# 均衡集合の構造について

渡　辺　和　則

## I．はじめに

一般均衡分析は価格と経済を定義するパラメーターの関係を分析することをねらとしている。いまそのパラメーターのうち初期賦存量 $r$ のみが可変的とすると，一般均衡分析は均衡対応 $r \rightarrow E(r)$（均衡集合）を分析の中心におく。したがって均衡集合 $E(r)$ の構造が重要な分析的関心の対象とされる。この分析において第1に問題にされるのは $E(r)$ の非空性である。これは多くの均衡論者によって扱われてきた「均衡解の存在」の問題であるが，それは主として角谷の不動点定理によって証明された。しかし $E(r)$ の構造についてさらに進んだ分析がなされなければならない。

そこで，分析の第2段階として解明されるべき問題は，均衡集合 $E(r)$ がどれぐらいの規模をもっているか，ということである。もし $E(r)$ が無限に多くの均衡解をもつならば，均衡解 $x \in E(r)$ に対し微小の摂動が加えられたとき，経済 $r$ は新たな均衡解 $x' \in E(r)$ へ移行し再び $x$ に戻ることはないという意味において不安定である。したがって経済 $r$ が安定であるためには，$r$ の十分小さい近傍 $V(x)$ に対し $(V(x)-\{x\}) \cap E(r)=\phi$ であること，すなわち $E(r)$ は離散集合であることが望ましい。次いで問題にされるべきことは，対応 $r \rightarrow E(r)$ の連続性である。もし経済 $r$ に対応する均衡集合 $E(r)$ と，$r$ の十分小さい近傍 $U(r)$ に対し，$U(r) \ni r'$ に対する均衡集合 $E(r')$ が全く異なった構造をもつならば，最初の分析で得られた情報は限定的なものになってしまうであろう。

これらの問題は Debreu［1970］によって初めて解明された。均衡集合は離散的でない場合がありうるが，ほとんどすべての経済 $r$ に対し均衡集合 $E(r)$

は上述の望ましい性質をもつということを証明するために，彼は $C^r$ 級需要関数を伴った交換経済を微分トポロジーによって分析したのである。その分析において重要な役割を果したのが，直接的にはサードの定理であり，間接的には逆関数定理である。

彼の貢献を基礎にして Balasko [1975a, 1975b, 1978] は，Debreu が彼の命題の証明において定義した写像をデブリュー写像とよび，その写像が固有写像であることを指摘し，それを用いて均衡集合の多様体構造を分析した。

また Debreu の貢献は選好の微分可能性に対する再検討を提示した点にある。彼の仕事を契機として Smale [1973a, 1973b, 1974a, 1974b, 1974c, 1974d] は $C^2$ 級効用関数によって選好を定義し，従来微積分学の範囲で論じられてきた経済学における最適問題を微分トポロジー的に特徴づけた。

本稿は以上のような Debreu, Balasko, Smale による貢献を扱ったものである。

## Ⅱ．最適のための必要十分条件[1]

$l(\geqq 2)$ 種類の商品と $m(\geqq 2)$ 人の消費者からなる純粋交換経済を分析の対象とする。$\bar{P}=\{x=(x_1,\cdots,x_l)\in R^l \mid x_i\geqq 0,\ i=1,\cdots,l\}$ とし，$x^h=(x_1^h,\cdots,x_l^h)\in\bar{P}$ $(h=1,\cdots,m)$ によって消費者が保有する商品バンドルを表わし，$(\bar{P})^m=\{x=(x^1,\cdots,x^m)\in R^{lm} \mid x^h\in\bar{P},\ h=1,\cdots,m\}$ によって商品空間を表わす。また経済全体の資源は固定されており，$\Omega=\{x=(x^l,\cdots,x^m)\in(\bar{P})^m \mid \sum_{h=1}^{m}x^h=a>0\}$ を経済の状態空間とよぶ。ここで消費者の選好に関して次のような仮定をおく。

（i） $\Omega$ 上で消費者の選好順序（推移律，反射律，完全律）が定義されている。各人の選好は $C^r(r\geqq 2)$ 効用関数 $u_h:\Omega\to R$ によって表わされる。消費者 $h$ によって $x\in\Omega$ は $y\in\Omega$ よりも選好される $(x\overset{h}{>}y)$ とは，$u_h(x)\geqq u_h(y)$ を意味する。

（ii） 消費者の選好は彼自身の保有する商品バンドルに依存する。;$(\bar{P})^m \xrightarrow{\Pi_h} (\bar{P}) \xrightarrow{\bar{u}_h} R$, $\Pi_h$ は第 $h$ 成分への射影，$\bar{u}_h$ は $C^r(r\geqq 2)$ 級とするとき，$u_h=\bar{u}_h\circ\Pi_h:(\bar{P})^m\to R$ である。

消費者の最適化行動に関する必要十分条件を考察するのが本節の目的であるが，最初に3種類の最適の定義を与える。

(R) 状態 $x \in \Omega$ がパレート最適（PO）であるとは，各 $h(=1,\cdots,m)$ に対し $u_h(y) \geqslant u_h(x)$ であり，かつ，ある $h$ に対し $u_h(y) > u_h(x)$ となるような $y \in \Omega$ が存在しないことである。

この概念は大局的なものであるが，各消費者が彼の現在の商品保有の近傍における商品保有に関して十分な情報を得ていると仮定すると，次のような局所的最適の定義が与えられる。

(L) 状態 $x \in \Omega$ が局所パレート最適（LPO）であるとは，$x$ のある近傍 $N(x)$ が存在して，各 $h(=1,\cdots,m)$ に対し $u_h(y) \geqslant u_h(x)$ となる $y \in \Omega$ が $N(x)$ の中に存在しないことである。

$x \in \Omega$ が LPO でない限り状態を改善する方向へ進もうとする取引が連続的に行なわれるであろう。そこでこのような連続的取引を次のような曲線（取引曲線）によって定義する。；$C^\infty$ 級写像 $\varphi$：$(o.\ \varepsilon) \to \Omega$, ${}^\forall\varepsilon > 0$, $\varphi(o) = x$, $\varphi(s) < \varphi(t)$ for all $0 \leqq s < t < \varepsilon$.

(T) $x \in \Omega$ から始まる取引曲線 $\varphi$ が存在しないとき，$x \in \Omega$ を最適取引（$TO$）という。

明らかに PO⇒LPO⇒TO である。

経済状態空間 $\Omega$ は $(\bar{P})^m$ の余次元 $l$ の閉部分多様体であり，$x \in \Omega$ における $\Omega$ に対する接空間 $T_x\Omega$ は $\{\bar{x} = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m) \in R^{lm} \mid \sum_{h=1}^m \bar{x}^h = 0\}$ である。

$g$: $(\bar{P})^m \to R^l$: $x \mapsto (\sum_{h=1}^m x_1^h - a_1, \cdots, \sum_{h=1}^m x_l^h - a_l)$. $j$: $\Omega \to R^{lm}$ を包含写像とすると，$x \in \Omega$ に対し，$Dj$: $T_x\Omega \to T_xR^{lm}$ は単射であり，$T_xR^{lm} \cong R^{lm}$ とすると，$Dj(T_x\Omega) = \{\bar{x} = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m) \in R^{lm} \mid \sum \bar{x}^h \dfrac{\delta g}{\delta x^h} = \sum \bar{x}^h = 0\}$. $Dg(x)$ : $\mathrm{T}_x(\bar{P})^m \to T_xR^l$ において，$Dg(x)\bar{x} = (\sum_{h=1}^m \bar{x}_1^h, \cdots, \sum_{h=1}^m \bar{x}_l^h)$, $g^{-1}(0) = \Omega$. したがって ${}^\forall\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in R^l$ に対し，方程式系，$\sum_{h=1}^m \bar{x}_1^h, \cdots, \sum_{h=1}^m \bar{x} = \alpha_l$, が解をもてば $Dg(x)$ は全単射であるから，$g$ は $0 \in R^l$ を正則値としてもつ。ここで，$(\bar{x}_l^1, \cdots, \bar{x}_l^m) = (0, \cdots \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}, \cdots 0)$, $i = 1, \cdots, l$. とおけばよい。ゆえに正則値定理から上述

のことが成り立つ。

多様体 $\Omega$ 上で定義される $C^r(r\geqq 2)$ 効用写像 $u=(u_1,\cdots,u_m): \Omega\to R^m$ を以下の分析の中心におく。$x\in\Omega$ に対し，$Du_h(x): T_x\Omega\to R$, $Du(x)=(Du_1(x),\cdots Du_m(x)): T_x\Omega\to R^m$.

$m=1$ の場合，$u: \Omega\to R$ が $x\in\Omega$ において局所最大かつ安定であるための必要十分条件は $Du_h(x)=0$ かつ $D^2u_h(x)$ が負定値であることである。この結果を $m\geqq 2$ の場合へ拡張しよう。

$u$ の臨界点の集合を $S(u)$ とする。すなわち，$S(u)=\{x\in\Omega \mid \mathrm{rank}\ Du(x)<m\}$。このとき臨界集合 $S(u)$ は次のように特徴づけられる。

次の (1)〜(4) はすべて同値である。

(1) $x\in S(u)$.

(2) rank $Du(x)=m-1$.

(3) $\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in R$ with no $\lambda_j$ zero and $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j Du_j(x)=0$.

(4) $\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in R$ with no $\lambda_j$ zero and $\lambda_h D\tilde{u}_h(x^h)=\lambda_m D\tilde{u}_m(x^m)$ $(h=1,\cdots,m-1)$.

(3)は $x\in\Omega$ が効用関数の加重和 $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j u_j: \Omega\to R$ for some set of $\lambda_j\geqq 0$, $(j=1,\cdots m)$ の臨界点であることを含意している。(4)は $\lambda_h/\lambda_m$ が一意的に決定されること，すなわち corank $Du(x)=1$ を含意している。(2)より $Du_1(x),\cdots,Du_m(x)$ は1次従属で，そのうち $m-1$ 個が1次独立であるから，陰関数定理[2]より，$S(u)=\{x\in\Omega \mid \mathrm{corank}\ Du(x)=1\}$ は $\Omega$ の $m-1$ 次元の部分多様体である。(2)をランク条件とよび，以下効用写像はランク条件をみたすものとする。

取引曲線に沿って連続的な取引を行なうことにより限界効用が逓増する場合を考える。

$^{\forall}t\in[0,\varepsilon)$ に対し $Du(\varphi(t)\varphi'(t)\in \mathring{R}^m_+$ のとき，取引曲線 $\varphi$ は許容的であるという。

許容的取引曲線は幾何学的に次のように解釈できる。

$^{\forall}x\in\Omega$ に対し $C_x=\{V\in T_x\Omega \mid Du(x)v\in\mathring{R}^m_+\}=Du(x)^{-1}(\mathring{R}^m_+)=\bigcap_{j=1}^{m}\{v\in T_x\Omega \mid Du_h(x)v\in\mathring{R}_+\}$ とおくと，$Du(x)$ は線形写像（したがって連続）だから，

開凸錐である。$C_x \neq \phi$ である限り対応 $x \mapsto C_x$ は連続なベクトル場を定義する。したがって接ベクトル $\varphi'(t)$ がこのベクトル場にあるとき，すなわち $C_{\varphi'(t)}$ のとき $\varphi$ は許容的である。また許容的取引曲線に沿って取引を行なう限り効用は増加的である。

そこでこの概念を使って臨界パレート集合 $\theta(u)$ を次のように定義する。臨界パレート集合 $\theta(u)$[3] とは，各 $h(=1,\cdots,m)$ に対し $Du_h(x)\varphi'(\mathrm{o})>0$ なる $\varphi(\mathrm{o})=x$ から始まる許容的取引曲線が存在しないような $x\in\Omega$ の集合である。

このとき臨界パレート集合 $\theta(u)$ は次のように特徴づけられる。

$x\in\mathring{\Omega}$ に対し次の主張はすべて同値である。

(5) $x\in\theta(u)$.

(6) $I_m Du(x)\cap\mathring{R}^m_+=\phi$.

(7) $\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in R$ with $\lambda_i\cdot\lambda_j>0$, $(i,\ j=1,\cdots m)$ and $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j Du_j(x)=0$.

(8) $C_x=\phi$.

(6)と(8)の含意は $\theta(u)$ の定義と許容的取引曲線の幾何学的意味より明らかである。ある $\bar{x}\in T_x\Omega$ に対し $Du_m(x)\bar{x}\notin\mathring{R}^m_+$ とすると，$\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j Du_j(x)\bar{x}\in\mathring{R}^m_+$ である。したがって(8)は，ある人の効用を増加させるような取引は必ず他の人々の効用を減少させる，ということを含意している。

上の命題の系として次のことが成り立つ。

(9) $x\in\mathring{\Omega}$ に対し $x$ が PO(LPO, TO) ならば $x\in\theta(u)$ である。

次に多様体 $\Omega$ 上で定義された $C^r$ 効用写像の最適化問題を，$\Omega$ の部分多様体上で定義された単一の関数の最適化問題に帰着させることを考える。

$x\in\Omega$ を通る無差面 $u_h^{-1}(x)$ 以外のすべての無差別面 $u_j^{-1}$ の共通部分を $U_x^{(h)}=\bigcap_{j\neq h}u_j^{-1}(u_j(x))$ とする。したがって $u_j(j\neq h)$ は $U_x^{(h)}$ 上で一定である。このとき陰関数定理の系[4] より次の主張が成り立つ。

(10) $x\in\mathring{\Omega}$ に対し $U_x^{(h)}$ は $\Omega$ の余次元 $m-1$ の部分多様体である。

また次の命題はすべて同値である。

(11) $x\in S(u)$.

(12) 各 $h(=1,\cdots,m)$ に対し $u^h|U_x^{(h)}: U_x^{(h)}\to R$ は $x$ を臨界点としてもつ。すなわち $D(u_h|U_x^{(h)})(x)=0,\ (h=1,\cdots m)$.

(13) $\exists \in h\{1,\cdots,m\}$ ; $D(u_h|U_x^{(h)})(x)=0$,

これらの命題から，$x\in S(u)$ に対し $\mathrm{Ker}\ Du(x)=\{v\in T_xU_x^{(h)}|Du(x)v=0\}=\bigcap_{j=1}^{m}\{v\in T_xU_x^{(h)}|Du_h(x)v=0\}=T_xU_x^{(h)}$ であるから，$K_x=\mathrm{Ker}\ Du(x)\subset T_x\Omega$, $K_x=\bigcap_{j=1}^{m}\mathrm{Ker}\ Du_j(x)$ であり，$D^2u_j(x)=\left(\dfrac{\partial^2u_j}{\partial x_i\partial x_j}\right)$ は $K_x$ 上に制限された場合にのみ一定の意味をもつ。

命題(3)を考慮して，$x\in S(u)$ に対し $H_x=\sum_{j=1}^{m}\lambda_jDu_j(x)$: $K_x\times K_x\to R$ とおくと，$H_x$ は対称な双一次形式である。ここに $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ は(3)におけるものと同じである。$H_x$ が退化双一次形式であるような $x\in\theta(u)$ の集合を DGN とする。[5] このとき前述の必要条件は次のように言いかえることができる。

(14) $x\in\mathring{\Omega}\cap(\theta(u)\backslash\mathrm{DGN})$，すなわち $x\in\mathring{\Omega}$ が非退化臨界点のとき，$x$ が PO (LPO, TO) ならば $H_x$ は $K_x\times K_x$ 上で負定値である。

$\theta(u)$ のいかなる元が経済的に最適であるかを示す条件として，$x\in\mathring{\Omega}\cap(\theta(u)\backslash\mathrm{DGN})$ に対し次の命題はすべて同値である。

(15) $x\in\mathrm{LPO}$.

(16) $x\in\mathrm{TO}$.

(17) $H_x: K_x\times K_x\to R$ は負定値である。

(18) $x$ は $u_h|U_x^{(h)}: U_x^{(h)}\to R,\ (h=1,\cdots,m)$ の非退化最大である。

(19) 各 $h(=1,\cdots,m)$ に対し，$D^2(u_h|U_x^{(h)})$: $K_x\times K_x\to R$ は負定値である。

モースの補題[6] より $C^r$ 効用関数 $u_h: \Omega\to R$ の非退化臨界点全体の集合は $\Omega$ の離散集合である。すなわち，$x\in\Omega$ を $u_h$ の非退化臨界点とすると，$x$ のある近傍 $U(x)$ は $x$ 以外の $u_h$ の臨界点を含まない。ゆえに上の命題が成り立つとき，上の意味において最適集合は安定である。

## Ⅲ　正則経済の特徴づけ[7]

$C^r(r \geqq 2)$ 効用関数 $u: \bar{p} \to R$ の全体を $W=C^r(\bar{p}, R)$ で表わし，$W$ に $C^r$ ホイトニー位相[8] を入れる。このとき $W$ の開集合 $U$ を $\{u \in W | Du(x) \neq \phi, x \in \bar{p}\}$ によって定める。[9] 価格体系を $l-1$ 次元多様体 $S=\{p \in R_+^l \| p \| =1\}$ によって表わす。$r^h=(r_1^h, \cdots, r_l^h) \in \bar{p}$ によって消費者 $h$ の初期賦存量を，そして，$r=(r^1, \cdots r^m \ni (\bar{p})^m$ によって経済全体としての初期賦存量の状態を表わす。このとき経済を定義するパラメーターは $(r, u)=(r^1, \cdots, r^m, u_1, \cdots, u_m) \in (\bar{p})^m \times W^m$ である。

経済 $(r, u)$ に対し，$M=\{(x, p) \in (\bar{p})^m \times S | \sum_{k=1}^m x^h = \sum_{k=1}^m r^h, <p, x^h> = <p, r^h>, h=1, \cdots, m\}$ を達成可能な経済の状態空間とよぶ。このとき $M$ は $(\bar{p})^m \times S$ の余次元 $l+m-1$ の閉部分多様体である。また $(x, p) \in M$ における $M$ に対する接空間は，$T_{(x, p)}M=\{(\bar{x}, \bar{p}) \in R^{lm} \times R^{l-1} | \sum \bar{x}^h=0, <\bar{p}, x^h-r^h> + <p, \bar{x}^h-\bar{r}^h>=0, h=1, \cdots, m\}$ である。

$F: (\bar{p})^m \times S \longrightarrow \bar{p} \times R^{m-1}$,

$$(x, p) \longmapsto (\sum_{k=1}^m x_i^h - \sum_{h=1}^m r_i^h]_{i=1}^l <p, x^h - \gamma^h>]_{h=1}^{m-1})$$

は $C^\infty$ 写像であり，$(x, p)$ における $h$ の微分は

$$Dh(x, p): T_{(x, p)}\bar{p}^m \times S \to T_{h(x, p)}\bar{p} \times R^{m-1}.$$

$M=F^{-1}(0)$ であるから，$DF(x, p)$ が全単射であれば正則値定理[10] から上の命題が成り立つことがわかる。ここで，$^\forall\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in R^l$, $^\forall\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_{m-1}) \in R^{m-1}$ に対し，方程式系：

$$DF(x, p)(\bar{x}, \bar{p})=(\sum_{h=1}^m \bar{x}^h, <\bar{p}, \bar{x}^h-r^h>+<p, \bar{x}^h>]_{h=1}^{m-1})=(\alpha, \beta)$$

が解をもつことを示せばよい。

$p \neq 0$ だから $\bar{p}=0$ とおくと，$<p, \bar{x}^h>=\beta_h$, $h=1, \cdots m, -1$ より解 $\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^{m-1}$ が得られ，$\bar{x}^m=\alpha-\sum_{h=1}^m \bar{x}^h$ である。ゆえに，$DF(x, p)$ は全単射であり，$0 \in \bar{p} \times R^{m-1}$ は $F$ の正則値であるから上の命題が示されたことになる。

$m=1$ の場合，消費者がある一定の予算制約のもとで効用を最大にならしめる

ように行動するとき，各商品に対する限界効用と価格の比はラグランジュ乗数（＝貨幣の限界効用）に等しくなる。この概念を $m\geqq 2$ の場合へ拡張して，次のような公理的な定義を与える。

経済 $(r, u)$ に対し，$(x, p)\in M$ が次の条件をみたすとき，$(x, p)$ は経済 $(r, u)$ に対する拡張価格均衡であるという。：各 $h(=1,\cdots, m)$ に対し，$Du_h(x^h)=\lambda_h p$ をみたす $\lambda_h\in R_+$ が存在する。

この定義は，経済 $(r, u)$ に対し，$x\in(\bar{p})^m$ が予算多様体 $B_h=\{y^h\in\bar{p}\mid <p, y^h>=<p, r^h>\}$ 上で効用関数 $u_h:\bar{p}\in R$ の臨界点であることを含意している。$\lambda_h$ は $m=1$ の場合のラグランジュ乗数に対応するものである。

経済 $(r, u)$ に対する拡張価格均衡 $(x, p)\in M$ の集合を $Eex(r, u)$ とすると，臨界パレート集合 $\theta(u)$ と $Eex(r, u)$ との間に次の関係が成り立つ。

各 $h(=1,\cdots, m)$ と各 $x^h\in\bar{p}$ に対し，$Du_h(x^h)\in\bar{p}$ 成り立つとき，$(x, p)\in Eex(r, u)$ ならば $x\in\theta(u)$ である。

またこの逆が成り立つ。

各 $h(=1,\cdots, m)$ と各 $x^h\in p$ に対し，$Du_h(x^h)\in\bar{p}$ であり，かつ，$u_h|X: X\to R$, $X=\{x\in(\bar{p})^m\mid \sum_{h=1}^{m}x^h=a\}$ のとき，$r=x$, $(x, p)\in Eex(r, u)$ をみたす $p\in S$ が存在する。

集合 $\Gamma=\{\lambda, x, p)\in R^m\times(\bar{p})^m\times S\mid \lambda_h\geqq 0,\ Du_k(x^h)=\lambda_h p,\ h=1,\cdots m\}$ を考える。射影 $\Pi:\Gamma\to(\bar{p})^m\times S$ を $\Pi(\lambda, x, p)=(x, p)$ によって定義すると，$\Pi(\lambda, x, p)=(x, p)$ は拡張価格均衡を形成する可能性をもっている。

集合 $\Gamma$ は $R_+^m\times(p)^m\times S$ の余次元 $lm+1$ の閉部分の多様体である。

$u\in \mathrm{W}^m$ に対し，

$$\phi_u:\ R_+^m\times(\bar{p})^m\times S\to R^{lm}\times R$$

$$(\lambda, x, p)\mapsto(Du_1(x^1)-\lambda_1 p,\cdots, Du_m(x^m)-\lambda_m p, \|p\|-1),$$

は $C^r(r\geqq 1)$ 写像である。$\phi_u{}^{-1}(0)=\Gamma$ であるから，前述と同様に，$^\forall\alpha=(\alpha^1,\cdots, \alpha^m)\in(R^l)^m$, $\beta\in R$ に対し，$D\phi_u(\lambda, x, p)(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{p})=(D^2u_h(x^h)\bar{x}^h-\bar{\lambda}_h p-\lambda_h\bar{p}]_{h=1}^m, 2<p, \bar{p}>)=(\alpha^1,\cdots, \alpha^m, \beta)$ を $\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{p}$ について解けばよ

い。

このことを考慮して，$T=\{u\in W^m \mid \phi_u$ は $o\in R^{lm}\times R$ に横断正則である$\}$ とおくと，Thom=Abraham=Robbin の横断性定理[11] より次の命題が成り立つ。

［A］ $T$ は $U^m$ の開かつ稠密な部分集合である。経済 $(r, u)$ に対し $Eex(r, u)\in M$ であることを考慮して，$L=\{(r, \lambda, x, p)\in(\bar{P})^m\times R_+^m\times(\bar{P})^m\times S \mid (x, p)\in Eex(r, u),\ \sum x^h=\sum r^h\}$ とすると，$L$ は $(\bar{P})^m\times R_+^m\times(\bar{P})^m\times S$ の余次元 $l+m+lm$ の閉部分多様体である。

$u\in T$ に対し，

$$\Psi:(\bar{P})^m\times R_+^m\times(\bar{P})^m\times S\to R^l\times R^{m-1}\times R^{lm}\times S,$$

$$(r, \lambda, x, p)\mapsto(\sum x^h-\sum r^h,\ \left.<p, x^h-r^k>\right]_{h=1}^{m-1},\ \phi_u(\lambda, x, p))$$

は $C^r(r\geqq 1)$ 写像である。$\Psi_u^{-1}(o)=L$ であり，前述と同様の計算により $o\in R^l\times R^{m-1}\times R^{lm}\times S$ は $\Psi_u$ の正則値であることがわかる。また，$\Psi_u^{-1}\ni(r, \lambda, x, p)$ における $\Psi_u^{-1}(o)$ に対する接空間は Ker $D\Psi_u(r, \lambda, x, p)$ である。

逆に，$o\in R^l\times R^{m-1}\times R^{lm}\times R$ が $\Psi_u$ の正則値とすると，$\Psi_u^{-1}(o)\in(r, \lambda, x, p)$ に対して $D\Psi_u(r, \lambda, x, p)$ は全単射であるから，$D\phi_u(\lambda, x, p)$ は全単射である。

以上のことから次の命題が成り立つ。

［B］ $u\in T$ であるための必要十分条件は，$\Psi_u$ が $o\in R^l\times R^{m-1}\times R^{lm}\times R$ を正則値としてもつことである。

命題［A］［B］の含意は次のように解釈できる。

任意の効用写像 $u\in U^m$ は $T$ の元によっていくらでも近似できる。すなわち，効用写像に対し，微小の摂動が加えられたとしても，あるいは，消費者の選好が微小に変化したとしても，それによって拡張価格均衡はあまり影響を受けない。

命題［A］［B］を基礎にして次の定義を与える。

経済 $(r, u)$ に対し，$o\in R^l\times R^{m-1}\times R^{lm}\times R$ が $\Psi_u$ の正則値であるとき，

経済（$r, u$）は正則であるという。あるいは，経済（$r, u$）が正則であるとは，$u \in T$ かつ，$r$ が $\tilde{\Pi}_Q = \Pi_Q | \Psi_u^{-1}(o) : \Psi_u^{-1}(o) \to (\bar{p})^m$ の正則値であることをいう。ここに，$Q = (\bar{p})^m$，$\Pi_Q : (\bar{p})^m \times R^m \times S \to (\bar{p})^m : (r, \lambda, x, p) \mapsto r$ なる射影とする。

このとき次の命題が成り立つ。

$U^m$ の開かつ稠密な部分集合 $Y$ が存在して，任意の $u \in Y$ に対し経済（$r$, $u$）はほとんどすべての $r$ に対し正則である。

正則経済（$r, u$）に対し，拡張価格均衡集合 $Eex(r, u)$ は（$r, u$）において連続的に動く有限集合である。

これは以下のことから明らかとなる。[12]

$u \in T$ に対する $\tilde{\Pi}_Q : \Psi_u^{-1}(o) \to (p)^m$ の正則値 $r$ に対し，逆関数定理より $\tilde{\Pi}_Q^{-1}(r)$ は離散位相をもつ。ここで，$\Psi_u^{-1}(o)$ はある十分大きなコンパクト集合 $K$ に含まれるとする。[13] コンパクト集合に含まれる閉集合はコンパクトだから，$\tilde{\Pi}^{-1}(r)$ はコンパクトである。ゆえに $\tilde{\Pi}_Q^{-1}(r)$ は有限集合である。すなわち $Eex(r, u)$ は有限集合である。

$\tilde{\Pi}_Q^{-1}(r) \ni \{\alpha_1, \cdots, \alpha_h\}$ とすると，$\alpha_i$ の $\Psi_u^{-1}(o)$ における近傍 $V_i$ をとり次の条件が成り立つようにできる：（i） $V_i \cap V_j = \phi (i \neq j)$.（ii） $\tilde{\Pi}_Q$ は $V_i$ を $r$ の $(\bar{p})^m$ における近傍 $U_i$ の上へ $C^\infty$ 級微分同相にうつす。

いま，$O = \bigcap_{i=1}^{h} U_i - \tilde{\Pi}_Q(\Psi_u^{-1}(o) - V_1 - \cdots - V_k)$ とおくと，$O$ は $r$ の $(\bar{p})^m$ における近傍で，各 $y \in O$ に対し $\# \tilde{\Pi}_Q^{-1}(r) = h$ である。ここに $\# \tilde{\Pi}_Q^{-1}(r)$ は集合 $\tilde{\Pi}_Q^{-1}(r)$ の点の個数である。これは $Eex(r, u)$ が（$r, u$）において連続的に動くことを含意している。

さらに，$\tilde{\Pi}_Q$ の臨界値の集合はサードの定理より測度ゼロであるから，$\tilde{\Pi}_Q$ の正則値の集合（臨界値の集合の補集合）は $(\bar{p})^m$ の稠密な部分集合である。これは上の命題が成り立つことを含意している。

以上において効用関数 $u_h \in U^m (h = 1, \cdots, m)$ は可変的なものとして扱われたが，以下においてそれは固定的なものとして扱い，次のように定義される

$u_h$ に対応する大局的な $C^r(r \geqq 2)$ 需要関数 $f_h$ を伴なった純粋交換経済を分析する。[14]

$: f_h: R \times S \to \bar{p},\ f_h(w^h, p) = x^h$ with $\max_{x^h \in B_h} u_h(x^h)$, $B_h = \{y \in \bar{p} \mid \langle p, y \rangle = w^h\}$.

ここに $w^h \in R$ は消費者 $h$ の富を表わす。

効用関数 $u_h$ が固定的であるから需要関数 $f_h$ も固定的であり，選好は需要関数 $f_h$ によって表わされる。したがって，経済は初期賦存量の状態 $r \in (\bar{p})^m$ によって描写される。

消費者の非飽和性を仮定すると，各 $h(=1, \cdots m)$ に対し，$p \cdot f_h(w^h, p) = w^h$（ワルラス法則）が成り立つ。

経済 $r$ に対し，$\sum f_h(p \cdot r^h, p) = \sum r^h$ が成り立つとき，$(r, p) \in (\bar{p})^m \times S$ を均衡といい，$p \in S$ を均衡価格ベクトルとよぶ。

経済 $r$ に対し，均衡集合 $E(r) = \{(r, p) \in (\bar{p})^m \times S \mid \sum f_h(p \cdot r^h, p) = \sum r^h\}$ は $(\bar{p})^m \times S$ の余次元 $l-1$ の閉部分多様体である。

実際，ワルラス法則により $l-1$ 個の超過需要関数のみが独立であるから，超過需要写像を，$F: (\bar{p}) \times S \to R^{l-1}$

$$(r, p) \mapsto (\sum_{h=1}^{m} f_h^{(i)}(p \cdot r^h, p) - \sum_{h=1}^{m} r_i^h]_{i=1}^{l-1})$$

$$f_h = (f_h^{(1)}, \cdots, f_h^{(l)}): R \times S \to \bar{p}.$$

によって定義すると，$F$ は $C^r(r \geqq 2)$ 写像であり，$E(r) = F^{-1}(o)$ である。

上述と同様の計算により，$o \in R^{l-1}$ が $F$ の正則値であることがわかる。

ここで正則経済を次のように定義する。

経済 $r$ が正則であるとは，$p \in S$ に対し $o \in R^{l-1}$ が $F$ の正則値であることをいう。あるいは，$\Pi: (\bar{p})^m \times S \to (\bar{p})^m: (r, p) \mapsto r$ なる射影の均衡多様体 $E(r)$ への制限 $\tilde{\Pi} = \Pi | E(r): E(r) \to (p)^m$ に関して，経済 $r$ が $\tilde{\Pi}$ の正則値であるとき，経済 $r$ を正則経済という。$\tilde{\Pi}$ をデブリュー写像とよぶ。

以下における分析は，正則経済 $r$ に対する均衡集合 $\tilde{\Pi}^{-1}(r) \subset E(r)$ の規模に関してである。

逆関数定理より，正則経済 $r$ に対する $E(r)$ の部分空間 $\tilde{\Pi}^{-1}(r)$ は離散位

相をもつ。

ここで，価格多様体 $S$ の境界 $\partial S$ における需要関数 $f_h: R\times S\to\bar{p}$ の挙動について次の仮定（境界条件）をおく。

$^{\forall}(w_n^h,\ p^n)\in R\times S$, $\mathrm{E}(w_0^h,\ p^0)\in R\times\partial S$: $(w_n^h,\ p^n)\to(w_0^h,\ p^0)$ as $\mathrm{n}\to\infty$,

が成り立つとき，$\lim_{n=\infty}\|f_h(w_n^h,\ p^n)\|=+\infty.$

これは，経済 $r$ が与えられたときある商品の価格がゼロに近づくと，需要関数 $f_h$ は非有界となる，ということを含意している。

この仮定のもとで，デブリュー写像 $\widetilde{\Pi}$ は固有写像である。すなわち，$(\bar{p})^m$ の任意のコンパクト集合の $\widetilde{\Pi}$ による逆像は $E(r)$ のコンパクト集合である。

したがって，$(\bar{p})^m$ のコンパクト集合 $\{r\}$ に対し $\widetilde{\Pi}^{-1}(r)$ はコンパクトだから，$\widetilde{\Pi}^{-1}(r)$ の離散性とコンパクト性より，$\widetilde{\Pi}^{-1}(r)$ は有限集合である。さらに，前で論じたように，正則経済 $r$ の近傍において $\widetilde{\Pi}^{-1}(r)$ の点の個数は一定である。

以上のことをまとめると次の結果を得る。

正則経済 $r$ に対し，正則均衡集合 $\widetilde{\Pi}^{-1}(r)$ は $r$ において連続的に動く有限集合である。

これは正則経済の近傍における均衡価格の挙動がスムースであることを意味している。この点において正則経済は望ましい性質を有していることになったが，次に，そのような正則経済の集合は $E(r)$ においてどれぐらいの規模をもつか，ということが分析されなければならない。

デブリュー写像の臨界点の集合を $\Sigma$ とすると，$\widetilde{\Pi}$ の正則値の集合 $\widetilde{\mathrm{R}}$（正則経済の集合）は $(\bar{p})^m-\widetilde{\Pi}(\Sigma)$ である。モース＝サードの定理[15] より，$\widetilde{\Pi}(\Sigma)$ は $(\bar{p})^m$ において測度ゼロであり，したがって正則経済の集合 $\widetilde{R}$ は $(\bar{p})^m$ において稠密である。

さらに，$(r,\ p)\in E(r)$ における $\widetilde{\Pi}$ の微分 $D\widetilde{\Pi}(r,\ p): T(r,\ p)E(r)\to T_r(p)^m$ の連続性により，$\Sigma=\{r,\ p)\in E(r)\,|\,D\widetilde{\Pi}\,(r,p)=0\}$ は $E(r)$ において閉であり，$\widetilde{\Pi}$ の固有性より，$\widetilde{\Pi}(\Sigma)$ は $(\bar{p})^m$ において閉である。ゆえに，正則経済の集合 $\widetilde{\mathrm{R}}$ は $(\bar{p})^m$ の開集合，すなわち開部分多様体である。

以上のことから次の命題が得られる。

正則経済の集合は $(\bar{P})^m$ において開かつ稠密である。

ほとんどすべての経済は正則経済であることが明らかになったが，さらに，均衡集合 $E(r)$ の非空性について次の命題が成り立つ。

任意の正則経済に対し，均衡価格は奇数個存在する。

任意の経済に対し，均衡価格は少なくとも１つ存在する。

最後に，パレート最適と正則経済の関係についてみてみよう。

前に定義された最適取引 TO をここでの文脈で解釈すると次のようになる。

均衡 $(r, p)\in E(r)$ が最適取引であるとは，各 $h(=1, \cdots, m)$ に対し $f_h(p\cdot r^h, p)=\gamma^h$ が成り立つことである。

このとき，パレート最適集合はデブリュー写像 $\tilde{\Pi}$ による最適取引集合の像であり，その２つの集合はともに $R^{m+l-1}$ と微分同相である。さらに，パレート最適集合は正則経済の集合の連結成分に含まれる。すなわち，パレート最適集合はすべて正則経済からなる。

ゆえに，パレート最適集合はもっとも望ましい経済の集合である。

注(1) 以下で扱われる諸命題は，Smale〔1973a, b., 1974a, b, c, d〕, Simon〔1975〕において証明されたものであり，したがって詳細な証明についてはこれらの論文を参照。

(2) 陰関数定理の系，「$n\geqq q$, $g: M\to R^q$ は $C^r$ 級で $M$ は $C^r$ 多様体とする。$Dg(x): T_xM\to R^q$ において，rank $Dg(x)=q$ ならば，$x$ の $M$ における近傍 $N(x)$ が存在して，$N(x)\cap g^{-1}(g(x))$ は $M$ の余次元 $q$ の部分多様体である。」

(3) Simon and Titus〔1975〕における定理Bにおいて，効用写像の稠密な開集合に対し，$S(u)$ と $\theta(u)$ は $\mathring{\Omega}$ の $p-1$ 次元の部分多様体である，ことが証明されている。

(4) 注(2)と同じ，

(5) Simon and Titus [1975] の定理14において，DGN は生成的に有限個の点からなり，そのうちのどの点も経済的に最適ではない，ということが証明されている。

(6) 横田〔1978〕. pp. 123–127.

(7) Smale〔1973a, b. 1974a, b, c, d.〕. Van Geldrop [1978].

(8) 野口・福田〔1976〕. 主として，pp. 73–77.

(9) 効用関数 $u_h$ は特異点をもたないと仮定する。すなわち消費者は取引によって至福点へ到達しない。

(10) 服部 〔1976〕 p. 105 系 3.2.

(11) Abraham and Robbin 〔1967〕, pp. 46–50.

(12) ここでの証明は中岡 〔1978〕, p. 161. による。

(13) Dierker 〔1972〕 においても同様の仮定がおかれている。

(14) Balasko 〔1975a, b. 1978〕, Debreu 〔1970, 1976〕, Dierker 〔1972〕, Dierker and Dierker 〔1972〕 によって扱われた命題を以下において扱う。

(15) Hirsch〔1976〕, p. 69.

**参考文献**


Abraham, R. and J. Robbin, 1967, *Transversal mappings and flows* (Benjamin, New York).

Balasko, Y., 1975a, "Some results on uniqueness and on stability of equilibrium in general equibrium theory," *Journal of Mathematical Economics* 2, 95–118.

Balasko, Y., 1975b, "The graph of the Walras correspondence," *Econometrica* 43, 907–912.

Balasko, Y., 1978, "Economic equilibrium and catastrophe theory: An introduction," *Econometrica* 46, 557–569.

Debreu, G., 1959, *Theory of value* (Wiley, New York). (丸山徹訳, 『価値の理論』, 東洋経済新報社, 1977年).

Debreu, G., 1970, "Economies with a finite set of equilibria," *Econometrica* 38, 387–392.

Debreu, G., 1976, "Regular differentiable economies," *American Economic Review* 66, No. 2, 280–287.

Dierker, E., 1972, "Two remarks on the number of equilibria of an economy," *Econometrica,* 40, 951–53.

Dierker, E., and H. Dierker, 1972, "The local uniqueness of equilibria," *Econometrica* 40, 867–81.

Hirsch, M. W., 1976, *Differential topology* (Springer-Verlag, New York Heidelberg Berliin).

Simon, C. P, and C. Titus, 1975, "Characterization of optima in smooth pareto economic systems," *Journal of Mathematical Economics* 2, 297–330.

Smale, S., 1973a, "Global analysis and economics I, Pareto optimum and a generalization of Morse theory, in: M, Peixoto, ed., *Dynamical Systems* (Academic Press, New York).

Smale, S., 1973b, "Optimizing several functions, Proceedings of the Tokyo Manifolds Conference, Akio Hattori, ed.

Smale, S., 1974a, "Global analysis and economics II A, Extension of a theorem of Debreu," *Journal of Mathematical Ecoonomics* 1, 1–14.

Smale, S., 1974b, "Global analysis and economics III, Pareto optima and price equilibria," *Journal of Mathematical Economics* 1, 107–117.

Smale, S., 1974c, "Global analysis and economics IV, Finiteness and stability of equilibria with general consumption sets and production," *Journal of Mathematical Economics* 1, 119–127.

Smale, S., 1974d, "Global analysis and economics V, Pareto theory with constraints," *Journal of Mathematical Economics* 2, 213–221.

Van Geldrop, J. H., 1978, "Extension of a theorem of Smale on equilibria for pure exchange eoonomies, *Journal of Mathematical Economics* 5, 245–253.

中岡稔,. 1978,『位相数学入門』, 朝倉書店.

野口広, 福田拓生,. 1976,『初等カタストロフィー』, 共立出版.

服部晶夫,. 1976,『多様体』, 岩波書店.

松島与三,. 1979,『多様体入門』, 裳華房.

横田一郎,. 1978,『多様体とモース理論』, 現代数学社.

(後期課程第3年度生伊達邦春教授研究指導)