$ が存在するならば以下が成立する．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\int^{X\in\mathcal{C}}T(X,X),D\right)\simeq\int_{X\in\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(T(X,X),D\right)$$

(証明) 命題 2.5 と命題 2.6 よりエンド・コエンドはそれぞれ極限・余極限であるので，成立する． □

3. モノイド対象・コモノイド対象

命題 1.4 の群にあたる概念がモノイド対象である．この節では（コ）モノイド対象とその上の（余）加群を定義する．

定義 3.1 (モノイダル圏). $\mathcal{C}$ を圏，$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を関手，$a : (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$ を自然同型とする．また，I を $\mathcal{C}$ の対象，$l : I \otimes 1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}, r : 1_{\mathcal{C}} \otimes I \to 1_{\mathcal{C}}$ を自然同型とする．$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ が以下の 2 条件を満たすとき，**モノイダル圏** (monoidal category) であるという．また a を**結合子** (associator)，l, r をそれぞれ**左単位子** (left unit)，**右単位子** (right unit)，I を**単位対象** (unit object) という．

(pentagon axiom) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z, W に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes 1_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "1_X \otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

(triangle axiom) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

注意 3.2. モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ において，$\mathcal{C}$ におけるテンソル積であることを明示的に表したい場合は $\otimes_{\mathcal{C}}$ と表すことにする．

注意 3.3. 以降モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ に関する式や図式において，煩雑さを回避するために a, l, r や括弧を略する場合がある．マックレーンのコヒーレンス定理（[Mac12] の第 VII 章の 2 など）により，このように略記をしても問題無いことが知られている．

命題 3.4. $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，X, Y を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき以下が成立する．

(1) $l_{X \otimes Y} \circ a_{I,X,Y} = l_X \otimes 1_Y, 1_X \otimes r_Y \circ a_{X,Y,I} = r_{X \otimes Y}$

(2) $l_{I \otimes X} = 1_I \otimes l_X, r_{X \otimes I} = r_X \otimes 1_I, l_I = r_I$

(証明) (1) 以下の左の図式は a が自然同値であることと，triangle axiom により，下段の右の三角形以外は全て可換となり，これにより下段の右の三角形の可換性が成り立つ．よって $1_Z \circ (l_{X \otimes Y} \circ a_{I,X,Y}) =$

$1_Z \circ (l_X \otimes 1_Y)$ が成り立つ．$Z = I$ とすると，以下の右の図式の上面の可換性が成り立つ．また l が自然同型より，側面の可換性が成り立ち，それらにより下面の可換性が成り立つ．r に関する式も全く同様に示すことができる．

$$\begin{tikzcd}
 & (Z \otimes (I \otimes X)) \otimes Y \arrow[dr, "1_{(Z \otimes (I \otimes X)) \otimes Y}"] & \\
((Z \otimes I) \otimes X) \otimes Y \arrow[ur, "a_{Z,I,X} \otimes 1_Y"] \arrow[r, "(r_Z \otimes 1_X) \otimes 1_Y"] \arrow[d, "a_{Z \otimes I,X,Y}"'] & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "a_{Z,X,Y}"'] & (Z \otimes (I \otimes X)) \otimes Y \arrow[l, "(1_Z \otimes l_X) \otimes 1_Y"'] \arrow[d, "a_{Z,I \otimes X,Y}"] \\
(Z \otimes I) \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "r_Z \otimes (1_X \otimes 1_Y)"] \arrow[dr, "a_{Z,I,X \otimes Y}"'] & Z \otimes (X \otimes Y) & Z \otimes ((I \otimes X) \otimes Y) \arrow[l, "1_Z \otimes (l_X \otimes 1_Y)"'] \arrow[dl, "1_Z \otimes a_{I,X,Y}"] \\
 & Z \otimes (I \otimes (X \otimes Y)) \arrow[u, "1_Z \otimes l_{X \otimes Y}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes ((I \otimes X) \otimes Y) \arrow[rr, "1_I \otimes (l_X \otimes 1_Y)"] \arrow[dr, "1_I \otimes a_{I,X,Y}"] \arrow[dd, "l_{(I \otimes X) \otimes Y}"'] & & I \otimes (X \otimes Y) \arrow[dd, "l_{X \otimes Y}"] \\
 & I \otimes (I \otimes (X \otimes Y)) \arrow[ur, "1_I \otimes l_{X \otimes Y}"'] \arrow[dd, "l_{I \otimes (X \otimes Y)}"] & \\
(I \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, dashed, "l_X \otimes 1_Y"'] \arrow[dr, "a_{I,X,Y}"'] & & X \otimes Y \\
 & I \otimes (X \otimes Y) \arrow[ur, "l_{X \otimes Y}"'] &
\end{tikzcd}$$

(3) l および r の自然性より，以下の左と中央の図式は可換となる．また l および r が自然同型より，$l_{I \otimes X} = 1_I \otimes l_X, r_{X \otimes I} = r_X \otimes 1_I$ が成り立つ．よって (1) と triangle axiom および，上記の式より $l_I \otimes 1_I = l_{I \otimes I} \circ a_{I,I,I} = (1_I \otimes l_I) \circ a_{I,I,I} = r_I \otimes 1_I$ が成立する．よって以下の右の図式の上面が可換となる．また手前の側面は r の自然性より可換となり，奥の側面は自明に可換となる．よって $r_{I \otimes I}$ が同型より，下面も可換となり，$l_I = r_I$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
I \otimes (I \otimes X) \arrow[r, "l_{I \otimes X}"] \arrow[d, "1_I \otimes l_X"'] & I \otimes X \arrow[d, "l_X"] \\
I \otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes I \arrow[r, "r_{X \otimes I}"] \arrow[d, "r_X \otimes 1_I"'] & X \otimes I \arrow[d, "r_X"] \\
X \otimes I \arrow[r, "r_X"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[rr, "1_{I \otimes I}"] \arrow[dd, "r_I"'] & & I \otimes I \arrow[dd, "r_I"] \\
 & (I \otimes I) \otimes I \arrow[ul, "l_I \otimes 1_I"] \arrow[ur, "r_I \otimes 1_I"'] \arrow[dd, "r_{I \otimes I}"] & \\
I \arrow[rr, dashed, "1_I"] & & I \\
 & I \otimes I \arrow[ul, "l_I"] \arrow[ur, "r_I"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

定義 3.5 (対称モノイダル圏). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ を第一成分と第二成分を入れ替える関手，$c : - \otimes - \to (- \otimes -) \circ \tau$ を自然同型とする．$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r, c)$ が**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) であるとは，任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対して $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = 1_{X \otimes Y}$ が成立し，かつ以下の条件を満たすことをいう．

(hexagon axiom) $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z, W に対して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "c_{X,Y \otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "a_{Y,Z,X}"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "c_{X,Y} \otimes 1_Z"'] & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
 & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[ur, "1_Y \otimes c_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

例 3.6. $\mathbf{Set}, \mathbf{set}$ は直積をテンソル積，一点集合を単位対象，a, l, r を自明な自然同型，c を第一成分と第二成分の入れ替え関手とすると対称モノイダル圏となる．また $\mathbf{Vect}_k, \mathbf{vect}_K$ は通常のテンソル積をテンソル積，k を単位対象，a, l, r を自明な自然同型，c を入れ替え関手とすると対称モノイダル圏となる．ここで，非可換環 R に対して R の両側加群全体のなす圏はモノイダル圏であるが，対称モノイダル圏ではない．

定義 3.7 (モノイド対象). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{C}$ の対象 A と，射 $\mu_A : A \otimes A \to A, \eta_A : I \to A$ により以下の図式が可換となるとき，(A, μ_A, η_A) は $\mathcal{C}$ の**モノイド対象** (monoid object) であるという．左の図式が可換となる性質を**結合律** (associativity)，右の図式が可換となる性質を**単位律** (unit condition) という．

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "\mu_A \otimes 1_A"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "1_A \otimes \mu_A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "\mu_A"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes A \arrow[r, "\eta_A \otimes 1_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] & A \otimes I \arrow[l, "1_A \otimes \eta_A"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

定義 3.8 (コモノイド対象). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{C}$ の対象 C と，射 $\Delta_C : C \to C \otimes C, \varepsilon_C : C \to I$ により以下の図式が可換となるとき，$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ は $\mathcal{C}$ の**コモノイド対象** (comonoid object) であるという．左の図式が可換となる性質を**余結合律** (coassociativity)，右の図式が可換となる性質を**余単位律** (counit condition) という．

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[d, "\Delta_C \otimes 1_C"'] & C \arrow[l, "\Delta_C"'] \arrow[r, "\Delta_C"] & C \otimes C \arrow[d, "1_C \otimes \Delta_C"] \\
(C \otimes C) \otimes C \arrow[rr, "a_{C,C,C}"'] & & C \otimes (C \otimes C)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "{l_C}^{-1}"'] \arrow[d, "\Delta_C"] \arrow[dr, "{r_C}^{-1}"] & \\
I \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon_C \otimes 1_C"] \arrow[r, "1_C \otimes \varepsilon_C"'] & C \otimes I
\end{tikzcd}$$

例 3.9. $\mathbf{Set}$ のモノイド対象はモノイド[*2]，$\mathbf{Ab}$ のモノイド対象は環である．$\mathbf{Vect}_k$ のモノイド対象を k **代数** (k-algebra) という．$\mathbf{Vect}_k$ のコモノイド対象を k **余代数** (k-coalgebra) という．

定義 3.10 (モノイド対象の射). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$(A, \mu_A, \eta_A), (B, \mu_B, \eta_B)$ を $\mathcal{C}$ のモノイド対象とし，$f : A \to B$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の図式が可換となるとき f は**モノイド対象の射** (morphism of monoid objects) であるという．

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& I \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta_B"] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

定義 3.11 (コモノイド対象の射). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$(C, \Delta_C, \varepsilon_C), (D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ を $\mathcal{C}$ のコモノイド対象とし，$f : C \to D$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の図式が可換となるとき f は**コモノイド対象の射** (morphism of comonoid objects) であるという．

[*2] 単位元が存在する半群の意味のモノイドのことである．本稿ではモノイドとモノイド対象は異なる概念である．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[rr, "f \otimes f"'] & & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

定義 3.12 (モノイド対象の圏). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする．このとき $\mathcal{C}$ 上のモノイド対象を対象とし，モノイド対象の射を射とすると圏をなす．この圏を $\mathcal{C}$ **上のモノイド対象の圏** (category of monoid objects) といい，$\mathbf{Mon}(\mathcal{C})$ と表す．

定義 3.13 (コモノイド対象の圏). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする．このとき $\mathcal{C}$ 上のコモノイド対象を対象とし，コモノイド対象の射を射とすると圏をなす．この圏を $\mathcal{C}$ **上のコモノイド対象の圏** (category of comonoid objects) といい，$\mathbf{Comon}(\mathcal{C})$ と表す．

定義 3.14 (モノイド対象上の加群). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，(A, μ_A, η_A) を $\mathcal{C}$ 上のモノイド対象，M と M' を $\mathcal{C}$ の対象，$\mu_M : A \otimes M \to M, \mu_{M'} : M' \otimes A \to M'$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の図式が可換となるとき (M, μ_M) は A 上の**左加群** (left A-module) であるという．

$$\begin{tikzcd} (A \otimes A) \otimes M \arrow[rr, "a_{A,A,M}"] \arrow[d, "\mu_A \otimes 1_M"'] & & A \otimes (A \otimes M) \arrow[d, "1_A \otimes \mu_M"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\mu_M"'] & M & A \otimes M \arrow[l, "\mu_M"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \otimes M \arrow[r, "\eta_A \otimes 1_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\ & M \end{tikzcd}$$

また，以下の図式が可換となるとき $(M', \mu_{M'})$ は A 上の**右加群** (right A-module) であるという．

$$\begin{tikzcd} (M' \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "a_{M',A,A}"] \arrow[d, "\mu_{M'} \otimes 1_A"'] & & M' \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "1_{M'} \otimes \mu_A"] \\ M' \otimes A \arrow[r, "\mu_{M'}"'] & M' & M' \otimes A \arrow[l, "\mu_{M'}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \otimes A \arrow[d, "\mu_{M'}"'] & M' \otimes I \arrow[l, "1_{M'} \otimes \eta_A"'] \arrow[dl, "r_{M'}"] \\ M' & \end{tikzcd}$$

定義 3.15 (コモノイド対象上の余加群). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ を $\mathcal{C}$ 上のコモノイド対象，M と M' を $\mathcal{C}$ の対象，$\Delta_M : M \to M \otimes C, \Delta_{M'} : M' \to C \otimes M'$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の図式が可換となるとき (M, Δ_M) は C 上の**右余加群** (right C-comodule) であるという．

$$\begin{tikzcd} (M \otimes C) \otimes C \arrow[rr, "a_{M,C,C}"] & & M \otimes (C \otimes C) \\ M \otimes C \arrow[u, "\Delta_M \otimes 1_C"] & M \arrow[l, "\Delta_M"] \arrow[r, "\Delta_M"'] & M \otimes C \arrow[u, "1_M \otimes \Delta_C"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes C \arrow[r, "1_M \otimes \varepsilon_C"] & M \otimes I \\ M \arrow[u, "\Delta_M"] \arrow[ur, "r_M^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

また以下の図式が可換となるとき $(M', \Delta_{M'})$ は C 上の**左余加群** (left C-comodule) であるという．

$$\begin{tikzcd} (C \otimes C) \otimes M' \arrow[rr, "a_{C,C,M'}"] & & C \otimes (C \otimes M') \\ C \otimes M' \arrow[u, "\Delta_C \otimes 1_{M'}"] & M' \arrow[l, "\Delta_{M'}"] \arrow[r, "\Delta_{M'}"'] & C \otimes M' \arrow[u, "1_C \otimes \Delta_{M'}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \otimes M' & C \otimes M' \arrow[l, "\varepsilon_C \otimes 1_{M'}"'] \\ & M' \arrow[u, "\Delta_{M'}"'] \arrow[ul, "l_{M'}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

定義 3.16 (モノイド対象上の加群の射). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，(A, μ_A, η_A) を $\mathcal{C}$ 上のモノイド対象，$(M, \mu_M), (N, \mu_N)$ を A 上の左加群，$f : M \to N$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の左の図式が可換となるとき f は A 上の**左加群の射** (morphism of left A-modules) であるという．

また，$(M', \mu_{M'}), (N', \mu_{N'})$ を A 上の右加群，$f' : M' \to N'$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の右の図式が可換となるとき f' は A 上の**右加群の射** (morphism of right A-modules) であるという．

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "1_A \otimes f"] \arrow[d, "\mu_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\mu_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M' \otimes A \arrow[r, "f' \otimes 1_A"] \arrow[d, "\mu_{M'}"'] & N' \otimes A \arrow[d, "\mu_{N'}"] \\
M' \arrow[r, "f'"'] & N'
\end{tikzcd}
$$

定義 3.17 (コモノイド対象上の余加群の射). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ を $\mathcal{C}$ 上のコモノイド対象，$(M, \Delta_M), (N, \Delta_N)$ を C 上の右余加群，$f : M \to N$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の左の図式が可換となるとき f は C 上の**右余加群の射** (morphism of right C-comodules) であるという．

また，$(M', \Delta_{M'}), (N', \Delta_{N'})$ を C 上の左余加群，$f' : M' \to N'$ を $\mathcal{C}$ の射とする．以下の右の図式が可換となるとき f' は C 上の**左余加群の射** (morphism of left C-comodules) であるという．

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_M"'] & N \arrow[d, "\Delta_N"] \\
M \otimes C \arrow[r, "f \otimes 1_C"'] & N \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\Delta_{M'}"'] & N' \arrow[d, "\Delta_{N'}"] \\
C \otimes M' \arrow[r, "1_C \otimes f'"'] & C \otimes N'
\end{tikzcd}
$$

定義 3.18 (加群の圏，余加群の圏). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，(A, μ_A, η_A) を $\mathcal{C}$ 上のモノイド対象，$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ を $\mathcal{C}$ 上のコモノイド対象とする．A 上の左（右）加群を対象，A 上の左（右）加群の射を射とすると，圏をなす．この圏を A 上の**左（右）加群の圏** (category of left(right) A-modules) といい，${}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ ($\mathbf{Mod}_A(\mathcal{C})$) と表す．また，$C$ 上の右（左）余加群を対象，C 上の右（左）余加群の射を射とすると，圏をなす．この圏を C 上の**右（左）余加群の圏** (category of right(left) C-comodules) といい，$\mathbf{Comod}^C(\mathcal{C})$ (${}^C\mathbf{Comod}(\mathcal{C})$) と表す．

例 3.19. A をモノイドとするとき，${}_A\mathbf{Mod}(\mathbf{Set})$ は A の集合への左作用のなす圏，$\mathbf{Mod}_A(\mathbf{Set})$ は A の集合への右作用のなす圏である．R を環とするとき，${}_R\mathbf{Mod}(\mathbf{Ab})$ は ${}_R\mathbf{Mod}$，$\mathbf{Mod}_R(\mathbf{Ab})$ は $\mathbf{Mod}_R$ である．

定義 3.20 (圏上の圏). $\mathcal{D}$ を圏とする．対象が圏 $\mathcal{C}$ と関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ の組 $(\mathcal{C}, F)$ で，射 $\psi : (\mathcal{C}, F) \to (\mathcal{C}', F')$ が関手 $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ で $F' \circ \psi = F$ を満たすものとすると圏をなす．この圏を $\mathbf{Cat}/\mathcal{D}$ と書き，$\mathcal{D}$ **上の圏** (category over $\mathcal{D}$) という．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{C}' \arrow[dl, "F'"] \\
& \mathcal{D} &
\end{tikzcd}
$$

注意 3.21. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，$f : A \to B$ を $\mathcal{C}$ 上のモノイド対象の射，$g : (M, \mu_M), (N, \mu_N)$ を B 上の左加群の射とする．$\mu_M^A : A \otimes M \xrightarrow{f \otimes 1_M} B \otimes M \xrightarrow{\mu_M} M$ とおくと，(M, μ_M^A) は A 上の左加群の構造を持つ．このとき以下の左の図式より，$g : (M, \mu_M^A) \to (N, \mu_N^A)$ は A 上の左加群の射となり，${}_B\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ から ${}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ への関手 ${}_f\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ が得られる．ここで ${}_f\mathbf{Mod}(\mathcal{C})((M, \mu_M)) = (M, \mu_M^A)$，${}_f\mathbf{Mod}(\mathcal{C})(g) = g$ としている．ここで，$U_A :{}_A \mathbf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ を A 上の左加群の構造を忘れて $\mathcal{C}$ の対象とみなす忘却関手とすると，以下の右の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "f \otimes 1_M"] \arrow[d, "1_A \otimes g"'] \arrow[rr, bend left, "\mu_M^A"] & B \otimes M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "1_B \otimes g"'] & M \arrow[d, "g"] \\
A \otimes N \arrow[r, "f \otimes 1_N"'] \arrow[rr, bend right, "\mu_N^A"'] & B \otimes N \arrow[r, "\mu_N"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}_B\mathbf{Mod}(\mathcal{C}) \arrow[rr, "{}_f\mathbf{Mod}(\mathcal{C})"] \arrow[dr, "U_B"'] & & {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}) \arrow[dl, "U_A"] \\
& \mathcal{D} &
\end{tikzcd}$$

よって ${}_f\mathbf{Mod}(\mathcal{C}) :_B \mathbf{Mod}(\mathcal{C}) \to_A \mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ は $\mathbf{Cat}/\mathcal{D}$ の射となり，$\mathbf{Mon}(\mathcal{C})$ から $\mathbf{Cat}/\mathcal{D}$ への反変関手 $\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ が定まる. ここに，$\mathbf{Mod}(\mathcal{C})(A) =_A \mathbf{Mod}(\mathcal{C}), \mathbf{Mod}(\mathcal{C})(f) =_f \mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ である．

全く同様の議論により，$\mathbf{Comon}(\mathcal{C})$ の射 $f' : C \to D$ に対して，$\mathbf{Cat}/\mathcal{D}$ の射 $\mathbf{Comod}^f(\mathcal{C}) : \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}) \to \mathbf{Comod}^D(\mathcal{C})$ が定まり，$\mathbf{Comon}(\mathcal{C})$ から $\mathbf{Cat}/\mathcal{D}$ への関手 $\mathbf{Comod}(\mathcal{C})$ が定まる.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}) \arrow[rr, "\mathbf{Comod}^{f'}(\mathcal{C})"] \arrow[dr, "U_C"'] & & \mathbf{Comod}^D(\mathcal{C}) \arrow[dl, "U_D"] \\
& \mathcal{D} &
\end{tikzcd}$$

4. モノイダル閉圏・モノイダル余閉圏

この節では [Lyu21] に従い，モノイダル（余）閉圏の定義と諸性質について述べる．モノイダル余閉圏の場合の主張にのみ証明を与えているが，モノイダル閉圏の場合の証明も双対な議論により示すことができる．

定義 4.1 (モノイダル閉圏). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする．任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して，$- \otimes X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ($X \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$) が右随伴を持つとき，$\mathcal{C}$ は**モノイダル左（右）閉圏** (monoidal left(right) closed category) であるといい，この右随伴関手を $[X, -]^l$ ($[X, -]^r$) と書き，**左（右）内部ホム関手** (internal left(right) hom functor) という．

定義 4.2 (モノイダル余閉圏). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする. 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して，$X \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ($- \otimes X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$) が左随伴を持つとき，$\mathcal{C}$ は**モノイダル右（左）余閉圏** (monoidal right(left) coclosed category) であるといい，この左随伴関手を $\mathrm{cohom}(-,X)^r$ ($\mathrm{cohom}(-,X)^l$) と書き，**右（左）内部コホム関手** (internal right(left) cohom functor) という．

注意 4.3. $\mathcal{C}$ が対称モノイダル圏のとき，$\mathcal{C}$ の対象 X に対して $X\otimes - \simeq -\otimes X$ であるので，右（余）閉圏であることと左（余）閉圏であることは同じ概念となる．このとき $\mathcal{C}$ は対称モノイダル（余）閉圏という．また上記の定義の中で現れる随伴関手についても，左と右が同じ概念となるため，l, r を除いた記号で表し，内部（コ）ホム関手という．内部（コ）ホム関手をどの圏で考えているか明示したいときは，$[X,-]_{\mathcal{C}}$, $\mathrm{cohom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ と表すことにする．簡単のため以降はモノイダル左閉圏とモノイダル右余閉圏に限定して考えるが，左と右を逆にしたモノイダル圏においても同様の議論ができる．

注意 4.4. $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏とし，X,Y,Z を $\mathcal{C}$ の対象とする．$F_X = -\otimes X, G_X = [X,-]$ とすると，$F_X \dashv G_X$ である．随伴対 (F_X, G_X) の余単位射 $\varepsilon_X : F_X\circ G_X \to 1_{\mathcal{C}}$ を用いて $\mathrm{ev}_{X,Y} = (\varepsilon_X)_Y : [X,Y]\otimes X \to Y$ とする．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z\otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,[X,Y])$ より，任意の $f : Z\otimes X \to Y$ に対して，以下の左の図式が可換となる $\hat{f} : Z \to [X,Y]$ が一意的に存在する．同様にして，$\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏とし，X,Y,Z を $\mathcal{C}$ の対象とする．$F'_Y = \mathrm{cohom}(-,Y), G'_Y = Y\otimes -$ とすると，$F'_Y \dashv G'_Y$ である．随伴対 (F'_Y, G'_Y) の単位射 $\eta_Y : 1_{\mathcal{C}} \to G'_Y \circ F'_Y$ を用いて $\mathrm{coev}_{X,Y} = (\eta_Y)_X : X \to Y\otimes \mathrm{cohom}(X,Y)$ とする．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{cohom}(X,Y),Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y\otimes Z)$ より，任意の $f' : X \to Y\otimes Z$ に対して，以下の右の図式が可換となる $\tilde{f}' : \mathrm{cohom}(X,Y) \to Z$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} {[X,Y]\otimes X} \arrow[r, "\mathrm{ev}_{X,Y}"] & Y \\ Z\otimes X \arrow[u, "\hat{f}\otimes 1_X"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y\otimes Z \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,Y}"'] & Y\otimes \mathrm{cohom}(X,Y) \arrow[u, "1_Y\otimes \tilde{f}'"'] \end{tikzcd}$$

例 4.5. $(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$ は任意の集合 X に対して $-\times X \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,-)$ であるので，$[X,-] = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,-)$ となりモノイダル閉圏の構造を持つ．また $\mathbf{Set}$ の射 $g : X \to Y$ と X の元 x に対して，$\mathrm{ev}_{X,Y}(g,x) = g(x)$ で，任意の $f : Z\times X \to Y$ に対して，$\tilde{f} : Z \ni z \mapsto f(z,-) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$ となる．また，X,Y が有限集合のとき，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$ も有限集合なので，**set** もモノイダル閉圏となる．

例 4.6. R を可換環とする．$({}_R\mathbf{Mod}, \otimes_R, R)$ は任意の R 加群 M に対して $-\otimes_R M \dashv \mathrm{Hom}_R(M,-)$ を満たすので，モノイダル閉圏の構造を持つ．また ${}_R\mathbf{Mod}$ の射 $g : M \to N$ と M の元 m に対して，$\mathrm{ev}_{M,N}(g,m) = g(m)$ で，任意の $f : L\otimes M \to N$ に対して，$\tilde{f} : L \ni l \mapsto f(l,-) \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ となる．特に R が体 k の場合を考えると，$\mathbf{Vect}_k$ および $\mathbf{vect}_k$ はモノイダル閉圏となる．

例 4.7. $\mathbf{vect}_k$ の対象 U,V,W に対して，$\{u_i\}, \{v_j\}, \{w_k\}$ をそれぞれの基底とする．$h : V^*\otimes U \to W$ に対し，(v^j) を (v_j) の双対基底として，$h(v^j\otimes u_i)$ を $\{w_k\}$ を用いて表示したときの

各係数を $\alpha_{ijk}(h)$ とする．$\Phi_{U,V,W}(h) : X \ni u_i \mapsto \sum_{j,k} \alpha_{ijk}(h) v_j \otimes w_k \in V \otimes W$ とすると，$\Phi_{U,V,W} : \mathrm{Hom}_k(V^* \otimes U, W) \to \mathrm{Hom}_k(U, V \otimes W)$ が定まる．Φ は自然同型となり，任意の $\mathbf{vect}_k$ の対象 U に対して $U^* \otimes - \dashv U \otimes -$ が成り立つ．よって $\mathbf{vect}_k$ はモノイダル余閉圏である．特に $\mathrm{cohom}(U, V) \simeq V^* \otimes U$ である．Φ の構成は有限次元ベクトル空間であることに依存しており，同様の構成は $\mathbf{Vect}_k$ では行うことができない．$\mathbf{Vect}_k$ はモノイダル余閉圏とならないことが知られている．

命題 4.8. $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏とする．このとき，$\mathrm{cohom}(-,-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ は関手となる．

(証明) 任意に $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の射 $(f, g) : (X, Y) \to (X', Y')$ をとる．cohom の普遍性により，以下の図式が可換となる $\mathrm{cohom}(f, g) : \mathrm{cohom}(X, Y) \to \mathrm{cohom}(X', Y')$ が一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X',Y'}"] & Y' \otimes \mathrm{cohom}(X',Y') \arrow[r, "g\otimes 1"] & Y \otimes \mathrm{cohom}(X',Y') \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,Y}"'] & Y \otimes \mathrm{cohom}(X,Y) \arrow[ur, "1_Y\otimes\mathrm{cohom}(f,g)"'] &
\end{tikzcd}
$$

また，任意の $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の射 $(f, g) : (X, Y) \to (X', Y'), (f', g') : (X', Y') \to (X'', Y'')$ に対し，$\mathrm{cohom}((f', g') \circ (f, g))$ の一意性により，$\mathrm{cohom}(f', g') \circ \mathrm{cohom}(f, g) = \mathrm{cohom}((f', g') \circ (f, g))$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X'',Y''}"'] & Y'' \otimes \mathrm{cohom}(X'',Y'') \arrow[r, "g'\otimes 1"] \arrow[rr, bend left, "(g\circ g')\otimes 1"] & Y' \otimes \mathrm{cohom}(X'',Y'') \arrow[r, "g\otimes 1"] & Y \otimes \mathrm{cohom}(X'',Y'') \\
X' \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X',Y'}"'] & Y' \otimes \mathrm{cohom}(X',Y') \arrow[r, "g\otimes 1"] \arrow[ur, "1_{Y'}\otimes\mathrm{cohom}(f',g')"] & Y \otimes \mathrm{cohom}(X',Y') \arrow[ur, "1_Y\otimes\mathrm{cohom}(f',g')"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[uu, bend left, "f'\circ f"] \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,Y}"'] & Y \otimes \mathrm{cohom}(X,Y) \arrow[ur, "1_Y\otimes\mathrm{cohom}(f,g)"] \arrow[uurr, bend right, "1\otimes\mathrm{cohom}((f',g')\circ(f,g))"'] & &
\end{tikzcd}
$$

また $\mathrm{cohom}(1_X, 1_Y)$ の一意性により，$1_{\mathrm{cohom}(X,Y)} = \mathrm{cohom}(1_X, 1_Y)$ が成立する．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,Y}"] & Y \otimes \mathrm{cohom}(X,Y) \arrow[r, "1_Y\otimes 1"] & Y \otimes \mathrm{cohom}(X,Y) \\
X \arrow[u, "1_X"] \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,Y}"'] & Y \otimes \mathrm{cohom}(X,Y) \arrow[ur, "1_Y\otimes\mathrm{cohom}(1_X,1_Y)"'] &
\end{tikzcd}
$$

以上より，$\mathrm{cohom}(-,-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ は関手となる． □

命題 4.9. $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏とする．このとき，$[-,-] : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は関手となる．

補題 4.10. $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル右余閉圏とし，X, Y, Z, W を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{cohom}(\mathrm{cohom}(X,Y),Z),W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{cohom}(X,Y),Z\otimes W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y\otimes Z\otimes W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{cohom}(X,Y\otimes Z),W)$
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{cohom}(X,Y),I) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y\otimes I) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$
(3) $\mathrm{cohom}(X,I) \simeq X$

(証明) (1)，(2) は $\mathrm{cohom}(-,X) \dashv X\otimes -$ より自明である．
(3) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 Y に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{cohom}(X,I),Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,I\otimes Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ が成り立つ．よって米田の補題より $\mathrm{cohom}(X,I) \simeq X$ が成り立つ． □

補題 4.11. $(\mathcal{C},\otimes,a,I,l,r)$ をモノイダル左閉圏とし，X,Y,Z,W を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,[Y,[Z,W]]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes Y,[Z,W]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes Y\otimes Z,W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,[Y\otimes Z,W])$
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,[X,Y]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I\otimes X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$
(3) $[I,X] \simeq X$

注意 4.12. $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏とし，X,Y,Z を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき cohom の普遍性により，以下の図式が可換となる $\Delta_{X,Y,Z} : \mathrm{cohom}(X,Y) \to \mathrm{cohom}(Z,Y)\otimes\mathrm{cohom}(X,Z)$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
(Y\otimes\mathrm{cohom}(Z,Y))\otimes\mathrm{cohom}(X,Z) \arrow[r, "a"] & Y\otimes(\mathrm{cohom}(Z,Y)\otimes\mathrm{cohom}(X,Z)) \\
Z\otimes\mathrm{cohom}(X,Z) \arrow[u, "\mathrm{coev}_{Z,Y}\otimes 1"] & \\
X \arrow[u, "\mathrm{coev}_{X,Z}"] \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,Y}"'] & Y\otimes\mathrm{cohom}(X,Y) \arrow[uu, "1_Y\otimes\Delta_{X,Y,Z}"']
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏とし，X,Y,Z を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき $[-,-]$ の普遍性により，以下の図式が可換となる $\mu_{X,Y,Z} : [Y,Z]\otimes[X,Y] \to [X,Z]$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
([Y,Z]\otimes[X,Y])\otimes X \arrow[r, "a"] \arrow[dd, "\mu_{X,Y,Z}\otimes 1_X"'] & {[Y,Z]}\otimes([X,Y]\otimes X) \arrow[d, "1\otimes\mathrm{ev}_{X,Y}"] \\
 & {[Y,Z]}\otimes Y \arrow[d, "\mathrm{ev}_{Y,Z}"] \\
{[X,Z]}\otimes X \arrow[r, "\mathrm{ev}_{X,Z}"'] & Z
\end{tikzcd}$$

命題 4.13. $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏とし，X,Y,Z,W を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき以下の図式は可換となる．

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{cohom}(Y,X)\otimes\mathrm{cohom}(Z,Y))\otimes\mathrm{cohom}(W,Z) \arrow[rr, "a"] & & \mathrm{cohom}(Y,X)\otimes(\mathrm{cohom}(Z,Y)\otimes\mathrm{cohom}(W,Z)) \\
\mathrm{cohom}(Z,X)\otimes\mathrm{cohom}(W,Z) \arrow[u, "\Delta_{Z,X,Y}\otimes 1"] & & \mathrm{cohom}(Y,X)\otimes\mathrm{cohom}(W,Y) \arrow[u, "1_Y\otimes\Delta_{W,Y,Z}"'] \\
& \mathrm{cohom}(W,X) \arrow[ul, "\Delta_{W,X,Z}"] \arrow[ur, "\Delta_{W,X,Y}"'] &
\end{tikzcd}$$

(証明) 以下の図式手前の 2 つの側面，奥側の左の側面及び下面は Δ の定義より全て可換である．また上面はテンソル積の性質より明らかに可換である．よって $(1_X\otimes 1\otimes\Delta_{W,Y,Z})\circ(1_X\otimes\Delta_{W,X,Y})\circ\mathrm{coev}_{W,X}=(1_X\otimes\Delta_{Z,X,Y}\otimes 1)\circ(1_X\otimes\Delta_{W,X,Z})\circ\mathrm{coev}_{W,X}$ となる．$\mathrm{cohom}(W,X)$ の普遍性により，$(1\otimes\Delta_{W,Y,Z})\circ\Delta_{W,X,Y}=(\Delta_{Z,X,Y}\otimes 1)\circ\Delta_{W,X,Z}$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
& & X\otimes\mathrm{cohom}(Y,X)\otimes\mathrm{cohom}(Z,Y)\otimes\mathrm{cohom}(W,Z) & & \\
Y\otimes\mathrm{cohom}(Z,Y)\otimes\mathrm{cohom}(W,Z) \arrow[urr, "\mathrm{coev}_{Y,X}\otimes 1\otimes 1"] & & X\otimes\mathrm{cohom}(Z,X)\otimes\mathrm{cohom}(W,Z) \arrow[u, dashed, "1_X\otimes\Delta_{Z,X,Y}\otimes 1"] & & X\otimes\mathrm{cohom}(Y,X)\otimes\mathrm{cohom}(W,Y) \arrow[ull, "1_X\otimes 1\otimes\Delta_{W,Y,Z}"'] \\
& & Y\otimes\mathrm{cohom}(W,Y) \arrow[ull, "1_Y\otimes\Delta_{W,Y,Z}"] \arrow[urr, "\mathrm{coev}_{Y,X}\otimes 1"'] & & \\
Z\otimes\mathrm{cohom}(W,Z) \arrow[uu, "\mathrm{coev}_{Z,Y}\otimes 1"] \arrow[uurr, dashed, "\mathrm{coev}_{Z,X}\otimes 1"'] & & & & X\otimes\mathrm{cohom}(W,X) \arrow[uu, "1_X\otimes\Delta_{W,X,Y}"'] \arrow[uull, dashed, "1_X\otimes\Delta_{W,X,Z}"] \\
& & W \arrow[ull, "\mathrm{coev}_{W,Z}"] \arrow[uu, "\mathrm{coev}_{W,Y}"] \arrow[urr, "\mathrm{coev}_{W,X}"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

命題 4.14. $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏とし，X,Y,Z,W を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき以下の図式は可換となる．

$$\begin{tikzcd}
([Z,W]\otimes[Y,Z])\otimes[X,Y] \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "\mu_{Y,Z,W}\otimes 1_X"'] & & [Z,W]\otimes([Y,Z]\otimes[X,Y]) \arrow[d, "1\otimes\mu_{X,Y,Z}"] \\
{[Y,W]\otimes[X,Y]} \arrow[dr, "\mu_{X,Y,W}"'] & & {[Z,W]\otimes[X,Z]} \arrow[dl, "\mu_{X,Z,W}"] \\
& {[X,W]} &
\end{tikzcd}$$

定義 4.15 (コエンド対象). $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏とし，X を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき $\mathrm{cohom}(X,X)$ を X の**コエンド対象** (coendmorphism object) といい，$\mathrm{Coend}(X)$ または $\mathrm{C}(X)$ と表す．

定義 4.16 (エンド対象). $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏とし，X を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき $[X,X]$ を X の**エンド対象** (endmorphism object) といい，$\mathrm{End}(X)$ または $\mathrm{E}(X)$ と表す．

注意 4.17. $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏，X を $\mathcal{C}$ の対象，$\Delta_{\mathrm{C}(X)} = \Delta_{X,X,X} : \mathrm{Coend}(X) \to \mathrm{Coend}(X) \otimes \mathrm{Coend}(X)$ とする．cohom の普遍性により，以下の右側の図式が可換となる $\varepsilon_{\mathrm{Coend}(X)} : \mathrm{Coend}(X) \to I$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,X}"] \arrow[d, "\mathrm{coev}_{X,X}"'] & X \otimes \mathrm{C}(X) \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,X} \otimes 1_{\mathrm{C}(X)}"] & (X \otimes \mathrm{C}(X)) \otimes \mathrm{C}(X) \arrow[d, "a"] \\ X \otimes \mathrm{C}(X) \arrow[rr, "1_X \otimes \Delta_{\mathrm{C}(X)}"'] & & X \otimes (\mathrm{C}(X) \otimes \mathrm{C}(X)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \otimes I \\ X \arrow[ur, "r_X^{-1}"] \arrow[r, "\mathrm{coev}_{X,X}"'] & X \otimes \mathrm{C}(X) \arrow[u, "1_X \otimes \varepsilon_{\mathrm{C}(X)}"'] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏，X を $\mathcal{C}$ の対象，$\mu_{\mathrm{End}(X)} = \mu_{X,X,X} : \mathrm{End}(X) \otimes \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(X)$ とする．$[-,-]$ の普遍性により，以下の右側の図式が可換となる $\eta_{\mathrm{End}(X)} : I \to \mathrm{End}(X)$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{E}(X) \otimes \mathrm{E}(X)) \otimes X \arrow[rr, "\mu_{\mathrm{E}(X)} \otimes 1_X"] \arrow[d, "a"'] & & \mathrm{E}(X) \otimes X \arrow[d, "\mathrm{ev}_{X,X}"] \\ \mathrm{E}(X) \otimes (\mathrm{E}(X) \otimes X) \arrow[r, "1_{\mathrm{E}(X)} \otimes \mathrm{ev}_{X,X}"'] & \mathrm{E}(X) \otimes X \arrow[r, "\mathrm{ev}_{X,X}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{E}(X) \otimes X \arrow[r, "\mathrm{ev}_{X,X}"] & X \\ I \otimes X \arrow[u, "\eta_{\mathrm{E}(X)} \otimes 1_X"] \arrow[ur, "l_X"'] & \end{tikzcd}$$

補題 4.18. $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏，X を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $(\mathrm{Coend}(X), \Delta_{\mathrm{Coend}(X)}, \varepsilon_{\mathrm{Coend}(X)})$ は $\mathcal{C}$ のコモノイド対象である．

(2) $(X, \Delta_X = \mathrm{coev}_{X,X})$ は $\mathrm{Coend}(X)$ 上の右余加群である．

(証明) (1) 命題 4.13 において $Y = Z = W = X$ とすると，余結合律が成立する．また余単位律が成立することは定義より明らかである．

(2)$\Delta_X, \Delta_{\mathrm{Coend}(X)}, \varepsilon_{\mathrm{Coend}(X)}$ の定義より明らかである． □

補題 4.19. $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏，X を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $(\mathrm{End}(X), \mu_{\mathrm{E}(X)}, \eta_{\mathrm{End}(X)})$ は $\mathcal{C}$ のモノイド対象である．

(2) $(X, \mu_X = \mathrm{ev}_{X,X})$ は $\mathrm{End}(X)$ 上の左加群である．

命題 4.20. $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏とし．$\mathcal{D}$ を圏とする．$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とし，M を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき $\mathrm{CW}(\mathrm{cohom} \circ (F \times F^{\mathrm{op}}), M))$ と $\mathrm{Nat}(F, F \otimes M)$ は一対一に対応する．ただし，$F \otimes M$ は $\mathcal{D}$ の射 $f : X \to Y$ に対して $F(f) \otimes 1_M : F(X) \otimes M \to F(Y) \otimes M$ を対応させる関手とする．

(証明) $\mathrm{cohom}(-,-) \dashv (- \otimes -)$ より，任意の $\mathcal{D}$ の対象 X に対して，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{cohom}(F(X), F(X)), M) \ni \sigma_X \mapsto (1_{F(X)} \otimes \sigma_X) \circ \Delta_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), F(X) \otimes M)$$

という一対一対応が存在する．あとは，σ が余楔であることと，$(1_F \otimes \sigma) \circ \Delta_{F(-)}$ が自然変換であることの同値性を示せばよい．任意に $\mathcal{D}$ の射 $f : X \to Y$ をとる．

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "\Delta_{F(X)}"] \arrow[rrrr, bend left, "((1_F\otimes\sigma)\circ\Delta_{F(-)})_X"] \arrow[dr, "\mathrm{coev}_{F(X),F(Y)}"] \arrow[dd, "F(f)"'] & & F(X)\otimes \mathrm{C}(F(X)) \arrow[rr, "1_{F(X)}\otimes\sigma_X"] \arrow[dr, "F(f)\otimes 1_{\mathrm{C}(F(X))}"] & & F(X)\otimes M \arrow[dd, "F(f)\otimes 1_M"] \\
& F(Y)\otimes \mathrm{cohom}(F(X),F(Y)) \arrow[rr, "1_{F(Y)}\otimes\mathrm{cohom}(1_{F(X)},F(f))"] \arrow[dr, "1_{F(Y)}\otimes\mathrm{cohom}(F(f),1_{F(Y)})"'] & & F(Y)\otimes \mathrm{C}(F(X)) \arrow[dr, "1_{F(Y)}\otimes\sigma_X"] & \\
F(Y) \arrow[rr, "\Delta_{F(Y)}"'] \arrow[rrrr, bend right, "((1_F\otimes\sigma)\circ\Delta_{F(-)})_Y"'] & & F(Y)\otimes \mathrm{C}(F(Y)) \arrow[rr, "1_{F(Y)}\otimes\sigma_Y"'] & & F(Y)\otimes M
\end{tikzcd}
$$

ここで下側の平行四辺形の図式の可換性は σ が余楔であることを表し，外側の図式の可換性は $(1_F \otimes \sigma) \circ \Delta_{F(-)}$ が自然変換であることを表している．それ以外の図式は定義より可換となるので，σ が余楔であることと，$(1_F \otimes \sigma) \circ \Delta_{F(-)}$ が自然変換であることは同値である．

□

命題 4.21. $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏とし，$\mathcal{D}$ を圏とする．$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とし，M を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき $\mathrm{W}(M, [-,-] \circ F^{\mathrm{op}} \times F))$ と $\mathrm{Nat}(M \otimes F, F)$ は一対一に対応する．ただし，$M \otimes F$ は $\mathcal{D}$ の射 $f : X \to Y$ に対して $1_M \otimes F(f) : M \otimes F(X) \to M \otimes F(Y)$ を対応させる関手とする．

定義 4.22 (関手のコエンド対象). $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏，$\mathcal{D}$ を圏とし，$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とする．$\mathrm{Coend}(\mathrm{cohom} \circ (F \times F^{\mathrm{op}}))$ が存在するとき，これを F の**コエンド対象**といい，$\mathrm{Coend}(F)$ または $\mathrm{C}(F)$ と表す．

定義 4.23 (関手のエンド対象). $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏，$\mathcal{D}$ を圏とし，$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とする．$\mathrm{End}([-,-] \circ (F \times F^{\mathrm{op}}))$ が存在するとき，これを F の**エンド対象**といい，$\mathrm{End}(F)$ または $\mathrm{E}(F)$ と表す．

命題 4.24. $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏とし．$\mathcal{D}$ を圏とする．$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を $\mathrm{Coend}(F)$ が存在する関手とする．このとき $\mathrm{Coend}(F)$ により定まる余楔を σ とし，$\Delta_F = (1_F \otimes \sigma) \circ \Delta_{F(-)}$ と定義する．このとき以下が成立する．

(1) Δ_F は自然変換である．

(2) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 M と，任意の自然変換 $\varphi : F \to F \otimes M$ に対して，以下の図式が可換となる $\tilde{\varphi} : \mathrm{Coend}(F) \to M$ が一意的に存在する．つまり，$\mathrm{Nat}(F, F \otimes -)$ は $\mathrm{Coend}(F)$ により表現される．

$$
\begin{tikzcd}
& F \otimes M \\
F \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\Delta_F"'] & F \otimes \mathrm{Coend}(F) \arrow[u, "1_F\otimes\tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}
$$

(3) $\mathrm{Coend}(F)$ は $\mathcal{C}$ 上ののコモノイド対象である．

(4) 任意の $\mathcal{D}$ の対象 X に対して，$F(X)$ は $\mathrm{Coend}(F)$ 上の右余加群となる．

(5) 任意の $\mathcal{D}$ の射 $f : X \to Y$ に対して，$F(f) : F(X) \to F(Y)$ は $\mathrm{Coend}(F)$ 上の右余加群の射である．

(証明) (1) 命題 4.20 において，$M = \mathrm{C}(F)$ とすると，σ と Δ_F が対応し，σ が余楔より，Δ_F は自然変換となる．

(2) $\varphi : F \to F \otimes M$ は自然変換より命題 4.20 により対応する余楔 $\varphi' : \mathrm{cohom} \circ (F \times F^{\mathrm{op}}) \to M$ が一意的に存在し，以下の左の図式が可換となる．また，$C(F)$ の普遍性より $\mathcal{C}$ の射 $\tilde{\varphi} : C(F) \to M$ が一意的に存在し，以下の右の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & F(X) \otimes M \\
F(X) \arrow[ur, "\varphi_X"] \arrow[r, "\Delta_{F(X)}"'] & F(X) \otimes C(F(X)) \arrow[u, "1_F \otimes \varphi'_X"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M \\
\mathrm{cohom} \circ (F \times F^{\mathrm{op}}) \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[r, "\sigma"'] & C(F) \arrow[u, "\exists ! \tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}
$$

よって，$\varphi_X = (1_{F(X)} \otimes \varphi'_X) \circ \Delta_{F(X)} = (1_{F(X)} \otimes (\tilde{\varphi} \circ \sigma_X)) \circ \Delta_{F(X)} = (1_{F(X)} \otimes \tilde{\varphi}) \circ (1_{F(X)} \otimes \sigma_X) \circ \Delta_{F(X)} = (1_{F(X)} \otimes \tilde{\varphi}) \circ \Delta_F(X) = ((1_F \otimes \tilde{\varphi}) \circ \Delta_F)_X$ である．よって $\varphi = (1_F \otimes \tilde{\varphi}) \circ \Delta_F$ となる．

(3) (2) で示した Δ_F の普遍性により，以下の図式を可換とする $\mathcal{C}$ の射 $\Delta_{\mathrm{C}(F)} : \mathrm{C}(F) \to \mathrm{C}(F) \otimes \mathrm{C}(F), \varepsilon_{\mathrm{C}(F)} : \mathrm{C}(F) \to I$ が定まる．

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\Delta_F"] \arrow[d, "\Delta_F"'] & F \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[r, "\Delta_F \otimes 1_{\mathrm{C}(F)}"] & (F \otimes \mathrm{C}(F)) \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[d, "a_{F(-),C(F),C(F)}"] \\
F \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[rr, "1_A \otimes \Delta_{\mathrm{C}(F)}"'] & & F \otimes (\mathrm{C}(F) \otimes \mathrm{C}(F))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & F \otimes I \\
F \arrow[ur, "r^{-1}_{F(-)}"] \arrow[r, "\Delta_F"'] & F \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[u, "1_A \otimes \varepsilon_{\mathrm{C}(F)}"']
\end{tikzcd}
$$

命題 4.13 の証明と同様の議論により以下の図式から $\mathrm{C}(F)$ の余結合律が従う．また余単位律が成立することは定義より明らかである．

$$
\begin{tikzcd}
 & & F \otimes \mathrm{C}(F) \otimes \mathrm{C}(F) \otimes \mathrm{C}(F) & & \\
F \otimes \mathrm{C}(F) \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[urr, "\Delta_F \otimes 1_{\mathrm{C}(F)} \otimes 1_{\mathrm{C}(F)}"] & & F \otimes \mathrm{C}(F) \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[u, dashed, "1_{\mathrm{C}(F)} \otimes \Delta_{\mathrm{C}(F)} \otimes 1_{\mathrm{C}(F)}"] & & F \otimes \mathrm{C}(F) \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[ull, "1_{\mathrm{C}(F)} \otimes 1_{\mathrm{C}(F)} \otimes \Delta_F(C)"'] \\
 & & F \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[ull, "1_F \otimes \Delta_{\mathrm{C}(F)}"] \arrow[urr, "\Delta_F \otimes 1_{\mathrm{C}(F)}"'] & & \\
F \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[uu, "\Delta_F \otimes 1_{\mathrm{C}(F)}"] \arrow[uurr, dashed, "\Delta_F \otimes 1_{\mathrm{C}(F)}"'] & & & & F \otimes \mathrm{C}(F) \arrow[uu, "1_F \otimes \Delta_{\mathrm{C}(F)}"'] \arrow[uull, dashed, "1_F \otimes \Delta_{\mathrm{C}(F)}"] \\
 & & F \arrow[ull, "\Delta_F"] \arrow[uu, "\Delta_F"] \arrow[urr, "\Delta_F"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(4) 任意に $\mathcal{D}$ の対象 X をとる．(3) の証明で $\Delta_{\mathrm{C}(F)}, \varepsilon_{\mathrm{C}(F)}$ 定義した図式に X を代入すると $F(X), \Delta_F(X)$ は $\mathrm{C}(F)$ 上の右余加群であることが分かる．

(5) Δ_F が自然変換であることから明らかである． □

命題 4.25. $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏とし，$\mathcal{D}$ を圏とする．$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_0$ を $\mathrm{End}(F)$ が存在する関手とする．このとき $\mathrm{End}(F)$ により定まる楔を σ とするとき，$\mu_F = \mu_{F(-)} \circ (\sigma \otimes 1_F)$ と定義する．このとき以下が成立する．

(1) μ_F は自然変換である．

(2) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 M と，任意の自然変換 $\varphi : M \otimes F \to F$ に対して，以下の図式が可換となる $\hat{\varphi} : M \to \mathrm{End}(F)$ が一意的に存在する．つまり，$\mathrm{Nat}(- \otimes F, F)$ は $\mathrm{End}(F)$ により表現される．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}(F) \otimes F \arrow[r, "\mu_F"] & F \\ M \otimes F \arrow[u, "\hat{\varphi}\otimes 1_F"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

(3) $\mathrm{End}(F)$ は $\mathcal{C}$ 上のモノイド対象である．

(4) 任意の $\mathcal{D}$ の対象 X に対して，$F(X)$ は $\mathrm{End}(F)$ 上の左加群となる．

(5) 任意の $\mathcal{D}$ の射 $f : X \to Y$ に対して，$F(f) : F(X) \to F(Y)$ は $\mathrm{End}(F)$ 上の左加群の射である．

5. 加群圏

モノイダル圏と加群圏[*3] は代数における環と加群に対応する．対称モノイダル圏は環と加群の理論における可換環に相当するため，対称モノイダル圏に限って議論を行う場合，この節の左右に関する概念は同じものとなる．

定義 5.1 (左加群圏). $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とし，$\mathcal{M}$ を圏とする．関手 $\otimes_{\mathcal{M}} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ と，自然同型 $m : (- \otimes_{\mathcal{C}} -) \otimes_{\mathcal{M}} - \to - \otimes_{\mathcal{M}} (- \otimes_{\mathcal{M}} -), \check{l} : I \otimes_{\mathcal{M}} 1_{\mathcal{M}} \to 1_{\mathcal{M}}$ に対して，$(\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{M}}, m, \check{l})$ が以下の 2 条件を満たすとき，$\mathcal{C}$ **上の左加群圏** (left $\mathcal{C}$-module category) であるという．

(pentagon axiom) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して以下の図式が可換となる．

[*3] 加群圏は英語で “module category” と表される．一方加群の圏は “category of modules” と表される．これらの言葉は英語においても日本語においても似ているが，その意味は異なるので注意すること

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& ((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \otimes_{\mathcal{M}} M \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes_{\mathcal{M}} 1_M"'] \arrow[dr, "m_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z, M}"] & \\
(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z)) \otimes_{\mathcal{M}} M \arrow[d, "m_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z, M}"'] & & (X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{M}} (Z \otimes_{\mathcal{M}} M) \arrow[d, "m_{X,Y,Z \otimes_{\mathcal{M}} M}"] \\
X \otimes_{\mathcal{M}} ((Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \otimes_{\mathcal{M}} M) \arrow[rr, "1_X \otimes m_{Y,Z,M}"] & & X \otimes_{\mathcal{M}} (Y \otimes_{\mathcal{M}} (Z \otimes_{\mathcal{M}} M))
\end{tikzcd}$$

(triangle axiom) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して以下の図式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes_{\mathcal{C}} I) \otimes_{\mathcal{M}} M \arrow[rr, "m_{X,I,M}"] \arrow[dr, "r_X \otimes_{\mathcal{M}} 1_M"'] & & X \otimes_{\mathcal{M}} (I \otimes_{\mathcal{M}} M) \arrow[dl, "1_X \otimes_{\mathcal{M}} \check{l}_M"] \\
& X \otimes_{\mathcal{M}} M &
\end{tikzcd}$$

定義 5.2 (右加群圏). $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とし，$\mathcal{M}$ を圏とする．関手 $\otimes_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ と， 自然同型 $m : (- \otimes_{\mathcal{M}} -) \otimes_{\mathcal{M}} - \to - \otimes_{\mathcal{M}} (- \otimes_{\mathcal{C}} -), \check{r} : 1_{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{M}} I \to 1_{\mathcal{M}}$ に対して，$(\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{M}}, m, \check{r})$ が以下の 2 条件を満たすとき，$\mathcal{C}$ **上の右加群圏** (right $\mathcal{C}$-module category) であるという.

(pentagon axiom) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して以下の図式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& ((M \otimes_{\mathcal{M}} X) \otimes_{\mathcal{M}} Y) \otimes_{\mathcal{M}} Z \arrow[dl, "m_{M,X,Y} \otimes_{\mathcal{M}} 1_Z"'] \arrow[dr, "m_{M \otimes_{\mathcal{M}} X, Y, Z}"] & \\
(M \otimes_{\mathcal{M}} (X \otimes_{\mathcal{C}} Y)) \otimes_{\mathcal{M}} Z \arrow[d, "m_{M, X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z}"'] & & (M \otimes_{\mathcal{C}} X) \otimes_{\mathcal{M}} (Y \otimes_{\mathcal{M}} Z) \arrow[d, "m_{M,X,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
M \otimes_{\mathcal{M}} ((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[rr, "1_M \otimes a_{X,Y,Z}"] & & M \otimes_{\mathcal{M}} (X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}$$

(triangle axiom) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 X と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して以下の図式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_{\mathcal{M}} I) \otimes_{\mathcal{M}} X \arrow[rr, "m_{M,I,X}"] \arrow[dr, "\check{r}_M \otimes_{\mathcal{M}} 1_X"'] & & M \otimes_{\mathcal{M}} (I \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[dl, "1_M \otimes_{\mathcal{M}} l_X"] \\
& M \otimes_{\mathcal{M}} X &
\end{tikzcd}$$

定義 5.3 (左加群関手). $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とし，$(\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{M}}, m, \check{l}), (\mathcal{M}', \otimes_{\mathcal{M}'}, m', \check{l}')$ を左加群圏とする．関手 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ と，自然同型 $s : F(- \otimes_{\mathcal{M}} -) \to - \otimes_{\mathcal{M}'} F(-)$ に対して，(F, s) が任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して，以下の 2 つの図式が可換となるとき，$\mathcal{C}$ **上の左加群関手** (left $\mathcal{C}$-module functor) であるという.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F(((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{M}} M)) \arrow[dl, "F(m_{X,Y,M})"'] \arrow[dr, "s_{X\otimes_{\mathcal{C}} Y, M}"] & \\
F((X \otimes_{\mathcal{M}} (Y \otimes_{\mathcal{M}} M)) \arrow[d, "s_{X, Y\otimes_{\mathcal{M}} M}"'] & & (X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{M}'} F(M) \arrow[d, "m'_{X,Y,F(M)}"] \\
X \otimes_{\mathcal{M}'} F(Y \otimes_{\mathcal{M}} M) \arrow[rr, "1_X \otimes s_{Y,M}"] & & X \otimes_{\mathcal{M}'} (Y \otimes_{\mathcal{M}'} (F(M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(I \otimes_{\mathcal{M}} M) \arrow[rr, "s_{I,M}"] \arrow[dr, "F(\check{l}_M)"'] & & I \otimes_{\mathcal{M}'} F(M) \arrow[dl, "\check{l}'_{F(M)}"] \\
 & F(M) &
\end{tikzcd}$$

定義 5.4 (右加群関手). $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, a, I, l, r)$ をモノイダル圏とし，$(\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{M}}, m, \check{r}), (\mathcal{M}', \otimes_{\mathcal{M}'}, m', \check{r}')$ を右加群圏とする．関手 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ と，自然同型 $s : F(- \otimes_{\mathcal{M}} -) \to F(-) \otimes_{\mathcal{M}'} -$ に対して，(F, s) が任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して，以下の 2 つの図式が可換となるとき，$\mathcal{C}$ **上の右加群関手** (right $\mathcal{C}$-module functor) であるという．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F(((M \otimes_{\mathcal{M}} X) \otimes_{\mathcal{M}} Y)) \arrow[dl, "F(m_{M,X,Y})"'] \arrow[dr, "s_{M\otimes_{\mathcal{M}} X, Y}"] & \\
F((M \otimes_{\mathcal{M}} (X \otimes_{\mathcal{C}} Y)) \arrow[d, "s_{M, X\otimes_{\mathcal{C}} Y}"'] & & F(M \otimes_{\mathcal{M}} X) \otimes_{\mathcal{M}'} Y \arrow[d, "s_{M,X} \otimes_{\mathcal{M}'} 1_Y"] \\
F(M) \otimes_{\mathcal{M}'} (X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & & (F(M) \otimes_{\mathcal{M}'} X) \otimes_{\mathcal{M}'} Y \arrow[ll, "m'_{F(M),X,Y}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(M \otimes_{\mathcal{M}} I) \arrow[rr, "s_{M,I}"] \arrow[dr, "F(\check{r}_M)"'] & & F(M) \otimes_{\mathcal{M}'} I \arrow[dl, "\check{r}'_{F(M)}"] \\
 & F(M) &
\end{tikzcd}$$

例 5.5. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，X を $\mathcal{C}$ の対象，C を $\mathcal{C}$ 上のコモノイド対象，M を C 上の右余加群とする．$\Delta_{X\otimes M} = 1_X \otimes \Delta_M$ とおくと，$(X \otimes M, \Delta_{X\otimes M})$ は C 上の右余加群となる．$X \otimes (M, \Delta_M) = (X \otimes M, \Delta_{X\otimes M})$ と定めると，この作用により，$\mathbf{Comod}^C(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ 上の左加群圏の構造を持つ．また，$\mathcal{C}$ は自明な $\mathcal{C}$ 上の左加群圏の構造を持つ．ここで $U_C : \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ を忘却関手とすると，$\mathcal{C}$ の対象 Y を用いて，$U_C \otimes Y : \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ が定義できる．このとき $U_C, U_C \otimes Y$ は共に $\mathcal{C}$ 上の左加群関手である．

例 5.6. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，X を $\mathcal{C}$ の対象，A を $\mathcal{C}$ 上のモノイド対象，M を A 上の左加群とする．$\mu_{M\otimes X} = \mu_M \otimes 1_X$ とおくと，$(M \otimes X, \mu_{M\otimes X})$ は A 上の左加群となる．$(M, \mu_M) \otimes X = (M \otimes X, \mu_{M\otimes X})$ と定めると，この作用により，${}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ 上の右加群圏の構造を持つ．また，$\mathcal{C}$ は自明な $\mathcal{C}$ 上の右加群圏の構造を持つ．ここで $U_A : {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ を忘却関手とすると，$\mathcal{C}$ の対象 Y を用いて，$Y \otimes U_A : {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ が定義できる．このとき $U_A, Y \otimes U_A$ は共に $\mathcal{C}$ 上の右

加群関手である．

記号が煩雑になるのを防ぐため，以降は文脈によりどの圏のテンソル積か判断できる場合は $\otimes$ の添え字を省くことにする．

命題 5.7. $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$(\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{M}}, m, \check{l}), (\mathcal{M}', \otimes_{\mathcal{M}'}, m', \check{l}'), (\mathcal{M}'', \otimes_{\mathcal{M}''}, m'', \check{l}'')$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群圏とし，$(F, s) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}', (F', s') : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}''$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群関手とする．このとき，$(F', s') \circ (F, s)$ を $(F' \circ F, (s'_{-,F(-)} \circ F'(s_{-,-})))$ と定義すると，$(F', s') \circ (F, s)$ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}''$ への $\mathcal{C}$ 上の左加群関手となる．また $(1_{\mathcal{M}'}, 1) \circ (F, s) = (F, s), (F, s) \circ (1_{\mathcal{M}}, 1) = (F, s)$ が成立する．

(証明) 任意に $\mathcal{C}$ の対象 X, Y と，$\mathcal{M}$ の対象 M をとる．合成が $\mathcal{C}$ 上の左加群関手となることは以下の図式の可換性より分かる．この合成に関して $(1_{\mathcal{M}'}, 1), (1_{\mathcal{M}}, 1)$ が単位的であることは明らかである．

$$\begin{tikzcd}
(F' \circ F)((X \otimes Y) \otimes M) \arrow[rr, "F'(s_{X \otimes Y, M})"] \arrow[d, "(F' \circ F)(m_{X,Y,M})"'] \arrow[rrrr, bend left, "(s'_{-,F(-)} \circ F'(s_{-,-}))_{X \otimes Y, M}"] & & F'((X \otimes Y) \otimes F(M)) \arrow[rr, "s'_{X \otimes Y, F(M)}"] \arrow[d, "F'(m'_{X,Y,F(M)})"'] & & (X \otimes Y) \otimes (F' \circ F)(M) \arrow[d, "m''_{X,Y,(F' \circ F)(M)}"] \\
(F' \circ F)(X \otimes (Y \otimes M)) \arrow[r, "F'(s_{X, Y \otimes M})"'] \arrow[drr, bend right, "(s'_{-,F(-)} \circ F'(s_{-,-}))_{X, Y \otimes M}"'] & F'(X \otimes F(Y \otimes M)) \arrow[r, "F'(1_X \otimes s_{Y,M})"'] \arrow[dr, "s'_{X, F(Y \otimes M)}"'] & F'(X \otimes (Y \otimes F(M))) \arrow[r, "s'_{X, Y \otimes F(M)}"'] & X \otimes F'(Y \otimes F(M)) \arrow[r, "1_X \otimes s'_{Y, F(M)}"'] & X \otimes (Y \otimes (F' \circ F)(M)) \\
 & & X \otimes ((F' \circ F)(Y \otimes M) \arrow[ur, "1_X \otimes F'(s_{Y,M})"'] \arrow[urr, bend right, "1_X \otimes (s'_{-,F(-)} \circ F'(s_{-,-}))_{Y,M}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

命題 5.8. $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$(\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{M}}, m, \check{r}), (\mathcal{M}', \otimes_{\mathcal{M}'}, m', \check{r}'), (\mathcal{M}'', \otimes_{\mathcal{M}''}, m'', \check{r}'')$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群圏とし，$(F, s) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}', (F', s') : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}''$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群関手とする．このとき，$(F', s') \circ (F, s)$ を $(F' \circ F, (s'_{F(-),-} \circ F'(s_{-,-})))$ と定義すると，$(F', s') \circ (F, s)$ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}''$ への $\mathcal{C}$ 上の右加群関手となる．また $(1_{\mathcal{M}'}, 1) \circ (F, s) = (F, s), (F, s) \circ (1_{\mathcal{M}}, 1) = (F, s)$ が成立する．

(証明) 命題 5.7 と同様に示すことができる． $\square$

注意 5.9. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{C}$ 上の左 (右) 加群圏を対象，$\mathcal{C}$ 上の左 (右) 加群関手を射とすると命題 5.7 と命題 5.8 より，これらは圏をなす．$\mathcal{C}$ 上の左加群圏のなす圏を ${}_{\mathcal{C}}\mathbf{Mod}$，$\mathcal{C}$ 上の右加群圏のなす圏を $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}$ と表す．また $\mathbf{Cat}/\mathcal{C}$ の部分圏で，対象が $\mathcal{C}$ 上の左加群圏 $\mathcal{M}$ と左加群関手 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ の組 $(\mathcal{M}, F)$ で，射が $\mathbf{Cat}/\mathcal{C}$ の射で左加群関手となるものとするとこれらは圏をなす．この圏を ${}_{\mathcal{C}}\mathbf{Mod}/\mathcal{C}$ と表す．同様に $\mathbf{Cat}/\mathcal{C}$ の部分圏で，対象が $\mathcal{C}$ 上の右加群圏 $\mathcal{M}$ と右加群

関手 $F:\mathcal{M}\to\mathcal{C}$ での組 $(\mathcal{M},F)$ で，射が $\mathbf{Cat}/\mathcal{C}$ の射で右加群関手となるものとするとこれらは圏をなす．この圏を $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}/\mathcal{C}$ と表す．

定義 5.10 (左加群自然変換). $(\mathcal{C},\otimes_{\mathcal{C}},a,I,l,r)$ をモノイダル圏，$(\mathcal{M},\otimes_{\mathcal{M}},m,\check{l}),(\mathcal{M}',\otimes_{\mathcal{M}'},m',\check{l}')$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群圏，$(F,s),(F',s'):\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群関手とし，$\varphi:F\to F'$ を自然変換とする．任意の $\mathcal{C}$ の対象 X と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して，以下の図式が可換となるとき φ は $\mathcal{C}$ **上の左加群自然変換** (left $\mathcal{C}$-natural transformation) であるという．また F から F' への $\mathcal{C}$ 上の左加群自然変換全体を ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Nat}(F,F')$ と表す．

$$\begin{array}{ccc}
F(X\otimes_{\mathcal{M}}M) & \xrightarrow{s_{X,M}} & X\otimes_{\mathcal{M}'}F(M)\\
{\scriptstyle\varphi_{X\otimes_{\mathcal{M}}M}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_X\otimes_{\mathcal{M}'}\varphi_M}\\
F'(X\otimes_{\mathcal{M}}M) & \xrightarrow[s'_{X,M}]{} & X\otimes_{\mathcal{M}'}F'(M)
\end{array}$$

定義 5.11 (右加群自然変換). $(\mathcal{C},\otimes_{\mathcal{C}},a,I,l,r)$ をモノイダル圏，$(\mathcal{M},\otimes_{\mathcal{M}},m,\check{r}),(\mathcal{M}',\otimes_{\mathcal{M}'},m',\check{r}')$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群圏，$(F,s),(F',s'):\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群関手とし，$\varphi:F\to F'$ を自然変換とする．任意の $\mathcal{C}$ の対象 X と任意の $\mathcal{M}$ の対象 M に対して，以下の図式が可換となるとき φ は $\mathcal{C}$ **上の右加群自然変換** (right $\mathcal{C}$-natural transformation) であるという．また F から F' への $\mathcal{C}$ 上の右加群自然変換全体を $\mathrm{Nat}_{\mathcal{C}}(F,F')$ と表す．

$$\begin{array}{ccc}
F(M\otimes_{\mathcal{M}}X) & \xrightarrow{s_{M,X}} & F(M)\otimes_{\mathcal{M}'}X\\
{\scriptstyle\varphi_{M\otimes_{\mathcal{M}}X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_M\otimes_{\mathcal{M}'}1_X}\\
F'(M\otimes_{\mathcal{M}}X) & \xrightarrow[s'_{M,X}]{} & F'(M)\otimes_{\mathcal{M}'}X
\end{array}$$

注意 5.12. 左（右）加群自然変換は，定義より明らかに通常の自然変換の合成に関して閉じている．

定義 5.13 ($\mathcal{C}$ 上のコエンド対象). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，$\mathcal{M},\mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群圏，$F:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群関手とする．ここで，任意の $\mathcal{M}'$ の対象 M に対して，${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Nat}(F,F\otimes M)$ は集合をなすと仮定する．このとき ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Nat}(F,F\otimes -):\mathcal{M}'\to\mathbf{Set}$ という関手が定まる．${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Nat}(F,F\otimes -)$ が表現可能であるとき，${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Nat}(F,F\otimes -)$ を表現する $\mathcal{M}'$ の対象を $\mathcal{C}$ **上のコエンド対象**といい，${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Coend}(F)$ と表す．

注意 5.14. 上記の ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Coend}(F)$ の定義を普遍性の言葉で書き直すと以下のようになる．

${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Coend}(F)$ は $\mathcal{M}'$ の対象 C と $\mathcal{C}$ 上の左加群自然変換 $\Delta_F:F\to F\otimes C$ の組 (C,Δ_F) で，任意の $\mathcal{M}'$ の対象 M と任意の $\mathcal{C}$ 上の左加群自然変換 $\varphi:F\to F\otimes M$ に対して $\mathcal{M}'$ の射 $\tilde{\varphi}:C\to M$ が一意的に存在して，$(1_F\otimes\tilde{\varphi})\circ\Delta_F=\varphi$ となるもののことである．

$$\begin{tikzcd}
 & F\otimes M \\
F \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\Delta_F"'] & F\otimes C \arrow[u, "1_F\otimes\tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

定義 5.15 ($\mathcal{C}$ 上のエンド対象). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，$\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群圏，$F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群関手とする．ここで，任意の $\mathcal{M}'$ の対象 M に対して，$\mathrm{Nat}_{\mathcal{C}}(M \otimes F, F)$ は集合をなすと仮定する．このとき $\mathrm{Nat}_{\mathcal{C}}(- \otimes F, F) : \mathcal{M}' \to \mathbf{Set}$ という関手が定まる．$\mathrm{Nat}_{\mathcal{C}}(- \otimes F, F)$ が表現可能であるとき，$\mathrm{Nat}_{\mathcal{C}}(- \otimes F, F)$ を表現する $\mathcal{M}'$ の対象を **$\mathcal{C}$ 上のエンド対象**といい，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(F)$ と表す.

注意 5.16. 上記の $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(F)$ の定義を普遍性の言葉で書き直すと以下のようになる.

$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(F)$ は $\mathcal{M}'$ の対象 A と $\mathcal{C}$ 上の右加群自然変換 $\mu_F : A \otimes F \to F$ の組 (A, μ_F) で，任意の $\mathcal{M}'$ の対象 M と任意の $\mathcal{C}$ 上の右加群自然変換 $\varphi : M \otimes F \to F$ に対して $\mathcal{M}'$ の射 $\hat{\varphi} : M \to A$ が一意的に存在して，$\mu \circ (\hat{\varphi} \otimes 1_F) = \varphi$ となるもののことである.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes F \arrow[r, "\mu_F"] & F \\
M \otimes F \arrow[u, "\hat{\varphi}\otimes 1_F"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

定義 5.17 ($\mathcal{C}$ 上の余楔). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，$\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群圏とし，更に $\mathcal{M}'$ は右余閉圏であるとする．$(F, s) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群関手，$\sigma : \mathrm{cohom} \circ (F \times F^{op}) \stackrel{..}{\to} W$ を余楔とする．任意の $\mathcal{M}$ の対象 M と任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して，以下の図式が可換となるとき，σ は **$\mathcal{C}$ 上の余楔** ($\mathcal{C}$-cowedge) であるという．また，$\mathrm{cohom} \circ (F \times F^{\mathrm{op}})$ から W への $\mathcal{C}$ 上の余楔全体を ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{CW}(\mathrm{cohom} \circ (F \times F^{\mathrm{op}}), M))$ と表す．ここで，上に˜のついている射は注意 4.4 において定義された射である.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cohom}(F(X \otimes M), X \otimes F(M)) \arrow[dl, "\widetilde{(1_X \otimes \Delta_{F(M)}) \circ s_{X,M}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{cohom}(1_{F(X\otimes M)}, s_{X,M})"] & \\
\mathrm{Coend}(F(M)) \arrow[dr, "\sigma_M"'] & & \mathrm{Coend}(F(X \otimes M)) \arrow[dl, "\sigma_{X\otimes M}"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

定義 5.18 ($\mathcal{C}$ 上の楔). $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，$\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群圏とし，更に $\mathcal{M}'$ は左閉圏であるとする．$(F, s) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群関手，$\sigma : W \to [-,-] \circ (F^{op} \otimes F)$ を楔とする．任意の $\mathcal{M}$ の対象 M と任意の $\mathcal{C}$ の対象 X に対して，以下の図式が可換となるとき，σ は **$\mathcal{C}$ 上の楔** ($\mathcal{C}$-wedge) であるという．また W から $[-,-] \circ (F^{op} \otimes F)$ への $\mathcal{C}$ 上の楔全体を $\mathrm{W}(W, [-,-] \circ (F^{op} \times F))$ と表す．ここで，上にˆのついている射は注意 4.4 において定義された射である.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "\sigma_M"'] \arrow[dr, "\sigma_{M\otimes X}"] & \\
\mathrm{End}(F(M)) \arrow[dr, "\widehat{s^{-1}_{M,X} \circ (\mu_{F(M)} \otimes 1_X)}"'] & & \mathrm{End}(F(M \otimes X)) \arrow[dl, "{[s^{-1}_{M,X}, 1_{F(M\otimes X)}]}"] \\
 & {[F(M) \otimes X, F(M \otimes X)]} &
\end{tikzcd}$$

命題 5.19. $\mathcal{C}$ をモノイダル右余閉圏とし．$\mathcal{M}$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群圏とする．$(F,s):\mathcal{M}\to\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群関手とし，M を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{CW}(\mathrm{cohom}\circ(F\times F^{\mathrm{op}}),M))$ と ${}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Nat}(F,F\otimes M)$ は一対一に対応する．

(証明) 以下の図式において，$(\bigstar)$ 以外の部分は全て可換となる．よって $(\bigstar)$ の可換性と，外側の長方形の可換性は等しい．$(\bigstar)$ の可換性は $\tilde{\psi}$ が $\mathcal{C}$ 上の余楔であることと同値で，外側の長方形の可換性は ψ が $\mathcal{C}$ 上の自然変換であることと同値であるので，題意が成り立つ．ここで，上に˜のついている射は注意 4.4 において定義された射である．

$$\begin{tikzcd}
F(X\otimes N) \arrow[rrr, "s_{X,N}"] \arrow[dr, "\mathrm{coev}_{X\otimes F(N),F(X\otimes N)}"] \arrow[drrr, phantom, ""] \arrow[ddd, "\psi_{X\otimes N}"'] \arrow[ddr, "\Delta_{F(X\otimes N)}"'] & & & X\otimes F(N) \arrow[dl, "1_X\otimes\Delta_{F(N)}"'] \arrow[ddd, "1_X\otimes\psi_N"] \\
& X\otimes F(N)\otimes\mathrm{cohom}(F(X\otimes N),X\otimes F(N)) \arrow[r, "1_{X\otimes F(N)}\otimes(\widetilde{1_X\otimes\Delta_{F(N)}\circ s_{X,N}})"] \arrow[dr, "1_{X\otimes F(N)}\otimes\mathrm{cohom}(1_{F(X\otimes N)},s_{X,N})"] & X\otimes F(N)\otimes\mathrm{Coend}(F(N)) \arrow[ddr, "1_{X\otimes F(N)}\otimes\widetilde{\psi_N}"] \arrow[d, phantom, "(\bigstar)"] & \\
& F(X\otimes N)\otimes\mathrm{Coend}(F(X\otimes N)) \arrow[r, "s_{X,N}\otimes 1_{\mathrm{Coend}(F(X\otimes N))}"'] \arrow[dl, "1_{F(X\otimes N)}\otimes\widetilde{\psi_{X\otimes N}}"'] & X\otimes F(N)\otimes\mathrm{Coend}(F(X\otimes N)) \arrow[dr, "1_{X\otimes F(N)}\otimes\widetilde{\psi_{X\otimes N}}"'] & \\
F(X\otimes N)\otimes M \arrow[rrr, "s_{X,N}\otimes 1_M"'] & & & X\otimes F(N)\otimes M
\end{tikzcd}$$

□

命題 5.20. $\mathcal{C}$ をモノイダル左閉圏とし．$\mathcal{M}$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群圏とする．$(F,s):\mathcal{M}\to\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群関手とし，M を $\mathcal{C}$ の対象とする．このとき $\mathrm{W}(W,[-,-]\circ(F^{op}\times F))$ と $\mathrm{Nat}_{\mathcal{C}}(M\otimes F,F)$ は一対一に対応する．

命題 5.21. $\mathcal{C}$ を余完備モノイダル圏，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ のモノイダル右余閉小部分圏とする．$\mathcal{M}$ を $\mathcal{C}_0$ 上の左加群圏とする．$(F,s):\mathcal{D}\to\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}_0$ 上の左加群関手とする．このとき，$\mathcal{C}$ の対象 D_1,D_2 を

$$D_1=\coprod_{f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{M})}\mathrm{cohom}(F(\mathrm{dom}(f)),F(\mathrm{cod}(f))),\quad D_2=\coprod_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}\mathrm{cohom}(F(X\otimes M),X\otimes F(M))$$

と定義する．また，$\mathcal{C}$ の射 u,v を任意の $\mathcal{M}$ の射 $f:M\to N$ と任意の $\mathcal{C}_0$ の対象 X に対して，以下の図式の普遍性により定義する．(図式の縦方向の射は自然な埋め込みである.）このとき，${}_{\mathcal{C}_0}\,\mathrm{Coend}(F)\simeq\mathrm{Coeq}(u,v)$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{cohom}(F(M),F(N)) \arrow[rr, bend left, "\mathrm{cohom}(F(f),1_{F(N)})"] \arrow[d, "\iota_f"'] & \mathrm{cohom}(F(X\otimes N),X\otimes F(N)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right, "\widetilde{(1_X\otimes\Delta_{F(N)})\circ s_{X,N}}"'] \arrow[d, "\iota_{X,N}"] & \mathrm{Coend}(F(N)) \arrow[dd, "\iota_{\mathrm{Coend}(F(N))}"] \\
D_1 \arrow[d, "\iota_{D_1}"'] & D_2 \arrow[dl, "\iota_{D_2}"] & \\
D_1\coprod D_2 \arrow[rr, "\exists!u"'] & & \coprod_{M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}\mathrm{Coend}(F(M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Coend}(F(M)) \arrow[ddd, bend left, "\iota_{\mathrm{Coend}(F(M))}"] \\
\mathrm{cohom}(F(M)), F(N)) \arrow[urr, bend left, "\mathrm{cohom}(1_{F(M)},F(f))"] \arrow[d, "\iota_f"'] & \mathrm{cohom}(F(X\otimes M), X\otimes F(M)) \arrow[r, "\mathrm{cohom}(1_{F(X\otimes M)},s_{X,M})"'] \arrow[d, "\iota_{X,M}"] & \mathrm{Coend}(F\otimes M) \arrow[dd, "\iota_{\mathrm{Coend}(F(M))}"'] \\
D_1 \arrow[d, "\iota_{D_1}"'] & D_2 \arrow[dl, "\iota_{D_2}"] & \\
D_1 \coprod D_2 \arrow[rr, "\exists ! v"'] & & \coprod_{M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})} \mathrm{Coend}(F(M))
\end{tikzcd}$$

(証明) 命題 2.6 と同様の議論で示すことができる． □

命題 5.22. $\mathcal{C}$ を完備モノイダル圏，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ のモノイダル左閉小部分圏とする．$\mathcal{M}$ を $\mathcal{C}_0$ 上の右加群圏とする．$(F,s):\mathcal{D}\to\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}_0$ 上の右加群関手とする．このとき，$\mathcal{C}$ の対象 D_1, D_2 を

$$D_1 = \prod_{f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{M})} [F(\mathrm{dom}(f)), F(\mathrm{cod}(f))], \quad D_2 = \prod_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})} [F(M)\otimes X, F(M\otimes X)]$$

と定義する．また，$\mathcal{C}$ の射 u, v を任意の $\mathcal{M}$ の射 $f: M\to N$ と任意の $\mathcal{C}_0$ の対象 X に対して，以下の図式の普遍性により定義する.（図式の縦方向の射は自然な射影である.）このとき，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F)\simeq\mathrm{Eq}(u,v)$ である.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})} \mathrm{End}(F(M)) \arrow[rrr, "\exists ! u"] \arrow[ddr, "p_{\mathrm{End}(F(N))}"] \arrow[dddr, bend right, "p_{\mathrm{End}(F(M\otimes X))}"'] & & & D_1 \prod D_2 \arrow[dl, "q_{D_1}"'] \arrow[d, "q_{D_2}"] \\
 & & D_1 \arrow[d, "q_f"] & D_2 \arrow[d, "q_{X,M}"] \\
 & \mathrm{End}(F(N)) \arrow[r, "{[F(f),1_{F(N)}]}"] & {[F(M),F(N)]} & {[F(M)\otimes X, F(M\otimes X)]} \\
 & \mathrm{End}(F(M\otimes X)) \arrow[urr, bend right, "{[s^{-1}_{M,X},1_{F(M\otimes X)}]}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\prod_{M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})} \mathrm{End}(F(M)) \arrow[rr, "\exists ! v"] \arrow[dd, "p_{\mathrm{End}(F(M))}"'] & & D_1 \prod D_2 \arrow[dl, "q_{D_1}"'] \arrow[d, "q_{D_2}"] \\
 & D_1 \arrow[d, "q_f"] & D_2 \arrow[d, "q_{X,M}"] \\
\mathrm{End}(F(M)) \arrow[r, "{[1_{F(M)},F(f)]}"] \arrow[rr, bend right, "s^{-1}_{M,X}\circ(\mu_{F(M)}\otimes 1_X)"'] & {[F(M),F(N)]} & {[F(M)\otimes X, F(M\otimes X)]}
\end{tikzcd}$$

(証明) 命題 2.5 と同様の議論で示すことができる． □

命題 5.23. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群圏，$F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ 上の左加群関手とする．${}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Coend}(F)$ が存在すると仮定するとき，以下が成立する．

(1) ${}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Coend}(F)$ は $\mathcal{C}$ 上のコモノイド対象である．
(2) 任意の $\mathcal{D}$ の対象 X に対して，$F(X)$ は ${}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Coend}(F)$ 上の右余加群となる．
(3) 任意の $\mathcal{D}$ の射 $f : X \to Y$ に対して，$F(f) : F(X) \to F(Y)$ は ${}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Coend}(F)$ 上の右余加群の射である．

(証明) 命題 4.24 と同様の議論で示すことができる． □

命題 5.24. $\mathcal{C}$ をモノイダル圏，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群圏，$F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ 上の右加群関手とする．$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(F)$ が存在すると仮定するとき，以下が成立する．

(1) $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(F)$ は $\mathcal{C}$ 上のモノイド対象である．
(2) 任意の $\mathcal{D}$ の対象 X に対して，$F(X)$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(F)$ 上の左加群となる．
(3) 任意の $\mathcal{D}$ の射 $f : X \to Y$ に対して，$F(f) : F(X) \to F(Y)$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(F)$ 上の左加群の射である．

(証明) 命題 4.25 と同様の議論で示すことができる． □

6. 淡中再構成定理とその応用

命題 6.1. $\mathcal{C}$ を完備モノイダル圏，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ のモノイダル左閉小部分圏とする．このとき以下の 2 つの対応は共に反変関手である．

$$\mathrm{End} : \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}_0}/\mathcal{C}_0 \ni (\mathcal{M}, F) \mapsto \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F) \in \mathbf{Mon}(\mathcal{C})$$

$$\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0) : \mathbf{Mon}(\mathcal{C}_0) \ni A \mapsto ({}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0), U_A) \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}_0}/\mathcal{C}_0$$

(証明) 任意の $\mathcal{C}_0$ のモノイド A に対して，例 5.6 より，${}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0)$ は右加群圏で $U_A : {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0) \to \mathcal{C}_0$ は右加群関手より，$\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0)$ は well-defined である．また注意 3.21 より $\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0)$ は反変関手である．また任意の右加群関手 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_0$ に対して，命題 5.22 より，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F)$ は $\mathbf{Mon}(\mathcal{C})$ の対象である．ここで任意に $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}_0}/\mathcal{C}_0$ の射 $(G, s) : (\mathcal{M}_1, (F_1, s_1)) \to (\mathcal{M}_2, (F_2, s_2))$ をとると，定義より $(F_2, s_2) \circ (G, s) = (F_1, s_1)$ である．注意 5.16 より $\mu_{F_i} : \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_i) \otimes F_i \to F_i$ は右加群自然変換である．$\mathcal{M}_1$ の対象 M に対して，$\mu^G_{F_2} : \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_2) \otimes F_1 \to F_1$ を $(\mu^G_{F_2})_M = (\mu_{F_2})_{G(M)}$ と定義すると任意の $\mathcal{M}_1$ の射 $f : M \to N$ に対して以下の右の図式が可換となり自然変換となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 \arrow[rr, "{(G,s)}"] \arrow[dr, "{(F_1,s_1)}"'] & & \mathcal{M}_2 \arrow[dl, "{(F_2,s_2)}"] \\
& \mathcal{C}_0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_2) \otimes F_2(G(M)) \arrow[r, "(\mu_{F_2})_{G(M)}"] \arrow[d, "1\otimes F_2(G(f))"'] & F_2(G(M)) \arrow[d, "F_2(G(f))"] \\
\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_2) \otimes F_2(G(N)) \arrow[r, "(\mu_{F_2})_{G(N)}"'] & F_2(G(N))
\end{tikzcd}$$

また μ_{F_2} が右加群自然変換より，任意の $\mathcal{C}_0$ の対象 X に対して以下の図式が可換となることから，$\mu_{F_2}^G$ は $\mathcal{C}_0$ 上の右加群自然変換となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_2)\otimes F_2(G(M\otimes X)) \arrow[r, "1\otimes F_2(s_{M,X})"'] \arrow[rr, bend left, "1\otimes s_{1M,X}"] \arrow[d, "(\mu_{F_2}^G)_{M\otimes X}"'] & \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_2)\otimes F_2(G(M)\otimes X) \arrow[r, "1\otimes s_{2G(M),X}"'] \arrow[d, "(\mu_{F_2})_{G(M)\otimes X}"'] & \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_2)\otimes F_2(G(M))\otimes X \arrow[d, "(\mu_{F_2}^G)_M\otimes 1_X"] \\
F_2(G(M\otimes X)) \arrow[r, "F_2(s_{M,X})"'] \arrow[rr, bend right, "s_{1M,X}"'] & F_2(G(M)\otimes X) \arrow[r, "s_{2G(M),X}"'] & F_2(G(M))\otimes X
\end{tikzcd}$$

よって，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_1)$ の普遍性により，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(G) : \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_2) \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_1)$ が一意的に存在して以下の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_1)\otimes F_1 \arrow[r, "\mu_{F_1}"] & F_1 \\
\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F_2)\otimes F_1 \arrow[u, "\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(G)\otimes 1_{F_1}"] \arrow[ur, "\mu_{F_2}^G"']
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(G)$ は反変であり，普遍性により定義されているので，反変関手であることが直ちに従う．

□

命題 6.2. $\mathcal{C}$ を余完備モノイダル圏，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ のモノイダル右余閉小部分圏とする．このとき以下の 2 つの対応は共に共変関手である．

$$\mathrm{Coend} : {}_{\mathcal{C}_0}\mathbf{Mod}/\mathcal{C}_0 \ni (\mathcal{M}, F) \mapsto {}_{\mathcal{C}_0}\mathrm{Coend}(F) \in \mathbf{Comon}(\mathcal{C})$$

$$\mathbf{Comod}(\mathcal{C}_0) : \mathbf{Comon}(\mathcal{C}_0) \ni C \mapsto (\mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}_0), U_C) \in {}_{\mathcal{C}_0}\mathbf{Mod}/\mathcal{C}_0$$

定理 6.3 (モノイドの淡中再構成定理). $\mathcal{C}$ を完備モノイダル圏，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ のモノイダル左閉小部分圏とする．このとき $\mathrm{End}\circ\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0) \simeq 1_{\mathbf{Mon}(\mathcal{C}_0)}$ が成立する．特に任意の $\mathbf{Mon}(\mathcal{C}_0)$ の対象 A に対して，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(U_A) \simeq A$ が成立する．

(証明) 任意に $\mathcal{C}_0$ のモノイド A をとり，A が注意 5.16 で述べた $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(U_A)$ の普遍性を満たすことを示せばよい．任意の $\mathcal{C}_0$ の対象 X と $X\otimes U_A$ から U_A への $\mathcal{C}_0$ 上の右加群自然変換 ψ をとる．ここで $\hat{\psi} = \psi_A \circ (1_X \otimes \eta_A) \circ r_X^{-1}$ と定義する．任意の A 上の左加群 M に対して，$\mu_{A\otimes M} = \mu_A \otimes 1_M$ とする．A の結合律より $(A\otimes M, \mu_{A\otimes M})$ も A 上の左加群で，この構造により $\mu_M : A\otimes M \to M$ は A 上の左加群の射となる．$\psi : X\otimes U_A \to U_A$ は右加群自然変換であり，命題 3.4 の (2) より $l_I = r_I$ であるので，以下の左の図式が可換となる．よって，右の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
X\otimes M \arrow[r, "r_X^{-1}\otimes 1_M = 1_X\otimes l_M^{-1}"'] \arrow[rrr, bend left, "1_{X\otimes M}"] \arrow[ddr, bend right, "\hat{\psi}\otimes 1_M"'] & X\otimes I\otimes M \arrow[d, "1_X\otimes\eta_A\otimes 1_M"] & & \\
& X\otimes A\otimes M \arrow[r, "1_{X\otimes A\otimes M}"] \arrow[d, "\psi_A\otimes 1_M"'] & X\otimes A\otimes M \arrow[r, "1_X\otimes\mu_M"] \arrow[d, "\psi_{A\otimes M}"'] & X\otimes M \arrow[d, "\psi_M"] \\
& A\otimes M \arrow[r, "1_{A\otimes M}"'] & A\otimes M \arrow[r, "\mu_M"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A\otimes U_A \arrow[r, "\mu_{U_A}"] & U_A \\
X\otimes U_A \arrow[u, "\hat{\psi}\otimes 1_{U_A}"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

また，$\varphi : X \to A$ で $\mu_{U_A}\circ(\varphi\otimes 1_{U_A}) = \psi$ を満たすものをとると，r の自然性より以下の左の図式は可換となり，外枠の矢印の可換性より $\varphi = \tilde{\psi}$ となる．よって A は $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(U_A)$ の普遍性を満たし $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(U_A) \simeq A$ が成り立つ．また，$\mathbf{Mon}(\mathcal{C}_0)$ の射 $f : A \to B$ に対して，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(U_A), \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(U_B)$ として A, B をとると，$\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0)(f)$: は B 上の加群 (M, μ_M) に $\mu_M^A = \mu_M\circ(f\otimes 1_M) : A\otimes M \to M$ として (M, μ_M^A) を対応させる自然変換であったので，以下の右の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r_X^{-1}"'] & A \arrow[d, "r_A^{-1}"'] \arrow[dd, bend left, "1_A", shift left=8] & \\
X\otimes I \arrow[r, "\varphi\otimes 1_I"] \arrow[d, "1_X\otimes\eta_A"'] & A\otimes I \arrow[d, "1_A\otimes\eta_A"'] \arrow[dr, "r_A"] & \\
X\otimes A \arrow[r, "\varphi\otimes 1_A"'] \arrow[rr, bend right, "\psi_A"'] & A\otimes A \arrow[r, "\mu_A"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B\otimes U_B \arrow[rr, "\mu_{U_B}"] & & U_B \\
A\otimes U_B \arrow[u, "f\otimes 1_{U_B}"] \arrow[r, "f\otimes 1_{U_B}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0)(f)"'] & B\otimes U_B \arrow[r, "\mu_{U_B}"'] & U_B
\end{tikzcd}
$$

よって $(\mathrm{End}\circ\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0))(f)$ の一意性より，$(\mathrm{End}\circ\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0))(f) = f$ が成立する． □

定理 6.4 (コモノイドの淡中再構成定理). $\mathcal{C}$ を余完備モノイダル圏，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ のモノイダル右余閉小部分圏とする．このとき $\mathrm{Coend}\circ\mathbf{Comod}(\mathcal{C}_0) \simeq 1_{\mathbf{Comon}(\mathcal{C}_0)}$ が成立する．特に任意の $\mathbf{Comon}(\mathcal{C}_0)$ の対象 C に対して，${}_{\mathcal{C}_0}\mathrm{Coend}(U_C) \simeq C$ が成立する．

補題 6.5. C を $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k(\mathbf{vect}_k)$ 上のコモノイド対象（つまり（有限次元）k 余代数），U_C : $\mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ を忘却関手，V を $\mathcal{C}$ の対象（つまり（有限次元）k ベクトル空間）とする．このとき $\mathrm{Nat}(U_C, U_C\otimes V) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Nat}(U_C, U_C\otimes V)$ である．

(証明) 任意の k ベクトル空間 V と任意の C 上の右余加群 N に対して，任意の自然変換 $\psi : U_C \to U_C\otimes V$ が $\mathcal{C}$ 上の左加群自然変換であることを示せばよい．つまり以下の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
U_C(V\otimes N) = V\otimes N \arrow[r, "s_{V,N} = 1_{V\otimes N}"] \arrow[d, "\psi_{V\otimes N}"'] & V\otimes N = V\otimes U_C(N) \arrow[d, "1_V\otimes\psi_N"] \\
(U_C\otimes M)(V\otimes N) = V\otimes N\otimes M \arrow[r, "s'_{V,N} = 1_{V\otimes N\otimes M}"'] & V\otimes N\otimes M = V\otimes(U_C\otimes M)(N)
\end{tikzcd}
$$

V の基底を $\{v_i\}$ とすると，任意の k ベクトル空間 W に対して，写像 $p_i^W : V \otimes W \ni \sum_j v_j \otimes w_j \mapsto w_i \in W$ は k 線形写像である．ただし，$\sum_j v_j \otimes w_j$ は任意の $V \otimes W$ の元を V の基底に関してまとめなおしたものとする．これは有限和となり，また各 w_j は一意的に定まる．よって $V \otimes W$ の任意の元 t は $\sum_i v_i \otimes p_i^W(t)$ と書ける．ここで $V \otimes N$ を $\Delta_{V\otimes N} = 1_V \otimes \Delta_N$ により，C 上の右余加群とみなすと，以下の左の図式は可換となり，p_i^N は C 上の右余加群の射となる．また，ψ は U_C から $U_C \otimes M$ への自然変換より，p_i^N へ U_C および $U_C \otimes M$ を作用させることにより以下の右の図式が可換となることが分かる．

$$\begin{tikzcd} V\otimes N \arrow[r, "p_i^N"] \arrow[d, "\Delta_{V\otimes N}=1_V\otimes\Delta_N"'] & N \arrow[d, "\Delta_N"] \\ V\otimes N\otimes C \arrow[r, "p_i^N\otimes 1_C"'] & N\otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U_C(V\otimes N)=V\otimes N \arrow[r, "p_i^N"] \arrow[d, "\psi_{V\otimes N}"'] & N=U_C(N) \arrow[d, "\psi_N"] \\ (U_C\otimes M)(V\otimes N)=V\otimes N\otimes M \arrow[r, "p_i^N\otimes 1_M"'] & N\otimes M=(U_C\otimes M)(N) \end{tikzcd}$$

よって，$V\otimes N$ の元 t に対し，$(1_V\otimes\psi_N)(t) = (1_V\otimes\psi_N)(\sum_j v_j\otimes p_j^N(t)) = \sum_j v_j\otimes(\psi_N\circ p_j^N)(t) = \sum_j v_j \otimes ((p_j^N \otimes 1_N)\circ\psi_{V\otimes N})(t) = (*)$ となる．ここで $\psi_{V\otimes N}(t) = \sum_k v_k \otimes p_k^{N\otimes M}(t)$ であるので，$(*) = \sum_j v_j \otimes ((p_j^N \otimes 1_M)(\sum_k v_k \otimes p_k^{N\otimes M}(t)) = \sum_j v_j \otimes p_j^{N\otimes M}(t) = \psi_{V\otimes N}(t)$ となる．よって $1_V \otimes \psi_N = \psi_{V\otimes N}$ □

補題 6.6. A を $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k(\mathbf{vect}_k)$ 上のモノイド対象（つまり（有限次元）k 代数），$U_A : {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ を忘却関手，V を $\mathcal{C}$ の対象（つまり（有限次元）k ベクトル空間）とする．このとき $\mathrm{Nat}(V\otimes U_A, U_A) = \mathrm{Nat}_{\mathcal{C}}(V\otimes U_A, U_A)$ である．

(証明) 補題 6.5 と同様に示すことができる． □

補題 6.7. A を $\mathcal{C} = \mathbf{Set}(\mathbf{set})$ 上のモノイド対象（つまり（有限）モノイド），$U_A : {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ を忘却関手，X を $\mathcal{C}$ の対象（つまり（有限）集合）とする．このとき $\mathrm{Nat}(X\times U_A, U_A) = {}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{Nat}(X\times U_A, U_A)$ である．

(証明) 任意の集合 X と任意の A 上の左加群 N（つまり集合 N にモノイド A の作用の構造が入ったもの）に対して，任意の自然変換 $\psi : X\times U_A \to U_A$ が $\mathcal{C}$ 上の右加群自然変換であることを示せばよい．つまり任意の集合 Y に対して以下の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} (X\times U_A)(N\times Y) = X\times N\times Y \arrow[r, "s_{N,Y}=1_{X\times N\times Y}"] \arrow[d, "\psi_{N\times Y}"'] & X\times N\times Y = (X\times U_A)(N)\times Y \arrow[d, "\psi_N\times 1_Y"] \\ U_A(N\times Y) = N\times Y \arrow[r, "s'_{N,Y}=1_{N\times Y}"'] & N\times Y = U_A(N)\times Y \end{tikzcd}$$

ここで A の Y への作用 μ_Y を自明な作用とすると (Y, μ_Y) は A 上の左加群の構造を持つ．同様に一点集合 $\{*\}$ も自明な作用で A 上の左加群とみなす．また $\mu_{N\times Y}$ を $\mu_{N\times Y}(a,n,y) = (an, y)$ と定めると A 上の左加群となる．このとき $p_N : N\times Y \to N, P_Y : N\times Y \to Y$ をそれぞれ N, Y への

射影，任意の Y の元 y に対し $y : \{*\} \ni * \mapsto y \in Y$ とすると p_N, p_Y, y は全て A 上の左加群の射である．ψ は自然変換より，以下の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
X \times N \times Y \arrow[r, "1_X \times p_N"] \arrow[d, "\psi_{N\times Y}"'] & X \times N \arrow[d, "\psi_N"] \\
N \times Y \arrow[r, "p_N"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times N \times Y \arrow[r, "1_X \times p_Y"] \arrow[d, "\psi_{N\times Y}"'] & X \times Y \arrow[d, "\psi_Y"] \\
N \times Y \arrow[r, "p_Y"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times \{*\} \arrow[r, "1_X \times y"] \arrow[d, "\psi_{\{*\}}"'] & X \times Y \arrow[d, "\psi_Y"] \\
\{*\} \arrow[r, "y"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

これらの図式の可換性より，示すべき図式が可換となることが分かる． □

注意 6.8. 定理 6.3 と定理 6.4 における $\mathcal{C}_0$ が小圏という条件は場合により取り除くことができる．例えば $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 = \mathbf{Vect}_k$ のとき，A を k 代数とすると，U_A は表現可能で，$U_A = \mathrm{Hom}_A(A, -)$ と表すことができる．よって米田の補題より集合として，$\mathrm{End}(U_A) = \mathrm{Nat}(U_A, U_A) = \mathrm{Hom}_A(A, A)$ が成立する[*4] ため，$\mathrm{End}(U_A)$ は k 代数となっている．同様に補題 1.3 より $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 = \mathbf{Set}$ のときも，モノイド G に対して，U_G は表現可能であったので淡中再構成定理を適用できる．

淡中再構成定理とこれらの補題を組み合わせると，以下のような淡中再構成定理の具体例が得られる．

系 6.9. $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$，$\mathcal{C}_0 = \mathbf{Set}(\mathbf{set})$，$A$ を (有限) モノイド，$U_A : {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0) \to \mathcal{C}_0$ を忘却関手とする．このとき $\mathbf{Mon}(\mathcal{C}_0)$ において $\mathrm{End}(U_A) \simeq A$，つまり $\mathrm{Nat}(U_A, U_A)$ と A はモノイド同型である．

(証明) $\mathbf{Set}$ は完備閉モノイダル圏，$\mathbf{set}$ は $\mathbf{Set}$ のモノイダル閉小部分圏，モノイド A は $\mathcal{C}_0$ におけるモノイド対象であるので，例 2.3，補題 6.7，注意 6.8 および定理 6.3 より $A \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(U_A) \simeq \mathrm{End}(U_A) \simeq \mathrm{Nat}(U_A, U_A)$ となる． □

注意 6.10. 群はモノイドで，群の同型はモノイド同型により与えられるので，上記の結果はモノイドを群に読み替えても成立する．

系 6.11. $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$，$\mathcal{C}_0 = \mathbf{Vect}_k(\mathbf{vect}_k)$，$A$ を (有限次元)k 代数，$U_A : {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0) \to \mathbf{vect}_k$ を忘却関手とする．このとき $\mathbf{Mon}_{\mathcal{C}_0}$ において $\mathrm{End}(U_A) \simeq A$，つまり $\mathrm{Nat}(U_A, U_A)$ と A は k 代数の同型である．

(証明) $\mathbf{Vect}_k$ は完備閉モノイダル圏，$\mathbf{vect}_k$ は $\mathbf{Vect}_k$ のモノイダル閉小部分圏，k 代数 A は $\mathcal{C}_0$ におけるモノイド対象であるので，系 6.9 と同様に，$A \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(U_A) \simeq \mathrm{End}(U_A) \simeq \mathrm{Nat}(U_A, U_A)$ となる． □

[*4] 一般には 2 つの関手の間の自然変換全体は集合となるとは限らない．関手の始域もしくは終域が小圏の場合は，自然変換全体は集合となる．

系 6.12. $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$, $\mathcal{C}_0 = \mathbf{Vect}_k(\mathbf{vect}_k)$, G を群, $\mathcal{M} = \mathbf{Rep}_k(G)(\mathbf{rep}_k(G))$ とし, $U_A : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_0$ を忘却関手とする．このとき $\mathbf{Mon}_{\mathcal{C}_0}$ において $\mathrm{End}(U_A) \simeq k[G]$, つまり $\mathrm{Nat}(U_A, U_A)$ と $k[G]$ は k 代数の同型である．

(証明) $\mathbf{Rep}_k(G)$ は左 $k[G]$ 加群の圏と, $\mathbf{rep}_k(G)$ は有限次元左 $k[G]$ 加群の圏と同値であるので, 系 6.11 より成り立つ． □

注意 6.13. G が無限群の場合は G の有限次元表現の圏 $\mathbf{rep}_k(G)$ とその忘却関手 U_G : から G : $\mathbf{rep}_k(G) \to \mathbf{vect}_k$ は再構成できないことがある．例えば, k が有限体の代数拡大体で, $G = \mathbb{Z}$ のとき, G から定まる群環は $k\,[\mathbb{Z}]$ であるが, $\mathrm{End}(U_G) = k[\hat{\mathbb{Z}}]$ となり一致しないことが知られている．

系 6.14. $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$, $\mathcal{C}_0 = \mathbf{vect}_k$, C を有限次元 k 余代数, $U_C : \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}_0) \to \mathbf{vect}_k$ を忘却関手とする．このとき $\mathbf{Comon}(\mathcal{C}_0)$ において $\mathrm{Coend}(U_C) \simeq C$, つまり $\int^{V \in \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}_0)} U_C(V)^* \otimes U_C(V)$ と C は k 余代数の同型である．

(証明) $\mathbf{Vect}_k$ は余完備モノイダル圏, $\mathbf{vect}_k$ は $\mathbf{Vect}_k$ のモノイダル余閉小部分圏, 有限次元 k 余代数 C は $\mathbf{vect}_k$ におけるコモノイド対象である．また例 4.7 より $\mathbf{vect}_k$ において $\mathrm{cohom}(U, V) = V^* \otimes U$ であったので, 補題 6.5 と定理 6.4 より, $C \simeq {}_{\mathcal{C}_0}\mathrm{Coend}(U_C) \simeq \mathrm{Coend}(U_C) \simeq \int^{V \in \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}_0)} U_C(V)^* \otimes U_C(V)$ であるので成立する． □

注意 6.15. これらの結果を口語的に述べると, 以下のようになる．

- （有限）モノイド M は集合への M の（有限）作用の圏と忘却関手から再構成できる．
- （有限）群 G は集合への G の（有限）作用の圏と忘却関手から再構成できる．
- （有限次元）k 代数はその（有限次元）左（右）加群の圏と忘却関手から再構成できる．
- （有限）群 G はその（有限次元）表現の圏と忘却関手から再構成できる．
- 有限次元 k 余代数はその有限次元右（左）加群の圏と忘却関手から再構成できる．

以下の基本定理を用いると,（有限次元とは限らない）一般の k 余代数 C もその有限次元余加群の圏から再構成できる．

注意 6.16. 以下の定理の証明で用いる sweedler の記法の説明を行う．C を k 余代数, M を C 上の右余加群とするとき, $\Delta_C : C \to C \otimes C$ を $\Delta(c) = \sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)}$ と表す．ここで $\sum_{(c)}$ は c を代入した時に出てくる全ての和をとることを意味する．また $\Delta_M : M \to M \otimes C$ についても, $\Delta_M(m) = \sum_{(m)} m^{(0)} \otimes m^{(1)}$ と書き, $m^{(0)}$ は和に出てくるテンソル積の M に含まれる部分, $m^{(1)}$ は C に含まれる部分とする．

定理 6.17 (余加群の基本定理). C を k 余代数, M を C 上の右余加群とする．このとき, M の任意の元 m に対して, ある M の有限次元右余加群 N が存在して, m は N の元となる．

(証明) $\{c_i\}$ を k 余代数 C の基底とする．任意に C 上の右余加群 M とその元 m をとる．sweedler の記法を用いて $\Delta_M(m) = \sum_{(m)} m^{(0)} \otimes m^{(1)}$ と表す．ここで $m^{(1)}$ を $\{c_i\}$ を用いてまとめなおすと，$\Delta_M(m) = \sum_i v_i \otimes c_i$ という有限和で表すことができる．ここで $\{v_i\}$ で生成される M の k 部分空間を N とすると N は有限次元である．$\Delta_C(c_i) = \sum_{(c_i)} c_i^{(1)} \otimes c_i^{(2)}$ とし，$c_i^{(1)}, c_i^{(2)}$ を $\{c_i\}$ を用いてまとめなおすと，$\Delta_C(c_i) = \sum_{j,k} a_{ijk} c_j \otimes c_k$ という有限和で書ける．M は C 上の右余加群より以下の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d, "\Delta_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "\Delta_M \otimes 1_C"] \\
M \otimes C \arrow[r, "1_M \otimes \Delta_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[dr, "r_M^{-1}"'] & M \otimes C \arrow[d, "1_M \otimes \varepsilon_C"] \\
 & M \otimes k
\end{tikzcd}
$$

左の図式より $\Delta_M(v_k) = \sum_{i,j} a_{ijk} v_i \otimes c_j$ は $N \otimes C$ の元となり．$\Delta_M(N) \subset N \otimes C$ となる．よって N は M の部分余加群である．また右の図式より $m = \sum_i \varepsilon_C(c_i) v_i$ となるので m は N の元である． □

系 6.18 (余代数の基本定理). C を k 余代数とする．このとき，C の任意の元 c に対して，C の有限次元部分 k 余代数 D が存在して，c は D の元となる．

(証明) 定理 6.17 において $M = C$ とすると，任意の C の元 c は C の有限次元部分余加群 D に含まれ，$\Delta_C(D) \subset D \otimes C$ を満たすが，定理 6.17 と同様の議論を行うことにより $\Delta_C(D) \subset D \otimes D$ となることが分かる．よって D は C の有限次元部分余代数である． □

注意 6.19. 定理 6.17 は k 代数では成立しない．例えば $A = k[x]$ として，A 自身を A 加群とみなしたとき，$x \in A$ に対して，x を含む A 部分加群 M を考えると，M は x^i の形の元を全て含むので，M は無限次元ベクトル空間となる．よって x を含む有限次元 A 部分加群は存在しない．

系 6.20. $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$，$\mathcal{C}_0 = \mathbf{vect}_k$，$C$ を k 余代数，$U_C : \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}_0) \to \mathbf{vect}_k$ を忘却関手とする．このとき $\mathbf{Comon}(\mathcal{C})$ において $\mathrm{Coend}(U_C) \simeq C$，つまり $\mathrm{Coend}(U_C)$ と C は k 余代数の同型である．

(証明) 任意の k ベクトル空間 V と任意の U_C から $U_C \otimes V$ への自然変換 φ をとる．任意の C の元 c に対して，ある C の有限次元部分右余加群 M が存在して，c は M の元となる．ここで $\breve{\varphi} : C \to V$ を $\breve{\varphi}(c) = (\varepsilon_C \otimes 1_C)(\varphi_M(c))$ と定義する．$\breve{\varphi}$ が well-defined であることを示す．任意の c を含む C の有限次元部分右余加群 N に対して，$M \cap N$ は C の有限次元部分右余加群である．φ は自然変換なので，以下の左の図式は可換となり，$\breve{\varphi}$ は well-defined となる．

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\varphi_N"] & N \otimes V \arrow[rd, hook] & & \\
M \cap N \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[r, "\varphi_{M\cap N}"'] & (M \cap N) \otimes V \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[r, hook] & C \otimes V \arrow[r, "\varepsilon_C \otimes 1_V"] & V \\
M \arrow[r, "\varphi_M"'] & M \otimes V \arrow[ru, hook] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_C \arrow[r, "\Delta_{U_C}"] \arrow[rd, "\varphi"'] & U_C \otimes C \arrow[d, "1_{U_C} \otimes \check{\varphi}"] \\
& U_C \otimes V
\end{tikzcd}
$$

また $\check{\varphi}$ は線形写像であるので，右の図式が可換となり，$\mathrm{Coend}(U_C) \simeq C$ となる． □

以下ではベクトル空間の圏で成立する End, Coend に関する性質を紹介する．

命題 6.21. $\mathcal{D}$ を圏，$\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$，$\mathcal{C}_0 = \mathbf{vect}_k$，$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_0$ を関手とする．また $\mathcal{C}_0$ から $\mathcal{C}_0$ への双対ベクトル空間をとる関手を $(-)^*$ とする．このとき $\mathrm{End}(F^*) \simeq \mathrm{Coend}(F)^*$ が成立する．

(証明) $\mathrm{Coend}(F)^* = \mathrm{Hom}_k\left(\int^{X \in \mathcal{C}} \mathrm{cohom}(F(X), F(X)), k\right) \simeq \mathrm{Hom}_k\left(\int^{X \in \mathcal{C}} F(X)^* \otimes F(X), k\right)$
$\simeq \int_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_k\left(F(X)^* \otimes F(X), k\right) \simeq \int_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_k\left(F(X)^*, [F(X), k]\right) \simeq \int_{X \in \mathcal{C}} [F^*(X), F^*(X)] = \mathrm{End}(F^*)$
より成り立つ． □

命題 6.22. $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ を圏，$\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$，$\mathcal{C}_0 = \mathbf{vect}_k$，$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_0, F' : \mathcal{D}' \to \mathcal{C}_0$ に対して，$F \otimes F' : \mathcal{D} \times \mathcal{D}' \to \mathcal{C}_0$ という関手を $(F \otimes F)(X) = F(X) \otimes F(X)$ と定義する．このとき $\mathrm{Coend}(F \otimes F') \simeq \mathrm{Coend}(F) \otimes \mathrm{Coend}(F')$ が成立する．

(証明) $\mathbf{Vect}_k$ において $\otimes$ は余極限と可換で，Coend は余極限より，$\otimes$ と Coend は可換である． □

命題 6.23. $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ を圏，$\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_k$，$\mathcal{C}_0 = \mathbf{vect}_k$，$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_0, F' : \mathcal{D}' \to \mathcal{C}_0$ に対して，$F \otimes F' : \mathcal{D} \times \mathcal{D}' \to \mathcal{C}_0$ を命題 6.22 で定義した関手とする．$\mathrm{End}(F), \mathrm{End}(F'), \mathrm{End}(F \otimes F')$ が全て有限次元ベクトル空間となるならば，$\mathrm{End}(F \otimes F') \simeq \mathrm{End}(F) \otimes \mathrm{End}(F')$ が成立する．

(証明) 任意の有限次元ベクトル空間 V に対して，$\mathrm{cohom}(-, V) \dashv V \otimes -$ より，$V \otimes -$ は $\mathbf{vect}_k$ 内の極限と可換になる．ここで仮定より，$\mathrm{End}(F), \mathrm{End}(F'), \mathrm{End}(F \otimes F')$ は $\mathbf{vect}_k$ 内の極限であるので，上記の式が成立する． □

7. モノイダル（余）閉圏におけるクライン表現定理

定理 7.1 (モノイドのクライン表現定理). $\mathcal{C}$ を完備モノイダル圏，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ のモノイダル左閉小充満部分圏とする．$\mathcal{D}$ を $\mathcal{C}_0$ 上の右加群圏とし，$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}_0$ 上の右加群関手とする．また，$A = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_0}(F), U_A : {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0) \to \mathcal{C}_0$ を忘却関手とする. このとき，関手 $I_F : \mathcal{D} \to {}_A\mathbf{Mod}(\mathcal{C}_0)$ が存在して，$F = U_C \circ I_F$ を満たす.

(証明) 条件より，A は $\mathcal{C}$ のモノイドであり，命題 5.24 の (2)，(3) より，任意の $\mathcal{D}$ の射 $f : X \to Y$ に対して $F(X), F(Y)$ は A 上の左加群で $F(f)$ は A 上の左加群の射となるので，$I_F(X) = F(X), I_F(f) = F(f)$ とすれば $F = U_C \circ I_F$ を満たす. $\square$

定理 7.2 (コモノイドのクライン表現定理). $\mathcal{C}$ を余完備モノイダル圏，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ のモノイダル右余閉小充満部分圏とする．$\mathcal{D}$ を $\mathcal{C}_0$ 上の左加群圏とし，$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}_0$ 上の左加群関手とする．また，$C = {}_{\mathcal{C}_0}\mathrm{Coend}(F), U_C : \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}_0) \to \mathcal{C}_0$ を忘却関手とする. このとき，関手 $I_F : \mathcal{D} \to \mathbf{Comod}^C(\mathcal{C}_0)$ が存在して，$F = U_C \circ I_F$ を満たす.

注意 7.3. 定理 7.1 と定理 7.2 において $\mathcal{D}$ および F が良い条件を満たすとき，I_F は圏同値となる.（詳細は [Lyu21] の定理 1.25 を参照せよ.）紙数が尽きたため，その内容については解説しないが，ここまで準備ができていれば容易に読むことができる．また [Lyu21] ではバイモノイドの淡中-クライン双対についても記述がある．また，[DM90] ではアフィン群スキームの淡中-クライン双対についての記述がある.

参考文献

[Alu16] G. Alsina Oriol, A Categorical Approach to Tannaka Duality. Universitat Polit è cnica de Catalunya, Master thesis, 2016.

[DM90] P. Deligne and J.S. Milne, Tannakian Categories. in Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, LNM 900, pp. 101–228, 1982.

[EGNO15] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, Tensor categories. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 205, American Mathematical Society, 2015.

[LT17] T. Leinster(著)，土岡 俊介 (訳)，ベーシック圏論，丸善出版，2017.

[Lyu21] A. Lyubinin, Tannaka Duality, Coclosed Categories and Reconstruction for Nonarchimedean Bialgebras. Appl Categor Struct 29, 547–571, 2021.

[Mac12] S. Maclane(著)，三好　博之 (訳)，圏論の基礎，丸善出版，2012.

[Par96] B. Pareigis, Reconstruction of hidden symmetries. J. Algebra 183 no. 1, 90–154, 1996.

[Sch92] P. Schauenburg, Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras. Algebra Berichte [Algebra Reports], 66. Verlag Reinhard Fischer, Munich, 1992.

[Str07] R. Street, Quantum Groups, A Path to Current Algebra. Australian Mathematical Society Lecture Series 19. Cambridge University Press, 2007.