非正規性の下での共通平均母数の結合推定量について

井　上　　　淳

1. はじめに

平均ベクトル $\mu\mathbf{1}_{n_i}(=(\mu,\ldots,\mu)')$，分散共分散行列 $\sigma_i^2\,\mathrm{I}_{n_i}$ (I_{n_i}：n_i 次単位行列，σ_i^2 は未知の正数) を持つ n_i 次元確率ベクトル $y_i=(y_{i1},y_{i2},\ldots,y_{in_i})'$ $(i=1,2)$ に基づいて未知の実数値 μ を推定する問題を考える．

y_i の情報のみを用いて μ の推定を行う場合，最良線形不偏推定量は最小二乗推定量 $\overline{y}_i=\mathbf{1}_{n_i}'y_i/n_i$ であり，その分散 $\mathrm{V}\,(\overline{y}_i)$ は次式で与えられる：

$$\mathrm{V}\,(\overline{y}_i) \;=\; \sigma_i^2/n_i \qquad (i=1,\,2\,).$$

これに対して，$y_1,\,y_2$ の情報を結合して μ の推定を行う場合，一般化最小二乗推定量

$$\widehat{\mu}_G \;=\; \frac{(n_1/\sigma_1^2)\,\overline{y}_1 \;+\; (n_2/\sigma_2^2)\,\overline{y}_2}{(n_1/\sigma_1^2)+(n_2/\sigma_2^2)} \tag{1.1}$$

が最良線形不偏推定量になり，その分散は $\mathrm{V}\,(\,\widehat{\mu}_G\,) \;=\; \left(n_1\sigma_1^{-2}+n_2\sigma_2^{-2}\right)^{-1}$ で与えられる．しかし，母数 $\sigma_1^2,\,\sigma_2^2$ は未知であるから，$\widehat{\mu}_G$ を μ の推定量として実際に使用することはできない．

そこで，y_i の二次形式 $\widehat{\sigma_i}^2=y_i'\,\mathrm{P}_i\,y_i/(n_i-1)$ $\;(\,\mathrm{P}_i=\mathrm{I}_{n_i}\,-\,(1/n_i)\mathbf{1}_{n_i}\mathbf{1}_{n_i}'\,)$ が σ_i^2 の不偏推定量になることに着目し，(1.1) において σ_i^2 を $\widehat{\sigma_i}^2$ で置換することが考えられる：

$$\widehat{\mu}_{FG} \;=\; \frac{(n_1/\widehat{\sigma_1}^2)\,\overline{y}_1 \;+\; (n_2/\widehat{\sigma_2}^2)\,\overline{y}_2}{(n_1/\widehat{\sigma_1}^2)+(n_2/\widehat{\sigma_2}^2)}\;. \tag{1.2}$$

(1.2) で定められる $\widehat{\mu}_{FG}$ を μ の実行可能な一般化最小二乗推定量，あるいは Graybill-Deal 推定量と呼ぶ．実行可能な一般化最小二乗推定量は，k 個の確率ベクトル $y_1,\,y_2,\,\ldots\,,\,y_k$ に基づいて μ を推定する場合にも定義が可能である．この場合，$\widehat{\mu}_{FG}$ は次で与えられる：

$$\widehat{\mu}_{FG} \;=\; \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\,\widehat{\sigma_i}^{-2}\,\overline{y}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\,\widehat{\sigma_i}^{-2}\right)^{-1}\;. \tag{1.3}$$

一般に，(1.3) で定められる $\widehat{\mu}_{FG}$ の分散を解析的に評価することは困難である．しかし，大標本 ($k \to \infty$ という状況) における $\widehat{\mu}_{FG}$ の漸近分散の評価は，適当な正則条件の下で可能である．Inoue (1999) は，正規性の条件の下で $\widehat{\mu}_{FG}$ の漸近分散が次式で表されることを示した：

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 1)^2}{(n_i - 3)(n_i - 5)} n_i \sigma_i^{-2} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 1)}{(n_i - 3)} n_i \sigma_i^{-2} \right\}^{-2} . \tag{1.4}$$

この表現式により，大標本における実行可能な最小二乗推定量 $\widehat{\mu}_{FG}$ には改良の余地があることが分かる．より具体的に言うと，Schwarz の不等式により

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 1)}{(n_i - 3)} n_i \sigma_i^{-2} \right\}^2 \leq \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 1)^2}{(n_i - 3)(n_i - 5)} n_i \sigma_i^{-2} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 5)}{(n_i - 3)} n_i \sigma_i^{-2} \right\}$$

が成り立つから，漸近分散 (1.4) は

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 5)}{(n_i - 3)} n_i \sigma_i^{-2} \right\}^{-1}$$

よりも小さくなれず，(1.4) は Crámer-Rao の下限 $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i^{-2} \right)^{-1}$ を達成できないということが分かる．

漸近分散 (1.4) の Crámer-Rao の下限からの乖離の程度は n_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) が小さいほど顕著になる．このことは，$n_i = m (\geq 6)$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) なる単純な状況を考えてみれば直ちに理解できる：

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 1)^2}{(n_i - 3)(n_i - 5)} n_i \sigma_i^{-2} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 1)}{(n_i - 3)} n_i \sigma_i^{-2} \right\}^{-2}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 5)}{(n_i - 3)} n_i \sigma_i^{-2} \right\}^{-1} = \left(\frac{m-3}{m-5} \right) \left(\sum_{i=1}^{k} m \, \sigma_i^{-2} \right)^{-1} > \left(\sum_{i=1}^{k} m \, \sigma_i^{-2} \right)^{-1} .$$

この場合，(1.4) の Crámer-Rao の下限に対する比は $(m-3)(m-5)^{-1}$ となる．特に $m = 6, 7$ の場合，この比はそれぞれ 3, 2 になることが分かる．

上記のことから，大標本下では実行可能な最小二乗推定量 $\widehat{\mu}_{FG}$ に改良の余地があることが分かる．Inoue (1999) はこの改良問題に取り組み，一定の成果を得ている．具体的に

は，$\widehat{\mu}_{FG}$ を初期推定量とする二段階推定量を提案し，その漸近分散が次で与えられることを示している：

$$\left\{ \frac{m-3}{m-5} - \frac{6(m+2)}{m^2(m-5)} \right\} \left(\sum_{i=1}^{k} m\, \sigma_i^{-2} \right)^{-1} .$$

これにより，実行可能な一般化最小二乗推定量の（漸近的な意味での）改良が実行されたことが分かる．

Inoue (1999) が提案した手法を反復することにより，$\widehat{\mu}_{FG}$ の改良の程度を高めることも可能である．実際，Inoue (2003) はより一般的なモデルの下で推定量列を構成し，実行可能な一般化最小二乗推定量よりも高い精度を持つ推定量を導出している．

さて，$\widehat{\mu}_{FG}$ の精度自体にも関心があるが，その前に $\widehat{\mu}_{FG}$ が次の関係式を満たしているのかどうかを知りたいと思うのは自然なことであろう：

$$\mathrm{V}\left(\widehat{\mu}_{FG}\right) \;\leq\; \min\left\{ \mathrm{V}(\overline{y}_1), \mathrm{V}(\overline{y}_2) \right\} \;=\; \min\left(\sigma_1^2/n_1\,,\; \sigma_2^2/n_2\right). \tag{1.5}$$

y_1, y_2 の情報を結合して作られる $\widehat{\mu}_{FG}$ は y_1，y_2 単独で作られる $\overline{y}_1, \overline{y}_2$ よりも高い精度を持つ必要がある．関係式 (1.5) が保証されないのであれば，$\widehat{\mu}_{FG}$ を利用する意味は薄れる．

Graybill and Deal (1959), Shinozaki (1978) らは，y_1, y_2 が多変量正規分布に従う場合において関係式 (1.5) を満たすための必要十分条件

$$2(n_i-1)(n_j-5) \;\geq\; (n_i+1)(n_j-1) \qquad (i \neq j)$$

を導いている．この条件は $(n_1-3)(n_2-9) \geq 16$ かつ $(n_1-9)(n_2-3) \geq 16$ が満たされること，すなわち

$$\left[\, (\, n_1 \geq 10,\; n_2 \geq 19\,) \text{ or } (\, n_1 \geq 11,\; n_2 \geq 11\,) \text{ or } (\, n_1 \geq 19,\; n_2 \geq 10\,) \,\right] \tag{1.6}$$

と同値である．条件 (1.6) が満たされるならば，誤差分散の未知性に関わらず，($\overline{y}_1$ と $\overline{y}_2$ でなく) $\widehat{\mu}_{FG}$ を用いた方が良い．一方で，(1.6) が満たされないならば，$\widehat{\mu}_{FG}$ は $\overline{y}_1$ と $\overline{y}_2$ の少なくとも一方よりは精度が低くなる．

正規性の下で結合推定量 $\widehat{\mu}_{FG}$ を使用する際の基準（のひとつ）が (1.6) によって与えられた．これに続く関心として，非正規性の下で (1.6) と同様の条件を導くことができな

いのだろうかという疑問が生じる．例えば，y_1, y_2 の一方，もしくは両方が多変量正規分布に従わない場合，(1.6) はどのように変化するのだろうかという関心が生じる．

本稿では，Graybill and Deal (1959), Shinozaki (1978) らが導出した条件を，y_1, y_2 が楕円分布に従う場合に一般化する．結果として，y_1, y_2 がそれぞれ異なる楕円分布に従う場合に，それらに基づく $\widehat{\mu}_{FG}$ の分散が関係式 (1.5) を満たすための条件が導かれる．

2. 補助定理

この節では，y_1, y_2 が楕円分布に従う場合を考え，幾つかの補助定理を準備する．以後，次式を満たす y_i について考える：

$$y_i \;=\; \mu\mathbf{1}_{n_i} \;+\; \varepsilon_i \;, \quad \varepsilon_i/\sigma_i \;\sim\; \mathrm{Ell}\,(\,\mathbf{0}\,,\,\mathrm{I}_{n_i},\, g_i)\;\;(i=1,\,2).$$

但し，記号 $\mathrm{Ell}\,(\,\mathbf{0}\,,\,\mathrm{I}_{n_i},\, g_i)$ は平均が $\mathbf{0}$, 分散共分散行列が I_{n_i}, 確率密度関数が $g_i(\cdot)$ の楕円分布を表すものとし，誤差ベクトル $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は互いに独立と仮定する．なお，$g_1 \neq g_2$ であれば，ε_1/σ_1 と ε_2/σ_2 は異なる型の楕円分布に従うことに注意する．

補助定理 2.1 ： (1.2) 式で定義される $\widehat{\mu}_{FG}$ は μ の不偏推定量である．

証明の概略

冪等行列

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{I}_{n_i} \,-\, (1/n_i)\mathbf{1}_{n_i}\mathbf{1}_{n_i}^{'}$$

の固有値 0 に対応する正規固有ベクトルは $n_i^{-1/2}\mathbf{1}_{n_i}$ であり，これは固有値 1 に対応する正規固有ベクトルと直交する．いま，$n_i^{-1/2}\mathbf{1}_{n_i}$ を第 1 列に持つ直交行列 Q_i と対角行列 $\Lambda_i = \mathrm{diag}\,(\,0,\,\mathrm{I}_{n_i-1}\,)$ をとることにより，

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{Q}_i\Lambda_i\mathrm{Q}_i^{'}$$

なる分解表現を得る．ここで，直交変換

$$f_i = \mathrm{Q}_i^{'}\varepsilon_i$$

によって確率ベクトル f_i を定義する．楕円分布の特性により，

$$f_i\,(=\,(\,f_{i1},\,f_{i2},\,\ldots\,,f_{in_i}\,)^{'} \;=\; (\,f_{i1},\,\mathbf{f}_{i(2)}^{'}\,)')$$

は ε_i と同一の楕円分布 $\mathrm{Ell}(\mathbf{0}, \mathrm{I}_{n_i}, g_i)$ に従う．

さて，

$$(n_i-1)\widehat{\sigma}_i^{\,2} \;=\; y_i'\mathrm{P}_i y_i \;=\; \varepsilon_i'\mathrm{P}_i\varepsilon_i \;=\; f_i'\Lambda_i f_i \;=\; ||\,\mathbf{f}_{i(2)}\,||^2 ,$$

$$n_i(\overline{y}_i - \mu) \;=\; \mathbf{1}_{n_i}'\varepsilon_i \;=\; \mathbf{1}_{n_i}'\mathrm{Q}_i f_i \;=\; (n_i^{1/2}, 0, \ldots, 0) f_i \;=\; n_i^{1/2} f_{i1}$$

であることにより，次の表現を得る：

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{FG} - \mu &= \left\{\sum_{i=1}^{2} n_i\widehat{\sigma}_i^{\,-2}(\overline{y}_i - \mu)\right\}\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i\widehat{\sigma}_i^{\,-2}\right\}^{-1} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{2} \widehat{\sigma}_i^{\,-2} n_i^{1/2} f_{i1}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i\widehat{\sigma}_i^{\,-2}\right\}^{-1} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{2} n_i^{1/2}(n_i-1)\frac{f_{i1}}{||\,\mathbf{f}_{i(2)}\,||^2}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i(n_i-1)\frac{1}{||\,\mathbf{f}_{i(2)}\,||^2}\right\}^{-1}. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

f_1 と f_2 が独立であることと，楕円分布の特性により，$\mathbf{f}_{1(2)}$, $\mathbf{f}_{2(2)}$ が与えられた時の f_{i1} の条件付き期待値は 0 になる：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(f_{i1} \mid \mathbf{f}_{1(2)}, \mathbf{f}_{2(2)}\right) &= \mathrm{E}\left(f_{i1} \mid \mathbf{f}_{i(2)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{i1} \times \frac{g_i\left(f_{i1}^2 + ||\,\mathbf{f}_{i(2)}\,||^2\right)}{g_{i(2)}\left(||\,\mathbf{f}_{i(2)}\,||^2\right)}\, df_{i1} \\
&= 0 \quad (i = 1, 2).
\end{aligned}$$

但し，$g_{i(2)}(\cdot)$ は $\mathbf{f}_{i(2)}$ の周辺確率密度関数を表すものとする．よって，(2.1) 式の条件付期待値をとると

$$\mathrm{E}\left(\widehat{\mu}_{FG} - \mu \mid \mathbf{f}_{1(2)}, \mathbf{f}_{2(2)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{\sum_{i=1}^{2} n_i^{1/2}(n_i-1)\frac{\mathrm{E}\left(f_{i1} \mid \mathbf{f}_{1(2)}, \mathbf{f}_{2(2)}\right)}{||\,\mathbf{f}_{i(2)}\,||^2}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i(n_i-1)\frac{1}{||\,\mathbf{f}_{i(2)}\,||^2}\right\}^{-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり，

$$\mathrm{E}(\widehat{\mu}_{FG}-\mu) = \mathrm{E}\big\{\mathrm{E}\big(\widehat{\mu}_{FG}-\mu \mid \mathbf{f}_{1(2)},\, \mathbf{f}_{2(2)}\big)\big\} = 0\,,$$

すなわち $\mathrm{E}(\widehat{\mu}_{FG}) = \mu$ であることが分かる．□

補助定理 2.2 ： $\widehat{\mu}_{FG}$ の分散は次の形で表される：

$$\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG}) = \mathrm{E}\left[\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i\sigma_i^2\widehat{\sigma}_i^{-4}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i\widehat{\sigma}_i^{-2}\right\}^{-2}\right].$$

証明の概略

補助定理 2.1 により，$\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG}) = \mathrm{E}\{(\widehat{\mu}_{FG}-\mu)^2\}$ がまず成り立つ．また，(2.1) により

$$\begin{aligned}(\widehat{\mu}_{FG}-\mu)^2 &= \left\{\sum_{i=1}^{2} n_i(n_i-1)^2\frac{f_{i1}^2}{\|\mathbf{f}_{i(2)}\|^4} + \frac{2\,n_1^{1/2}n_2^{1/2}(n_1-1)(n_2-1)\,f_{11}f_{21}}{\|\mathbf{f}_{1(2)}\|^2\|\mathbf{f}_{2(2)}\|^2}\right\}\\ &\quad\times\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i(n_i-1)\|\mathbf{f}_{i(2)}\|^{-2}\right\}^{-2}\end{aligned}$$

と表せる．ここで，楕円分布の特性により，$\mathbf{f}_{1(2)}, \mathbf{f}_{2(2)}$ が与えられた時の $f_{11}f_{21}$ の条件付き期待値 $\mathrm{E}\big(f_{11}f_{21} \mid \mathbf{f}_{1(2)},\, \mathbf{f}_{2(2)}\big)$ は 0 になり，f_{i1}^2 の条件付期待値 $\mathrm{E}\big(f_{i1}^2 \mid \mathbf{f}_{1(2)}, \mathbf{f}_{2(2)}\big)$ は σ_i^2 になる：

$$\mathrm{E}\big(f_{11}f_{21} \mid \mathbf{f}_{1(2)},\, \mathbf{f}_{2(2)}\big) = \mathrm{E}\big(f_{11} \mid \mathbf{f}_{1(2)}\big)\times\mathrm{E}\big(f_{21} \mid \mathbf{f}_{2(2)}\big) = 0;$$

$$\mathrm{E}\big(f_{i1}^2 \mid \mathbf{f}_{1(2)},\, \mathbf{f}_{2(2)}\big) = \mathrm{E}\big(f_{i1}^2 \mid \mathbf{f}_{i(2)}\big) = \sigma_i^2 \quad (i=1,2)\,.$$

従って，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG}) &= \mathrm{E}\left[\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i(n_i-1)^2\frac{\sigma_i^2}{\|\mathbf{f}_{i(2)}\|^4}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i(n_i-1)\|\mathbf{f}_{i(2)}\|^{-2}\right\}^{-2}\right]\\ &= \mathrm{E}\left[\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i\sigma_i^2\widehat{\sigma}_i^{-4}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{2} n_i\widehat{\sigma}_i^{-2}\right\}^{-2}\right].\ \square\end{aligned}$$

次の補助定理は楕円分布の特性から直接的に導かれるものである.

補助定理 2.3 ：楕円分布 Ell$(\mathbf{0}, \mathrm{I}_n, g)$ に従う n 次元確率ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ を m 次元ベクトル $\mathbf{x}_{(1)} = (x_1, \ldots, x_m)'$ と $(n-m)$ 次元ベクトル $\mathbf{x}_{(1)} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)'$ に分け，$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{(1)}', \mathbf{x}_{(2)}')'$ と表すものとする．この時，次の等式が任意の実数 $\alpha\,(> -m/2)$ に対して成り立つ：

$$\mathrm{E}\left(\|\mathbf{x}_{(1)}\|^{2\alpha}\right) \times \Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \;=\; \mathrm{E}\left(\|\mathbf{x}\|^{2\alpha}\right) \times \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+\alpha\right).$$

証明の概略

Fang, Kotz and Ng (1989) の Lemma 4.1 により，$\mathbf{x}'\mathbf{x}(=: v)$ の確率密度関数 $h(v)$, $(\mathbf{x}_{(1)}'\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}'\mathbf{x}_{(2)})(=: (v_1, v_2))$ の同時確率密度関数 $h(v_1, v_2)$ を，次の形で表現できる：

$$\begin{aligned} h(v) &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\, v^{(n/2)-1} g(v)\,, \\ h(v_1, v_2) &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma((n-m)/2)}\, v_1^{(m/2)-1} v_2^{(n-m)/2-1} g(v_1+v_2)\,. \end{aligned}$$

まず，次が成り立つ：

$$\mathrm{E}\left(\|\mathbf{x}\|^{2\alpha}\right) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty v^{(n/2)+\alpha-1} g(v)\, dv\,. \tag{2.2}$$

次に，

$$\mathrm{E}\left(\|\mathbf{x}_{(1)}\|^{2\alpha}\right) = \frac{\pi^{n/2}\Gamma((m/2)+\alpha)}{\Gamma(m/2)\Gamma((n/2)+\alpha)} \int_0^\infty v^{(n/2)+\alpha-1} g(v)\, dv \tag{2.3}$$

の成立が以下の計算によって分かる：

$$\begin{aligned} &\pi^{-n/2}\,\Gamma(m/2)\,\Gamma((n-m)/2)\cdot \mathrm{E}\left(\|\mathbf{x}_{(1)}\|^{2\alpha}\right) \\ &\quad= \int_0^\infty \int_0^\infty v_1^{(m/2)+\alpha-1} v_2^{(n-m)/2-1} g(v_1+v_2)\, dv_1 dv_2 \\ &\quad= \int_0^\infty du_1 \int_0^1 \{u_1(1-u_2)\}^{(m/2)+\alpha-1} (u_1 u_2)^{(n-m)/2-1} g(u_1)\, u_1\, du_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (\, u_1 := v_1 + v_2\,, \quad u_2 := v_2/(\,v_1 + v_2\,)\,) \\
= & \int_0^\infty u_1^{(n/2)+\alpha-1}\, g(u_1)\, du_1 \int_0^1 (1-u_2)^{(m/2)+\alpha-1} u_2^{(n-m)/2-1}\, du_2 \\
= & \ \mathrm{B}\,(\,(n-m)/2,\,(m/2)+\alpha\,) \int_0^\infty u_1^{(n/2)+\alpha-1} g(u_1)\, du_1 \\
= & \ \frac{\Gamma((n-m)/2)\Gamma((m/2)+\alpha)}{\Gamma\,(\,(n/2)+\alpha\,)} \int_0^\infty u_1^{(n/2)+\alpha-1} g(u_1)\, du_1\,.
\end{aligned}
$$

(2.2), (2.3) より，補助定理 2.3 が成り立つ． □

3. 主要定理

この節では，前節の結果を利用して μ の実行可能な一般化最小二乗推定量 $\widehat{\mu}_{FG}$ が不等式 (1.5) を満たすための必要十分条件を導く．以下，次の記号 τ_{ia}, τ_{ib}, τ_{ic} を用いる：

$$
\tau_{ia} \;=\; \frac{\mathrm{E}\,(\,\|\,\varepsilon_i/\sigma_i\,\|^4\,)}{(n_i+2)n_i}, \qquad \tau_{ib} = \;(n_i-2)(n_i-4)\mathrm{E}\left(\|\,\varepsilon_i/\sigma_i\,\|^{-4}\right),
$$

$$
\tau_{ic} \;=\; (n_i-2)\mathrm{E}\left(\|\,\varepsilon_i/\sigma_i\,\|^{-2}\right) \quad (\,i=1,\,2\,).
$$

正規性の条件下では

$$
\tau_{ia} \;=\; \tau_{ib} \;=\; \tau_{ic} \;=\; 1 \quad (\,i=1,\,2\,)
$$

が成り立つため，Graybill and Deal (1959), Shinozaki (1978) らが導出した条件式中には τ_{ia}, τ_{ib}, τ_{ic} の値が現れない．しかし，非正規性の条件下では，これらの値を明示する必要がある．

定理 3.1 ： 不等式 (1.5) が成立するための必要十分条件は，次で与えられる：

$$
\frac{2\,(n_j-1)}{\tau_{ja}\,(n_j+1)} \;\geq\; \frac{\tau_{ib}\,(n_i-1)}{\tau_{ic}\,(n_i-5)} \quad (\,i \neq j\,). \tag{3.1}
$$

証明の概略（必要性）

Graybill and Deal (1959) の Theorem 1 の証明を適当に修正することにより，本定理の証明を行うことにする．まず，$\sigma_1^2/n_1 \le \sigma_2^2/n_2$ の場合を考える．

$$v = (\widehat{\sigma}_1{}^2/\sigma_1^2)/(\widehat{\sigma}_2{}^2/\sigma_2^2), \quad a = (\sigma_1^2/n_1)/(\sigma_2^2/n_2) \quad (0 \le a \le 1)$$

とおくと，補助定理 2.2 で与えられた $\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG})$ を

$$\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG}) = (\sigma_1^2/n_1)\mathrm{E}\left\{(1+av^2)(1+av)^{-2}\right\}$$

と書き直すことができる．これにより，(1.5) が成り立つためには

$$\mathrm{E}\left\{(1+av^2)(1+av)^{-2}\right\} \le 1 \tag{3.2}$$

となることが必要十分であることが分かる．いま，(3.2) 式の左辺を a の関数 $h(a)$ とみなすと，適当な正則条件の下で

$$h'(a) = \mathrm{E}\left\{v(v-av^2-2)(1+av)^{-3}\right\}$$

となる．ここで $h(0)=1$ であることに注意すると，(3.2) の下では $h'(0) \le 0$，すなわち

$$\mathrm{E}(v^2 - 2v) \le 0 \tag{3.3}$$

が成り立つことが必要であることが分かる．更に，補助定理 2.3 の結果を利用して期待値 $\mathrm{E}(v)$, $\mathrm{E}(v^2)$ を求めると，

$$\mathrm{E}(v) = \frac{n_2-1}{n_2-3}\tau_{2c}, \quad \mathrm{E}(v^2) = \frac{n_1+1}{n_1-1}\tau_{1a} \times \frac{(n_2-1)^2}{(n_2-3)(n_2-5)}\tau_{2b} \tag{3.4}$$

となる．従って，(3.3) は次と同値になる：

$$\frac{2(n_1-1)}{\tau_{1a}(n_1+1)} \ \ge\ \frac{\tau_{2b}(n_2-1)}{\tau_{2c}(n_2-5)}. \tag{3.5}$$

以上と同様の議論を行うことにより，$\sigma_2^2/n_2 \le \sigma_1^2/n_1$ の場合には

$$\frac{2(n_2-1)}{\tau_{2a}(n_2+1)} \ \ge\ \frac{\tau_{1b}(n_1-1)}{\tau_{1c}(n_1-5)} \tag{3.6}$$

が成り立つことが (1.5) の成立のための必要条件であることが示せる．(3.5)，(3.6) をまとめれば，(3.1) になる．この式は σ_2^2/n_2 と σ_1^2/n_1 の大小関係に依存しない．よって必要性の証明が完了した． □

証明の概略（十分性）

Shinozaki (1978) の Theorem 1 の証明を適当に修正することにより，本定理の証明を行うことにする．まず，(3.1) が $\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG}) \le \mathrm{V}(\overline{y}_1)$ が成り立つための十分条件であることを示す．

$$b_i = n_i \sigma_i^{-2}, \quad z_i = \sigma_i^2 \widehat{\sigma}_i^{-2} \quad (i = 1, 2)$$

とおき，分散の差 $\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG}) - \mathrm{V}(\overline{y}_1)$ を書き直すと次のようになる：

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG}) - \mathrm{V}(\overline{y}_1) &= \mathrm{E}\left\{ \frac{\sum_{i=1}^2 b_i z_i^2}{\left(\sum_{i=1}^2 b_i z_i\right)^2} \right\} - \frac{1}{b_1} \\
&= \frac{b_2}{b_1 \sum_{i=1}^2 b_i} \left[\mathrm{E}\left\{ \frac{b_1^2 (z_1 - z_2)^2}{\left(\sum_{i=1}^2 b_i z_i\right)^2} \right\} - 1 \right] \\
&\le \frac{b_2}{b_1 \sum_{i=1}^2 b_i} \left[\mathrm{E}\left\{ (1 - z_2/z_1)^2 \right\} - 1 \right]. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

ここで $v = z_2/z_1$ とおき，(3.4) を用いて次を得る：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{ (1 - z_2/z_1)^2 \right\} - 1 &= \mathrm{E}\left\{ (1 - v)^2 \right\} - 1 = \mathrm{E}(v^2) - 2\,\mathrm{E}(v) \\
&= \frac{n_1 + 1}{n_1 - 1}\tau_{1a} \times \frac{(n_2 - 1)^2}{(n_2 - 3)(n_2 - 5)}\tau_{2b} - 2\,\frac{n_2 - 1}{n_2 - 3}\tau_{2c} \\
&= \tau_{1a}\tau_{2c}\frac{(n_2 - 1)(n_1 + 1)}{(n_2 - 3)(n_1 - 1)} \left\{ \frac{\tau_{2b}\,(n_2 - 1)}{\tau_{2c}\,(n_2 - 5)} - \frac{2\,(n_1 - 1)}{\tau_{1a}\,(n_1 + 1)} \right\}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

(3.7)，(3.8) を併せて考えることにより，(3.1) の下で $\mathrm{V}(\widehat{\mu}_{FG}) \le \mathrm{V}(\overline{y}_1)$ の成立が保証されることが分かる．

(3.1) が $V(\overline{y}_2) \leq V(\widehat{\mu}_{FG})$ が成り立つための十分条件であることも，上記と同様にして示すことができる．よって十分性の証明が完了した．　□

4. 応用例

この節では，定理 3.1 を Kotz タイプの楕円分布に適用した例について述べる．

$v_i = ||\, \varepsilon_i/\sigma_i \,||^2 \ (\, i = 1, 2\,)$ とおき，v_i が次の確率密度関数を持つものとする：

$$g_i(v_i) \ = \ C_{n_i}\, v^{N_i - 1} \exp(-v_i/2) \ . \tag{4.1}$$

但し，$2N_i + n_i > 6$ ，$C_{n_i} = \dfrac{2^{1-N_i-n_i/2}\Gamma(n_i/2)}{\pi^{n_i/2}\,\Gamma((2N_i + n_i - 2)/2)}$ ．

v_i の α 次の積率は

$$\mathrm{E}\,(\, v_i^{\alpha}\,) \ = \ 2^{\alpha} \times \frac{\Gamma(N_i + \alpha - 1 + n_i/2)}{\Gamma(N_i - 1 + n_i/2)} \qquad (\, \alpha > 1 - N_i - n_i/2\,) \tag{4.2}$$

で与えられる．(4.2) 式で $\alpha = 2, \ -2, \ -1$ とおくことにより，次を得る：

$$\begin{aligned}
\tau_{ia} \ &= \ \frac{\Gamma(N_i + 2 - 1 + n_i/2)}{\Gamma(N_i - 1 + n_i/2)} \cdot \frac{2^2}{(n_i + 2)n_i} \ = \ \frac{(n_i + 2N_i)(n_i + 2N_i - 2)}{(n_i + 2)n_i} \ , \\
\tau_{ib} \ &= \ \frac{\Gamma(N_i - 2 - 1 + n_i/2)}{\Gamma(N_i - 1 + n_i/2)} \cdot \frac{(n_i - 2)(n_i - 4)}{2^2} \ = \ \frac{(n_i - 2)(n_i - 4)}{(n_i + 2N_i - 4)(n_i + 2N_i - 6)} \ , \\
\tau_{ic} \ &= \ \frac{\Gamma(N_i - 1 - 1 + n_i/2)}{\Gamma(N_i - 1 + n_i/2)} \cdot \frac{(n_i - 2)}{2} \ = \ \frac{(n_i - 2)}{(n_i + 2N_i - 4)} \ .
\end{aligned}$$

これらを (3.1) に代入して整理すると，

$$\frac{(n_j + 2)\, n_j}{(n_j + 2N_j)(n_j + 2N_j - 2)} \times \frac{2(n_j - 1)}{(n_j + 1)} \ \geq \ \frac{(n_i - 4)}{(n_i + 2N_i - 6)} \times \frac{(n_i - 1)}{(n_i - 5)} \qquad (\, i \neq j\,) \tag{4.3}$$

となる．これが，y_1, y_2 が Kotz タイプの確率密度関数 (4.1) を持つ場合に不等式 (1.5) が成り立つための必要十分条件になる．

なお，Kotz タイプの確率密度 (4.1) において $N_1 = N_2 = 1$ とすれば，y_1, y_2 に正規性を仮定することになる．この場合，(4.3) は正規性の下で (1.5) が成り立つための必要十分条件 (1.6) と同値になる．

5. 結び

本研究は，正規性の下で従来論じられてきた共通平均母数の結合推定量の性質を，（正規性よりも広い確率分布族である）楕円型分布族の下で考察したものである．これにより，従来 y_1, y_2 の両方に課されていた正規性の条件を緩めることができるようになった．すなわち，y_1 が多変量正規分布，y_2 が非正規楕円分布に従う場合や，両者が相異なる非正規楕円分布に従う場合を扱うことができるようになった．

μ の推定を行う場合，y_1，y_2 のいずれか一方の情報を用いるべきなのか，それとも両者の情報を結合して利用すべきなのかを判断する必要がある．そのための基準が今回 (3.1) 式によって明示的に表現された．

しかしながら，今回の結果は楕円分布族の枠内で得られたものであるし，楕円分布自体にも高次のモーメント条件を仮定している．また，二つ以上の確率ベクトル $y_1, y_2, y_3, \ldots$ に基づいて共通平均母数 μ を推定する問題も考えられる．これらに関する議論は今後の課題としたい．

※ 本稿は平成14年度～平成15年度文部科学省科学研究費（若手研究Ｂ）（課題番号：14780166），及び平成14年度早稲田大学個人特定課題研究助成費（課題番号：2002A-802）による成果の一部である．

参考文献

Fang, K.-T., Kotz, S. and Ng, K.W. (1989). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, New York.

Graybill, F. A. and Deal, R. B. (1959). Combining unbiased estimators. *Biometrics* 15, 543–550.

Inoue, K. (1999). Asymptotic improvement of the Graybill-Deal estimator. *Comm. Statist. Theory Methods* 28, No.2, 389–407.

Inoue, K. (2003). Iterative weighted least-squares estimates in a heteroscedastic linear regression model. *J. Statist. Plann. Inference* 110, 1-2, pp.133–146.

Shinozaki, N. (1978). A note on estimating the common mean of k normal distributions and the Stein problem. *Comm. Statist. Theory Methods* A7(15), 1421–1432.