

# Diamond型世代重複モデルにおける 内生的経済変動の特徴付け\*

横 尾 昌 紀

## 概 要

本稿では2次元の離散時間力学系として記述される生産および政府の介入を含む世代重複モデルの動学的特性を検討する。その際、構造パラメータの変化による長期定常均衡の近傍における力学的な変化に関する現象が局所分岐の理論によって記述され、また、より大域的な観点から、十分小さな生産要素間の代替の弾力性と十分小さな貯蓄係数のもとで、部分力学系としての経済系とある記号力学系との位相同値性が示され、その結果、その経済系が極めて複雑かつ多様な動学的な性質をもつことが議論される。

## 1 序

内生的経済変動の理論、即ち、経済外からの攪乱よりもむしろ経済主体の相互作用から生じる経済系の非線形性に誘導される変動の形態を重視した理論は、分析手法の中核をなす力学系理論のそれ自身の近年における著しい発展と他分野への広範な浸透により、持続的かつ不規則な経済変動、あるいは、構造変化や多様な変動形態の形成過程を解明する理論として再び脚光を浴びつつある<sup>(1)</sup>。このよう

な状況のもとで、離散時間経済変動モデルは数多く研究がなされているが、大半が1次元モデルであり、より豊かな変動を示す高次元の離散時間モデルの分析は局所的な場合あるいは数値的な分析を除いて、あまり積極的になされているとはいいがたい。そこで、本稿では、発展性のある<sup>(2)</sup>2次元の離散時間力学系として記述される、生産および政府の行動を導入したあるオーソドックスな世代重複モデルを題材にして、モデル自身はシンプルだが、その振る舞いが極めて複雑なマクロ経済の動

\*本稿は筆者の修士論文(大和瀬達二教授指導)(1996)の一部に修正ならびに加筆したものである。堂谷昌孝氏(富山大学)ならびに若林丈靖氏(早稲田大学)からの極めて有益な指摘や援助に対して感謝の意を表す。

(1) Cf. e.g. Anderson/Arrow/Pines (1988), Boldrin/Woodford (1990), Owase (1991).

(2) 「多様なマイナーチェンジを許しうる」

学的特性を考察する。その際、選好や技術に関する構造パラメータの変化によって黄金律不動点の近傍において周期2の周期軌道や吸引的な不変閉曲線が発生ないし消滅するといった力学的な変化に関する現象を局所分岐の理論によって記述する。また、より大域的な観点から、十分小さな代替の弾力性と十分小さな貯蓄係数のもとで、鞍部型の黄金律不動点に対する横断的ホモクリニック点から構成される馬蹄の存在、言い換えれば、部分力学系としての経済系とある記号力学系との位相共役性（同値性）を示し、その結果、ある不変集合に制限した経済系が可算無限の任意の周期の周期軌道、非可算無限の非周期軌道や、その不変集合内での周期点の稠密性、位相混合性、位相推移性、拡大性、初期値鋭敏性、擬軌道追跡性等の極めて複雑な動学的な性質をもつこと議論する。

## 2 モデルの設定

基本的なモデルの構成は Farmer (1986) と Jullien (1988) に従った。いずれも Diamond (1965) のモデルに大きく依拠したものである。以下では、コンピュータによるシミュレーションを重視することを考慮に入れて、かなりモデルを特定化するが、このことは、現段階において議論の本質を損なうものではないと思われる。

さて、競争的枠組みにおいて2期間の世代重複モデルを考える。代表的消費者は前期は非弾力的に1単位の労働をある実質賃金  $w_t$  で売り、財を  $c_{1t}$  だけ消費し、実質数量  $w_t - c_{1t}$  を貯蓄する。そして、後期には、その貯蓄に対する利子と元本  $r_{t+1}(w_t - c_{1t})$  を消費する。

ただし、 $r_{t+1}$  は  $t$  時点から  $t+1$  時点の貯蓄に対する粗実質利子率であり、 $t$  期の意思決定に際し、 $r_{t+1}$  は完全に予見されている。単純化するために人口を以下では一定とする。代表的消費者は第2期の消費に対する加重が  $s \in (0, 1)$  である Cobb-Douglas 型効用関数  $u(c_{1t}, c_{2t+1}) = (1-s) \log c_{1t} + s \log c_{2t+1}$  をもち、完全予見の仮定の下で、次の異時的最大化問題に直面する：

$$\begin{aligned} \max_{c_{1t}, c_{2t+1}} \quad & u(c_{1t}, c_{2t+1}) \\ \text{s.t.} \quad & c_{2t+1} = r_{t+1}(w_t - c_{1t}) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $c_{it}$ ,  $i=1, 2$  はそれぞれ時点  $t$  における前期および後期の消費者による消費数量である。

一方、生産者は労働  $L$  と資本  $K$  を生産要素とする規模に関して収穫一定の生産関数  $G(K, L)$  をもつ。資本労働比率を  $k = K/L$  とおけば、 $G(K, L) \equiv Lf(k)$  とかける。ただし、 $f(k) \equiv G(K/L, 1)$  である。適宜、生産関数を次のような代替弾力性一定 (CES) 関数、 $f(k) = (1/\alpha)(1 - \alpha + \alpha k^{-\beta})^{-1/\beta}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$  に特定化する。このとき、代替の弾力性は  $1/(1+\beta)$  である。減価償却率を  $\delta \in [0, 1]$  とすれば、競争的生産者は、次の最大化問題に直面する。

$$\max_{K, L} \quad Lf\left(\frac{K}{L}\right) - (r + \delta - 1)K - wL. \quad (2)$$

政府の財政赤字を埋め合わせるために初期時点において国債が発行されていたとする。国債の満期は1期で、財政当局は元本と利子の支払いのために収入をあげなければならないが、そのために税を徴収することはせず、

専ら元本と利子を埋め合わせるだけの新しい国債を売却すると仮定する。よって、1人当たりの国債を  $b_t$  とすれば、均衡予算政策のもとで、政府の予算制約は、

$$b_{t+1} = r_t b_t$$

となる。単純化のために以下では減価償却率  $\delta=1$  とすると、次の経済系を得る。

$$k_{t+1} + b_{t+1} = A(w_t, r_{t+1}) \quad (3)$$

$$r_t = f'(k_t) \quad (4)$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \quad (5)$$

$$b_{t+1} = r_t b_t \quad (6)$$

ここで、(3)の右辺  $A(w_t, r_{t+1})$  は効用最大化問題(1)から導かれた資産需要関数(貯蓄関数)であり、一般には  $w_t$  と  $r_{t+1}$  に依存する。従って、(3)は資産市場の一掃を意味する。(4)と(5)は生産者の利潤最大化問題(2)から導かれる。(6)は国債の元本と利子の支払いが新しい国債の売却で埋め合わされていることを示す。(3)から(6)を  $k$  について整理すれば、

$$B(k_t, k_{t+1}) = f'(k_t) B(k_{t-1}, k_t) \quad (7)$$

となる。ただし、 $B(k_t, k_{t+1}) = A(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}) - k_{t+1})$  である。我々の目的は(7)の分析ということだが、より多くの結論を導くために、Cobb-Douglas型効用関数による特定化を行う。そうすると、貯蓄関数は  $A(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})) = s w_t = s(f(k_t) - k_t f'(k_t))$  と簡略化される<sup>(3)</sup>。 $w(k_t) \equiv f(k_t) - k_t f'(k_t)$  とおくと、(7)は次のように変形される。

$$k_{t+1} - k_t f'(k_t) - s(w(k_t) - f'(k_t) w(k_{t-1})) = 0 \quad (8)$$

以上の節では、主に2階の差分方程式(8)に関しての議論を進めていく。

(7)の不動点は、

$$B(k, k) (1 - f'(k)) = 0, \quad k > 0$$

を満たす。 $1 - f'(k) = 0$  を満たす  $k > 0$  は、黄金律不動点と呼ばれ、ひとつの長期均衡である。我々のCES生産関数のもとでは必ず存在し、 $f'(k) = 1 \iff k = 1$  であり、パラメータに依存せずに一定である。これは後の分析を楽にする。一方、 $B(k, k) = s w(k) - k = 0$  を満たす不動点<sup>(4)</sup>  $k > 0$  に関する議論は本稿では無視することにする。

### 3 局所分岐

写像に関して1次元系の1パラメータ族の局所分岐(周期点の分岐)として、安定性交代分岐(transcritical bifurcation)、鞍点結節点分岐(saddle-node bifurcation)、熊手分岐(pitchfork bifurcation)、倍周期分岐(period-doubling or flip bifurcation)が代表的である。2次元系1パラメータ族の局所分岐としてNeimark-Sacker分岐<sup>(5)</sup>がよく知られている。局所的な、つまり、周期点(不動点)の近傍に限った話をすれば、より高次元系において起こる1パラメータ分岐の多くはこれらの1次元および2次元分岐の議論に還元でき

(3)Cobb-Douglas型効用関数に特定化した場合、貯蓄関数が恒等的に利率に依存しなくなることに注意せよ。

(4)inside-money equilibriumと呼ばれ、このモデルに関していえば、この不動点をめぐっていくつかの興味深い現象が生じることが確認されている。

(5)「写像のHopf分岐」と呼ばれることも多い。

るので、高次元の経済変動現象を考えるとときに、このような分岐を起こしうる2次元モデルはこの点からも重要なプロトタイプであるといえよう<sup>(6)</sup>。

モデルを分析するために、 $k_t = y_t$ ,  $k_{t-1} = x_t$  とおけば、(8)と同値な次のシステムが得られる：

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t \\ y_{t+1} &= y_t f'(y_t) + s(w(y_t) - f'(y_t)w(x_t)). \end{aligned}$$

あるいは、

$$F : \mathbf{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad (9)$$

ただし、 $F(x, y) = (y, yf'(y) + s(w(y) - f'(y)w(x)))$  である。

$L(x, y) \equiv yf'(y) + s(w(y) - f'(y)w(x))$  と定義すれば、不動点  $\mathbf{p} = (1, 1)$  で評価した写像(9)のヤコビ行列  $D\mathbf{p}F$  は、

$$D\mathbf{p}F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s(\alpha-1)(1+\beta) & \alpha-\beta+\alpha\beta+s(1-\alpha)(1+\beta)/\alpha \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる。(9)で示される写像  $F$  のヤコビ行列  $D\mathbf{x}F$  の行列式 (det) とトレース (tr) を調べておく。

$$\begin{aligned} \det D\mathbf{x}F &= -L_x(x, y) = -sf'(y)f''(x) \\ &> 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2, s > 0 \end{aligned}$$

$$\text{tr } D\mathbf{x}F = L_y(x, y)$$

$$\det D\mathbf{p}F = s(1-\alpha)(1+\beta)$$

$$\text{tr } D\mathbf{p}F = \alpha - \beta + \alpha\beta + s(1-\alpha)(1+\beta)/\alpha.$$

$w'(x) = -xf''(x) > 0$  ( $x > 0$ ) より、 $F : \mathbf{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  が 1 対 1 (injective) のなめらかな写像であることがわかる。また、 $s > 0$  ならば、 $\det D\mathbf{x}F \neq 0$  ( $x \in \mathbf{R}_{++}^2$ ) であることに注意しておく。

### 3.1 不変閉曲線の発生とその安定性

$F$  の不動点近傍における  $F$ -不変閉曲線の存在とその安定性について議論する。そのために Neimark-Sacker 分岐定理<sup>(7)</sup> を直接適用する。分岐パラメータとして  $s$  を選ぶ。 $F$  が  $s$  に依存していることを  $F_s$  で表す。不動点  $\mathbf{p} = (1, 1)$  は  $s$  に依存しないことに注意する。

**補題 1**：任意の  $\alpha \in (0, 1)$  に対し、次を満たすような、 $\beta > 0$  と  $s_0 \in (0, 1)$  が存在する：

(NS1)  $D\mathbf{p}F_s$  は複素共役の固有値  $\lambda(s)$ ,  $\bar{\lambda}(s)$  s.t.  $|\lambda(s_0)| = 1$ ,  $\lambda^n(s_0) \neq 1$ , ( $n = 1, 2, 3, 4$ )<sup>(8)</sup> をもつ。

(NS2)  $d = \left. \frac{d|\lambda(s)|}{ds} \right|_{s=s_0} > 0$ .

**証明**： $D\mathbf{p}F$  が  $a \pm ib$ ,  $i = \sqrt{-1}$  の複素共役固有値をもてば、 $|\lambda(s)| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{\det D\mathbf{p}F}$  だから、(12)より、

(6)類似の枠組みの高次元モデルにおける局所分岐に関する議論としては、例えば、Benhabib/Laroque(1988)およびReichlin(1986)が有益であろう。

(7)定理の内容については、e.g. Guckenheimer/Holmes(1983)を見よ。

(8)円周等分方程式  $x^n = 1$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  の解は、 $\pm 1, \pm i, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  で尽くされることに注意する。

$$\frac{d|\lambda(s)|}{ds} = \frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{2\sqrt{s(1-\alpha)(1+\beta)}} > 0.$$

従って, (NS1)  $\Rightarrow$  (NS2)。よって, (NS1) を示せば十分。空集合でない(NS1)を満たすパラメータの集合を見出す。 $\det D_p F = 1$  であることに気がつけると, 特性方程式  $P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr} D_p F + \det D_p F = 0$  より, 根が複素共役であるためには,  $(\text{tr} D_p F)^2 - 4\det D_p F < 0$  だから,  $|\text{tr} D_p F| < 2$ 。更に,  $\lambda(s_0) \neq \pm i$  かつ,  $\lambda(s_0) \neq -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$  を要請すれば,  $\text{tr} D_p F \neq -1$ 。結局,  $\alpha$  を  $(0, 1)$  の开区間で任意に固定したときに, 次の条件を満たすようなある  $\beta$  が存在することをみる:

- (a)  $s(1-\alpha)(1+\beta) = 1$ ,
- (b)  $0 < |\alpha - \beta + \alpha\beta + s(1-\alpha)(1+\beta)/\alpha| < 2$ ,
- (c)  $\alpha - \beta + \alpha\beta + s(1-\alpha)(1+\beta)/\alpha \neq -1$ ,
- (d)  $s \in (0, 1)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$

まず,  $\alpha \in (0, 1)$  を任意に固定すると, (a) と (b) から,  $\beta > \alpha/(1-\alpha) > 0$ 。(a) を (b) に代入すれ

ば, (b) の 2 番目の不等式から,  $(\alpha+1)^2/\alpha(1-\alpha) > \beta > (1-\alpha)/\alpha$ 。 $(\alpha+1)^2/\alpha(1-\alpha) > (1-\alpha)/\alpha > 0$  と  $(\alpha-1)^2/\alpha(1-\alpha) > \alpha/(1-\alpha) > 0$  に注意し, (b) の最初の不等式と (c) から,  $\beta \neq (\alpha^2+1)/\alpha(1-\alpha)$ ,  $\beta \neq (\alpha^2+\alpha+1)/\alpha(1-\alpha)$  より,

$$B(\alpha) = \{\beta \in \mathbf{R}_{++} | \infty > (\alpha+1)^2/\alpha(1-\alpha) > \beta > \max\{(1-\alpha)/\alpha, \alpha/(1-\alpha)\} > 0, \beta \neq (\alpha^2+1)/\alpha(1-\alpha), \beta \neq (\alpha^2+\alpha+1)/\alpha(1-\alpha), \alpha \in (0, 1)\} \quad (11)$$

とすれば,  $B(\alpha) \neq \emptyset$  だから,  $\forall \beta \in B(\alpha)$  に対し,  $s_0 = 1/(1-\alpha)(1+\beta) \in (0, 1)$  ととれて, (NS1) が示される。□

さて, 補題 1 で得られた  $s_0$  の近傍の  $s$  に対して  $F_s$  が実際に不動点  $p$  の周りに不変閉曲線をもつのかどうか, もつとすれば  $s_0$  も大きな  $s$  に対してか, 更にその閉曲線が漸近安定(吸引的), つまり, 閉曲線に十分近い初期条件が  $F_s$  の正の反復のもとでそこに近づくのかどうかは,  $F_{s_0}$  を  $p$  の周りで多項式近似したときの非線形項に依存する。 $F$  が特定化されている

(9)  $\beta \in B(1/2)$  とすると, (10) より,

$$D_p F_{s_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (5-\beta)/2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

が得られる。(12) の複素共役固有値は単純な計算から,  $\lambda, \bar{\lambda} = (5-\beta)/4 \pm i\sqrt{(1-\beta)(\beta-9)}/4$ , 対応する複素固有ベクトルは  $\varphi, \bar{\varphi} = (1, (5-\beta)/4 \pm i\sqrt{(1-\beta)(\beta-9)}/4)$  を得る。(9) に対し,  $(x, y) = (x'+1, y'+1)$  として不動点を原点に移し, 原点の周りで Taylor 展開し, 3 次の項までとると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \longrightarrow \left( \sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!} (x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y})^n L(x, y) \Big|_{(x,y)=(1,1)} \right) \quad (13)$$

ただし,  $(x, y) = (1, 1)$  で評価した  $L(x, y)$  の各偏微係数は, 計算から,

$$\begin{aligned} L_x &= -1, & L_y &= (5-\beta)/2, & L_{xx} &= 1/2, & L_{xy} &= (1+\beta)/2, \\ L_{yy} &= -(\beta+9)/4, & L_{xxx} &= (2\beta+3)(\beta-1)/4, & L_{xxy} &= -(\beta+1)/4, \\ L_{xyy} &= -3(\beta+1)/4, & L_{yyy} &= (2\beta^3-5\beta^2+39)/8 \end{aligned}$$

とわかる。固有ベクトル を考慮し, (13) に対して座標変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{(1-\beta)(\beta-9)}/4 & (5-\beta)/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

を施す。

ので原理的にはそのための計算は可能であるが煩雑であるので、さらにパラメータを特定化して、それについて議論をする。

$\alpha$ を次のように特定化する：

$$\alpha = 1/2$$

このとき、次のことが主張できる。

**命題 1**： $\alpha = 1/2$ とする。このとき、任意の  $\beta \in B(1/2) = \{\beta \mid 9 > \beta > 1, \beta \neq 5, \beta \neq 7\}$  と  $s_0 = 2/(1+\beta)$  に対し、ある実数  $\varepsilon > 0$  が存在して、任意の  $s \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$  に対して、不動点  $\mathbf{p} = (1, 1)$  を取り囲む漸近安定な  $F_s$ -不変閉曲線  $\gamma \subset \mathbf{R}_+^2$  s.t.  $F(\gamma) = \gamma$  が存在する。

**証明**： $\beta \in B(1/2)$  に対し、不動点近傍の写像の振る舞いは、計算により<sup>(9)</sup>、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (5-\beta) & \sqrt{(1-\beta)(\beta-9)} \\ -\sqrt{(1-\beta)(\beta-9)} & (5-\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

と表せる。ただし、 $g(u, v)$  は  $u$  と  $v$  の 2 次と 3 次の項からなる。

いま、

$$\begin{aligned} \nu = & -\operatorname{Re} \left[ \frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}^2}{1-\lambda} \xi_{11} \xi_{20} \right] \\ & - \frac{1}{2} (|\xi_{11}|^2 - |\xi_{02}|^2 + \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \xi_{21})) \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、

$$\xi_{20} = \frac{1}{8} (g_{uu} - g_{vv} - i2g_{uv}),$$

$$\xi_{11} = \frac{1}{4} (g_{uu} + g_{vv}),$$

$$\xi_{02} = \frac{1}{8} (g_{uu} - g_{vv} + i2g_{uv}),$$

$$\xi_{21} = \frac{1}{16} [g_{uuu} + g_{uuv} - i(g_{uuv} + g_{vvv})]$$

とすれば<sup>(10)</sup>、実際の計算から、

$$(NS3) \quad \nu = -\frac{\beta^2}{32} < 0 \quad \forall \beta \in B(1/2)$$

を得る。ただし、 $g_{uv}$  等は  $\partial^2 g(u, v) / \partial u \partial v|_{(0,0)}$  等を表す。まず、補題 1 の (NS1) と (NS2) の  $d \neq 0$ 、および、(NS3) の  $\nu \neq 0$  から、その不変閉曲線は漸近安定。(NS2) の  $d > 0$  から、不動点は  $\exists \varepsilon > 0$ 、 $s_0 < \forall s_0 + \varepsilon$  に対し不安定である。 $\nu < 0$  かつ  $d > 0$  だから、Neimark-Sacker 分岐定理より、存在する漸近安定不変閉曲線は  $s > s_0$  に位置することがわかり、命題 1 が示された。□

ここで、漸近安定な、あるいは吸引的な不変閉曲線がパラメータの変化によって発生することを我々は主張したものの、その不変閉曲線上、つまり、 $F|_\gamma: \gamma \rightarrow \gamma$  のダイナミクスについては言及していないことに注意する。これは、ある条件のもとで定義される回転数 (rotation number) により完全に決定されることが知られている。我々のモデルに対して、周期的変動と“準周期的”変動のパターンがパラメータの変化につれて複雑に現われてくることが推測されるが、本稿ではこの問題についてこれ以上追求しないことにする。この問題に関するより経済学的な議論に関し

<sup>(10)</sup>Cf. Guckenheimer/Holmes (1983)

では, Hommes (1991) および, 横尾 (1996) を参照せよ。

Neimark-Sacker分岐定理の応用は多くの経済モデルに対して行われてきたが<sup>(11)</sup>, いくつかの場合, 条件(NS3)に相当する箇所の検討が省略されている。これには, 次のような2つの理由が考えられると思われる。1つは, (NS1)や(NS2)が満たされるか否かは, 線形化された系について調べれば比較的容易に判断がつく一方, (NS3)にはときには非線形項に対する膨大な微分等の計算が必要となる, という計算およびその表現上の理由であり, もう1つは, (NS1)や(NS2)が, 線形化系を扱うため, たいてい経済学的に意味を持つ仮定から導けるのに対し, (NS3)は経済学的に意味付けの困難な高階の偏微係数 (ここでは生産関数の4階微分など) の値に依存するため, 緩い仮定のもとでは多くの情報を引き出すことができない, という経済学的仮定とその解釈の問題に関する理由である。

### 3.2 周期2の周期軌道の発生とその安定性

次に, あるパラメータの集合に対し, 中心多様体 (center manifold) <sup>(12)</sup> に制限された  $F$  が不動点において倍周期分岐を起こすことを検証していく。その際に生じた不動点や周期2の周期点の安定性も検討する。

**補題2** : (10)に対し,  $\lambda_1(s), \lambda_2(s)$  を  $DpF_s$  の固有値とし,  $\alpha \in (0, 1)$  を任意に固定する。その

とき,

$$(PD1a) \quad (1+\alpha)^2/\alpha(1-\alpha) > \forall \beta > (1+\alpha)/(1-\alpha) > 0, \exists s_0 \in (0, \alpha/(1+\alpha)) \subset (0, 1) \\ \text{s.t. } \lambda_1(s_0) = -1 \text{ かつ, } \lambda_2(s_0) \in (-1, 0) \text{ および,}$$

$$(PD1b) \quad \forall \beta > (1+\alpha)^2/\alpha(1-\alpha), \exists s_0 \in (0, \alpha/(1+\alpha)) \text{ s.t. } \lambda_1(s_0) = -1 \text{ かつ, } \lambda_2(s_0) < -1.$$

**証明** : (10)から, 特性多項式を  $P(\lambda) = \det(DpF_s - \lambda I)$  とおき,  $P(-1) = 0$  を  $s$  について解くと,

$$s_0 = -\frac{\alpha(1+\alpha-\beta(1-\alpha))}{(1-\alpha)(1+\alpha)(1+\beta)^2} \quad (16)$$

を得る。  $ds_0/d\beta = 2\alpha/(1-\alpha)(1+\alpha)(1+\beta)^2 > 0$  および,  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} s_0 = \alpha/(1+\alpha) < 1$  に留意して,  $s_0$  を(10)の  $s$  に代入し,  $P(\lambda) = \det(DpF_{s_0} - \lambda I) = 0$  を  $\lambda$  について解けば,

$$\lambda_1(s_0) = -1, \lambda_2(s_0) = \frac{\alpha(1+\alpha-\beta+\alpha\beta)}{1+\alpha} \quad (17)$$

を得,  $0 < \lambda_2(s_0) < 1$ ,  $\lambda_2(s_0) < -1$  を考慮すれば, 補題2が示される。□

固有値  $-1$  の存在は倍周期分岐に必要であるが, 十分ではない。充分性, さらにには不動点ならびに周期2の周期点の安定性とその方向を検討するためにこの非双曲型不動点の中心

(11)Lorenz (1993) の参考文献を見よ。

(12)中心多様体の定義やそれに関する諸定理については, Guckenheimer/Holmes (1983) 等を見よ。

方向に新たにパラメータ  $s=s_0$  の中心方向を加えて、中心多様体を拡張し、その上に制限した「縮約された」写像の不動点付近の様子を調べることで、元の写像の分岐の状況を調べていく。

中心多様体の計算の煩雑さを回避するために、 $\alpha=1/2$  とパラメータを特定化して以下の議論を続ける。

**命題 2** :  $\alpha=1/2$  であるとする。このとき、補題 2 における (PD1a), あるいは, (PD1b) を満たす  $\beta$  に依存して, (9) に従う写像  $F_s$  は  $(x, y, s) = (1, 1, (\beta-3)/3(1+\beta))$  において, 次の 2 つの型の倍周期分岐を引き起こす :

- (i) (PD1a の場合)  $9 > \forall \beta > 3, \exists \varepsilon > 0 ; s_0$   
 $-\varepsilon < \forall s < s_0 = (\beta-3)/(1+\beta)$  に対し,  
 不動点  $(x, y) = (1, 1) = p$  の近傍に吸引的な周期 2 の周期軌道が存在し, かつ, 不動点  $p$  は  $s_0 - \varepsilon < \forall s < s_0$  に対し鞍部型,  $s_0 < \forall s < s_0 + \varepsilon$  に対し吸引的<sup>(13)</sup>である。
- (ii) (PD1b の場合)  $\forall \beta > 9, \exists \varepsilon > 0 ; s_0$

$-\varepsilon < \forall s < s_0$  に対し, 不動点  $(x, y) = (1, 1)$  の近傍に反発的な周期 2 の周期軌道が存在し, かつ, 不動点  $p$  は  $s_0 - \varepsilon < \forall s < s_0$  に対し鞍部型,  $s_0 < \forall s < s_0 + \varepsilon$  に対し反発的である。

**証明** : 補題 2 を考慮すると,

$$s_0 = \frac{\beta-3}{3(1+\beta)}, \quad \beta > 3 \text{ かつ, } \beta \neq 9. \quad (18)$$

(17) から, 固有値  $\lambda_1(s_0) = -1, \lambda_2(s_0) = (3-\beta)/6$  を得る。簡単な計算から<sup>(14)</sup>,  $(x, y, s) = (x'+1, y'+1, \rho + (\beta-3)/3(\beta+1))$  としたときの  $(u, v, \rho) = (0, 0, 0)$  の近傍の振る舞いは,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (3-\beta)/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(u, v, \rho) \\ g_2(u, v, \rho) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\rho \rightarrow \rho$$

ただし,  $g_i(u, v, \rho) (i=1, 2)$  は,  $u, v, \rho$  に関して 2 次と 3 次の項からなる。(21) の原点の局所中心多様体は, 中心多様体の存在定理から十分小さな  $\delta_1 > 0$  と  $\delta_2 > 0$  に対し, 変数  $u$  と  $\rho$  の局所グラフとして,

(13) この倍周期分岐を「減」周期分岐 (period-halving bifurcation) とよぶ場合もある。Nusse/Yorke (1988) を見よ。  
 (14) (10) から,

$$D_p F_{s_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3-\beta}{6} & \frac{-3-\beta}{6} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

$s$  を従属変数のように取り扱い, (9) に対し,  $\Omega(x, y, s) \equiv L(x, y)$  とおき, また,  $(x, y, s) = (x'+1, y'+1, \rho + (\beta-3)/3(\beta+1))$  として不動点を原点に移し, 原点の周りで展開し, 必要な 3 次の項までとると,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!} (x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + \rho \frac{\partial}{\partial s})^n \Omega(x, y, s) |_{(x, y, s) = (1, 1, \frac{\beta-3}{3(\beta+1)})} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

を得る。 $\lambda_1(s_0), \lambda_2(s_0)$  に対応する固有ベクトル  $\varphi_1 = (-1, 1), \varphi_2 = (-6/(\beta-3), 1)$  に注意し,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6/(\beta-3) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と座標変換する。



$$W_{\tilde{u}\tilde{c}}(0) = \{(u, v, \rho) \in \mathbf{R}^3 \mid v = h(u, \rho), |u| < \delta_1, |\rho| < \delta_2, h(0, 0) = Dh(0, 0) = 0\} \quad (22)$$

と表される。(21)より,  $h(u, \rho)$ が(21)のもとで不変となるために満たすべき非線形関数方程式は,

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= -u_t + g_1(u_t, h(u_t, \rho_t), \rho_t), \\ v_{t+1} &= h(u_{t+1}, \rho_{t+1}) \\ &= \frac{3-\beta}{6}h(u_t, \rho_t) + g_2(u_t, h(u_t, \rho_t), \rho_t), \\ \rho_{t+1} &= \rho_t \end{aligned}$$

つまり,

$$\begin{aligned} h(-u + g_1(u, h(u, \rho), \rho), \rho) \\ + \frac{\beta-3}{6}h(u, \rho) - g_2(u, h(u, \rho), \rho) = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

である。(23)の解  $h(u, \rho)$ を巾級数展開で必要なだけの望ましい精度で始めることができる。我々は倍周期分岐を調べるためには3次の係数までわかれば十分であることを知っているのので, 実際に計算する<sup>(15)</sup>と中心多様体に制限された写像  $\mathfrak{F}(u, \rho) = -u + g_1(u, h(u, \rho), \rho)$

(15)中心多様体は,

$$h(u, \rho) = a_1u^2 + a_2\rho u + a_3\rho^2 + a_4u^3 + a_5\rho u^2 + a_6\rho^2u + a_7\rho^3 + O(4)$$

と置けて

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(2-\beta)(\beta-3)}{\beta-9}, \\ a_2 &= \frac{9(\beta-3)(1+\beta)}{(\beta-9)^2}, \\ a_4 = a_6 &= \frac{(\beta-3)(2\beta^2+21\beta^2-29\beta+12)}{2(\beta-9)^2}, \\ a_5 &= \frac{9(3-\beta)(\beta+1)(4\beta^3-21\beta^2+234\beta-297)}{2(\beta-9)^3(\beta+3)}, \\ a_3 &= a_7 = 0, \end{aligned}$$

と計算できる。最終的に得られる中心多様体に制限された写像  $\mathfrak{F}(u, \rho) = -u + g_1(u, h(u, \rho), \rho)$ は陽的に,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(u, \rho) &= u(1458 - 486\beta + 54\beta^2 - 2\beta^3 - 1458\rho - 1134\beta\rho + 306\beta^2\rho \\ &\quad - 18\beta^3\rho - 108\beta\rho^2 - 216\beta^2\rho^2 - 108\beta^3\rho^2 - 972u + 378\beta u + 114\beta^2u \\ &\quad - 34\beta^3u + 2\beta^4u + 1863\rho u + 1485\beta\rho u - 459\beta^2\rho u - 45\beta^3\rho u \\ &\quad + 36\beta^4\rho u + 1620u^2 + 549\beta u^2 - 2259\beta^2u^2 + 485\beta^3u^2 - 9\beta^4u^2 \\ &\quad - 2\beta^5u^2)/2(\beta-9)^3 + O(4) \end{aligned}$$

と表される。

(16)不動点以外の周期点がこの種の分岐を引き起こす様子は分岐図において頻繁に観察される。

が得られ,  $(u_0, \rho_0)$ に注意すると,

$$(PD1) \quad \left. \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial u^2} \right|_{(u_0, \rho_0)} = -1,$$

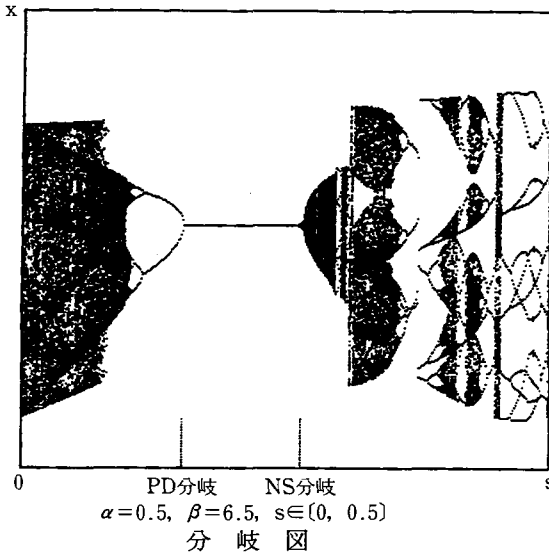
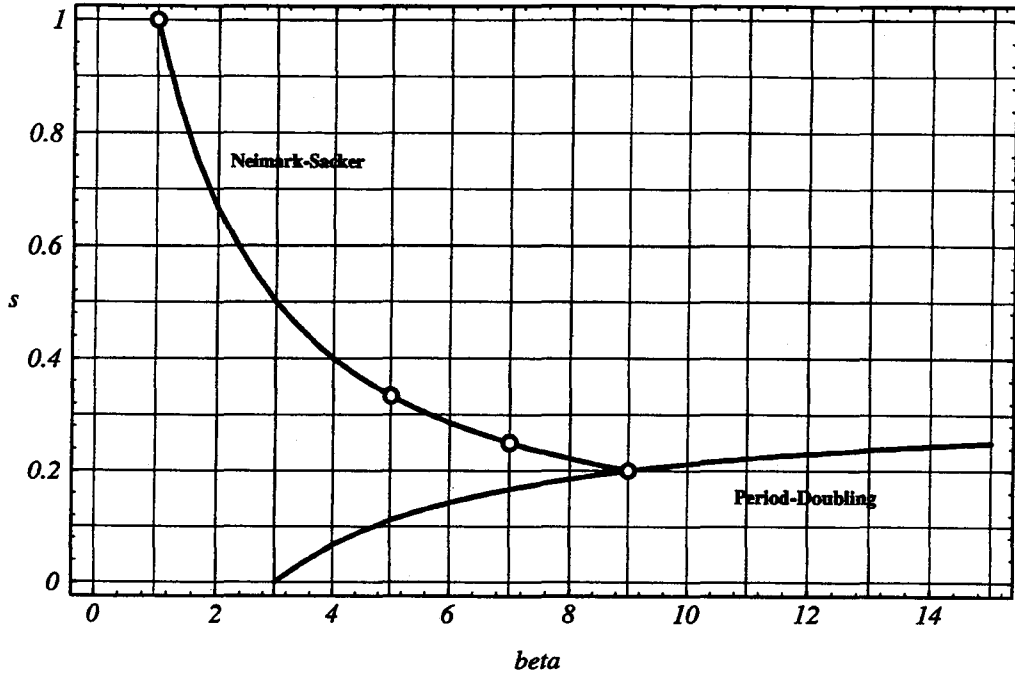
$$(PD2) \quad \eta = \left[ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \rho \partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial u^2} \right]_{(u_0, \rho_0)} = \frac{9(1+\beta)}{9-\beta},$$

$$(PD3) \quad \theta = \left[ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \mathfrak{F}}{\partial u^3} + \left( \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial u^2} \right)^2 \right]_{(u_0, \rho_0)} = \frac{23\beta^2 - 13\beta - 12}{2(9-\beta)}$$

であるので, (i)に関して,  $\beta \in (3, 9) \Rightarrow \eta > 0, \theta > 0$ , また, (ii)に関して,  $\beta > 9 \Rightarrow \eta < 0, \theta < 0$ より, 倍周期分岐定理と補題2の $\lambda_2$ の絶対値の大きさから, 命題3が示された。□

補題2から, Neimark-Sacker分岐に対し, 比較的小さな貯蓄係数  $s < 1/2$ のもとでしか不動点の倍周期分岐が起こり得ない<sup>(16)</sup>のは興味深い。また, この例のように同じモデル内でもパラメータによって分岐した解の安定性が異なることは注目すべきである。

Neimark-Sacker & Period-Doubling Bifurcation Sets in  $(\beta, s)$ -Space; ( $\alpha=0.5$ )



#### 4 大域的特性

前節では、主に不動点の近くのダイナミクスについて検討してきたが、この節では、より大域的な軌道の振る舞いについて議論する。その際に、任意の分配係数  $\alpha \in (0, 1)$  に対し、十分小さな代替の弾力性  $1/(1+\beta)$  とそれに依存して十分小さな貯蓄係数  $s > 0$  に対して、不動点の任意の近傍に、ある  $n > 0$  に対し、 $F^n(\Lambda) = \Lambda$  となる双曲型不変集合<sup>(17)</sup>  $\Lambda$  があって、そこへの制限  $F^n|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$  が、記号力学系で特

(17)  $\Lambda$  を微分同相写像  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  の不変集合  $f(\Lambda) = \Lambda$  とする。  $\Lambda$  が  $f$  の双曲型不変集合 (hyperbolic invariant set) であるとは、次の (i) から (iv) が成り立つときをいう：

- (i)  $x \in \Lambda$  における  $\mathbb{R}^2$  の接空間が、 $E_x^s$  と  $E_x^u$  に直和分解される。つまり、 $T_x \mathbb{R}^2 = E_x^s \oplus E_x^u$ 。
- (ii)  $D_x f : T_x \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^2$  に対して、直和分解が不変である。つまり、 $D_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s$  かつ  $D_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ 。
- (iii)  $E_x^s$  と  $E_x^u$  は  $x \in \Lambda$  とともに連続的に変化する。
- (iv)  $\exists C > 0, 0 < \exists \lambda < 1; \forall n \geq 0,$ 
  - (1)  $v \in E_x^s \Rightarrow |D_x f^n v| \leq C \lambda^n |v|,$
  - (2)  $v \in E_x^u \Rightarrow |D_x f^{-n} v| \leq C \lambda^n |v|.$

徴づけられるような複雑な振る舞を引き起こすといった状況を見ていくことにする。

当面の目標は、(9)に従う写像  $F$  がある構造パラメータのもとで双曲型鞍部不動点の横断的ホモクリニック点、つまり、不動点の安定多様体と不安定多様体の横断的交点をもつことを示すことと、そのときにどのような事態がその経済系に起こっているといえるのかを述べることである。そのためにまず、 $s=0$  の特殊ケースに着目する<sup>(18)</sup>。そのとき、(9)は、特異写像

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ yf'(y) \end{pmatrix} \quad (25)$$

として表されることに注意する。この場合、 $y$  は完全に  $x$  から分離し、ダイナミクスは“潰れ”て、 $y \rightarrow yf'(y)$  に支配される。以下で、

$$g(x) \equiv xf'(x)$$

と定義したとき、この1次元の写像

$$g: \mathbf{R}_{++} \rightarrow \mathbf{R}_{++} \quad (26)$$

が、任意の  $\alpha \in (0, 1)$  に対し、十分大きな  $\beta$  のもとで不動点の非退化ホモクリニック軌道<sup>(19)</sup> をもち、そのパラメータ集合のもとで、十分小さな  $s > 0$  に対して、(9)もまた、パラメータの摂動に対する多様体の横断的交叉の頑健性から、横断的ホモクリニック軌道をもつことを示して、その含意としてのある種の複雑な経済変動の性質に言及することにする。

まず、以下の議論のために、生産関数  $f: \mathbf{R}_{++} \rightarrow \mathbf{R}_{++}$  と  $g: \mathbf{R}_{++} \rightarrow \mathbf{R}_{++}$  に関するいくつかの性質を列挙しておく。

$f$  および  $g$  の性質：

$$(P1) \quad f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0, (\forall x > 0),$$

$$(P2) \quad g(x) \equiv xf'(x) \\ = x^{-\beta}(1 - \alpha + \alpha x^{-\beta})^{-\frac{\beta+1}{\beta}} > 0, \\ (\forall x > 0),$$

$$(P3) \quad g'(x) \geq 0 \text{ as } x \leq \left(\frac{\alpha}{\beta(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\beta}} \equiv x_{max},$$

$$(P4) \quad g''(x) \leq 0 \text{ as } x \leq \left(\frac{\alpha(1+\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\beta}} \equiv \mu,$$

$$(P5) \quad \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} g'(x) = \alpha^{-\frac{\beta+1}{\beta}} \equiv \chi > 1,$$

$$(P6) \quad \frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = -xf''(x) > 0, \\ (\forall x > 0),$$

$$(P7) \quad g(p) = p, p=1; \text{ 不動点(パラメータに依存しない)},$$

$$(P8) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} g(x) = 0, (\forall x > 1),$$

$$(P9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \downarrow 0} g(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0,$$

$$(P10) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} x_{max} = 1,$$

$$(P11) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} g(x_{max}) = \frac{1}{\alpha} > 1.$$

(18)この節における1次元写像への還元手法の基本的アイデアは富山大学の堂谷昌孝氏に示唆された。

(19)Dohtani (1992) においては、非退化ホモクリニック軌道をもつ不動点が Marotto に従い、snap-back repeller と呼ばれている。

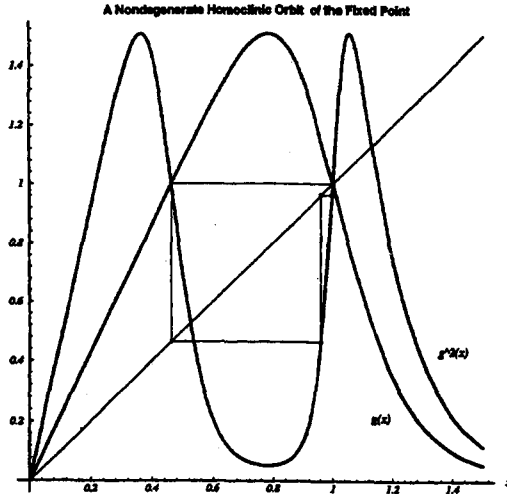
これらの性質を使って、十分大きな $\beta$ 、換言すれば、十分小さな代替の弾力性のもとで、 $g$ が不動点に関する非退化ホモクリニック軌道をもつことを示す。

**補題 3** :  $\forall \alpha \in (0, 1), \exists \bar{\beta} > (\alpha + 1)/(1 - \alpha)$ ;  $\forall \beta \geq \bar{\beta}$  に対して、 $g: \mathbf{R}_{++} \rightarrow \mathbf{R}_{++}$  は不動点  $p$  に関する非退化ホモクリニック軌道をもつ。

**証明** : 以下、 $\alpha$  を  $(0, 1)$  开区間で任意に固定する。 $g$  は (P3) から  $x_{max}$  で極大。 $x_{max} < 1 \Leftrightarrow \beta > \alpha/(1 - \alpha) > 0$ 、また、簡単な計算から、 $g'(p) < -1 \Leftrightarrow \beta > (\alpha + 1)/(1 - \alpha)$  だから、 $\forall \beta > (\alpha + 1)/(1 - \alpha)$  に対し、 $g$  は  $x_{max} < p$  で極大かつ、 $g'(p) < -1$  となるような単峰写像である。次に、十分大きな  $\beta$  に対し、 $g^2 = g \circ g$  による 2 回の正の反復で不動点  $p$  に落ち込む点  $x$  が  $(x_{max}, p)$  に存在することを示す。(P8) と (P11) より  $\alpha > \forall \varepsilon_1 > 0, \exists \beta_1 > (\alpha + 1)/(1 - \alpha)$ ;  $\forall \beta \geq \beta_1$  に対し、 $g(x_{max}) > p$  かつ、 $0 < g^2(x_{max}) < \varepsilon_1$  が成り立つ。ここで、(P1)、(P5)、(P6) および (P9) から、 $\chi x > f(x) > g(x) > 0, (\forall x > 0)$  だから、 $\forall \beta \geq \beta_1$  に対し、 $g(1/\chi) < p$  かつ、 $g(x_{max}) > p$  より、 $\exists \bar{x} \in (1/\chi, x_{max})$  s.t.  $g(\bar{x}) = p \neq x$ 。  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \chi = 1/\alpha$  だから、 $\alpha - \varepsilon_1 > \forall \varepsilon_2 > 0, \exists \beta_2 \geq \beta_1$ ;  $\forall \beta \geq \beta_2$  に対し、 $\alpha - \varepsilon_1 < 1/\chi < \alpha + \varepsilon_2$  より、 $0 < g^2(x_{max}) < \varepsilon_1 < \alpha - \varepsilon_2 < 1/\chi < \bar{x}$ 。従って、 $\forall \beta \geq \beta_2$  に対し、 $g^2(x_{max}) < \bar{x}$  かつ  $g^2(p) = p > \bar{x}$  だから、 $\exists x_h \in (x_{max}, p)$  s.t.  $g^2(x_h) = \bar{x} \neq x_h$ 。よって、 $g^2 \circ g^2(x_h) = p$ 。次に、 $g^{-2n}|_{[x_{max}, p]}(x_h) \rightarrow p, n = 1, 2, 3, \dots$  を示す。 $x_h$  の  $g^2$  による有限個の前方軌道とこの前像により定義される無限個の  $p$  に漸近する後方軌

道の和集合は  $g^2$  の  $p$  に関するひとつのホモクリニック軌道を構成する。 $g^2$  が  $[x_{max}, p]$  で単調増加なので、 $g^2|_{[x_{max}, p]}$  の周期点は不動点に限る。 $g|_{[x_{max}, p]}$  に関していえば、単調減少性から周期点は周期 2 の周期点か不動点だけだが、 $[x_{max}, p]$  には不動点は存在しないので、結局、十分大きな  $\beta$  に対して、 $g$  が区間  $[x_{max}, p]$  に周期 2 の周期点をもたないことを示せば十分。2 つのグラフ  $G_1 = \{(x, y) | y = g(x), x_{max} \leq x < p\}$ ,  $G_2 = \{(x, y) | x = g(y), p < y \leq g(x_{max})\}$  を定義する。その交点  $P_2 \equiv G_1 \cap G_2 = \emptyset$  であれば、 $g$  が区間  $[x_{max}, p]$  において周期 2 の周期点をもたないことを意味する。 $\mu < p$  の場合と  $\mu \geq p$  の場合とが分けられるが、同様の議論なので、前者の場合についてのみ、十分大きな  $\beta$  に対し、 $P_2 = \emptyset$  が成り立つことを示す。そのために、 $D = \{(x, y) | y \geq 2 - x, 0 < x \leq p\}$  を定義しておく。点  $c = (x_{max}, g(x_{max})) \in G_1$  および、点  $c' = (g^2(x_{max}), g(x_{max})) \in G_2$  をとると、(P8)、(P10)、(P11) から、 $\exists \beta_3 > (\alpha + 1)/(1 - \alpha), \forall \beta \geq \beta_3$  に対し、 $c \in \text{int } D, c' \in D$  かつ、 $g'(p) < -1$ 。また、 $\forall \beta \geq \beta_3$  に対し、 $[x_{max}, p]$  上で  $g$  が単調減少で、(P4) より一意的な変曲点  $\mu < p$  に対し、 $g''(x) < 0 (\forall x \in [x_{max}, \mu])$  および、 $g''(x) > 0 (\forall x \in (\mu, p])$ 。これは  $G_1 \subset \text{int } D$  を意味する。一方、 $g''(x) > 0 (\forall x \geq p)$  より、 $G_2 \cap D = \emptyset$ 。即ち、 $P_2 = \emptyset$ 。

$g^2$  の  $p$  に関するホモクリニック点は、 $g$  の  $p$  に関するホモクリニック点でもあるから、結局、 $\bar{\beta} = \max\{\beta_2, \beta_3\}$  とすれば、 $\forall \beta \geq \bar{\beta}$  に対し、 $g$  は  $p$  に関するホモクリニック軌道をもつ。また、 $g'(x) = 0$  となる  $x$  は  $x_{max}$  だけなので、このホモクリニック軌道は構成から非退化であ



る。 $\alpha$  が  $(0, 1)$  で任意だから、補題 3 が示された。□

次の定理は、横断的ホモクリニック点と「馬蹄」(horseshoe)<sup>(20)</sup>の存在との関係性を述べたもので、「Smale-Birkhoffのホモクリニック点定理」とも呼ばれる。

**定理 1** :  $M$  をなめらかな多様体、 $U \subset M$  を開集合、 $f : U \rightarrow M$  を埋め込み、 $p \in U$  を横断的ホモクリニック点をもつ双曲型不動点とす

る。そのとき、 $p$  の任意の近傍  $V$  に対し、 $n > 0$  と双曲型集合  $\Lambda \subset V$  s.t.  $f^n(\Lambda) = \Lambda$  が存在して、 $f^n|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$  は 2 記号の全推移写像<sup>(21)</sup>  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  と位相共役である (i.e.  $f^n$  は  $V$  において馬蹄をもつ)。

経済的にはあまり興味深いとはいえない  $s = 0$  という特異な状況に関する知識を利用して、経済学的に意味のある  $s > 0$  となる状況を調べることにする。

**命題 3** :  $F : \mathbb{R}^2_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  に関して、 $\alpha \in (0, 1)$  を任意に固定し、 $\bar{\beta}$  を補題 3 で決めたようにとり、 $\beta \geq \bar{\beta}$  となる  $\beta$  をひとつ決める。そのとき、 $p$  の近傍  $U \subset \mathbb{R}^2_+$  と  $\varepsilon > 0$  が存在して、 $\varepsilon > \forall s > 0$  と双曲型不動点  $p$  の任意の近傍  $\mathcal{B} \subset U$  に対し、 $F : U \rightarrow U$  が埋め込みで、ある整数  $n$  と  $F^n$  に関するある双曲型不変部分集合  $\Lambda \subset U$  s.t.  $F^n(\Lambda) = \Lambda$  が存在し、 $F^n|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$  は、2 記号全推移写像  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  と位相共役である。つまり、ある同相写像  $h : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  が存在して、任意の  $x \in \Lambda$  に対し、 $h \circ F^n|_{\Lambda}(x) = \sigma|_{\Sigma_2} \circ h(x)$ 、即ち、次の図式：

(20) Cf. Smale (1967)

(21)  $S = \{0, 1\}$  を 0 と 1 からなる集合とする。 $\Sigma_2$  を  $S$  のコピーの両側無限直積として以下のように定義する：

$$\Sigma_2 \equiv \prod_{j=-\infty}^{\infty} S_j = \{s = \{\dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots\} | s_j \in S, S_j = S, \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

$\Sigma_2$  上に距離を導入する。任意の  $\Sigma_2$  の 2 つの元  $s = \{\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots\}$  と  $t = \{\dots t_{-1} \cdot t_0 t_1 \dots\}$  に対し、距離  $d_s(\cdot, \cdot)$  を次のように定義する：

$$d_s(s, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(s_i, t_i)}{2^{|i|}}, \quad \text{ただし、} \delta(s_i, t_i) = \begin{cases} 1 & s_i \neq t_i \\ 0 & s_i = t_i \end{cases}$$

このとき、距離空間  $(\Sigma_2, d_s)$  がコンパクト、完全不連結、完全な空間であることが確かめられる。この空間の上に、推移写像 (shift) と呼ばれる写像  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  を定義する。 $\sigma$  は  $\Sigma_2$  の元の小数点を右にひとつ「ずらす」ように作用する。つまり、 $\sigma(\{\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots\}) = \{\dots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \dots\}$  となる。ここでは  $\Sigma_2$  に制限した  $\sigma$ 、 $\sigma|_{\Sigma_2}$  を「2 記号全推移写像」と呼ぶことにする。この 2 記号全推移写像が同相写像であり、本稿の系 1 で主張されるような様々な性質をもつことは容易に示される。我々はこの機分人工的にみえる記号力学系  $(\sigma, \Sigma_2, d_s)$  を、我々が関心をもつ経済モデルの「モデル」として役立てることで、つまり、両者の位相的な同値性を示すことで、直接的な分析が困難である非線形経済モデルから有用な分析的結論を導くとともに、経済変動現象のひとつの解釈のための基礎を得ることができるわけである。

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda & \xrightarrow{F^n|_A} & \Lambda \\
h \downarrow & & \downarrow h \\
\Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2
\end{array}$$

が可換である。

**証明：**まず、 $\beta \geq \bar{\beta}$  を固定しておく。 $F$  が  $s$  に依存することを、 $F_s$  で表わす。 $C \equiv \{(x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2 \mid y = g(x), x > 0\}$  とすると、 $F_0(\mathbf{R}_{++}^2) = F_0(C) \subset C$  である。不動点  $\mathbf{p}$  での  $F_0$  のヤコビ行列は、

$$D_{\mathbf{p}}F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g'(\mathbf{p}) & 0 \end{pmatrix}$$

より、この特異行列の固有値  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  は、 $\lambda_1(0) = 0$  と  $\lambda_2(0) = g'(\mathbf{p}) < -1$ 。 $\mathbf{p}$  の十分小さな近傍を  $\mathfrak{B}$  とする。これらに対応させて、 $s = 0$  に対し、 $\mathbf{p}$  の局所安定・不安定多様体をそれぞれ  $\tilde{W}_{loc}^s(\mathbf{p}) \equiv \{(x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2 \mid y = \mathbf{p}\} \cap \mathfrak{B}$  および、 $\tilde{W}_{loc}^u(\mathbf{p}) \equiv \{(x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2 \mid y = g(x), x > 0\} \cap \mathfrak{B}$ 。ただし、 $\tilde{W}_{loc}^s(\mathbf{p})$  と  $\tilde{W}_{loc}^u(\mathbf{p})$  は連結集合である。 $g$  の  $\mathbf{p}$  に関する非退化ホモクリニック軌道上の点で、 $\mathbf{p}$  に十分近いところのものをひとつとり、 $q_1$  とおくと、 $(q_1, g(q_1)) \in \tilde{W}_{loc}^u(\mathbf{p})$ 。 $\exists m > 0; \forall k \geq m, \mathbf{p} = g^k(q_1)$  かつ、 $m > \forall i \geq 0$  に対し、 $g^i(q_1) \neq \mathbf{p}$ 。また、 $g$  を  $\mathbf{p}$  の近くに制限すれば、 $g^{-k}(q_1) \rightarrow \mathbf{p} (k \rightarrow \infty)$ 。また、 $(g^i)'(q_1) \neq 0 (i \in \mathbf{Z})$  である。点列  $\{q_k\}_{k=0}^{\infty} \equiv \{(q_k, q_{k+1})\}$  s.t.  $q_{k+1} = g(q_k) (k \in \mathbf{Z})$  をとると、 $q_k \rightarrow \mathbf{p} (k \rightarrow -\infty)$  かつ、 $\forall k \geq m$  に対し、 $q_k = \mathbf{p}$  だから、 $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$  は  $F_0$  の  $\mathbf{p}$  に関するひとつのホモクリニック軌道である。

次に、横断性を調べるために、ひとつのホモクリニック軌道に属するの各点  $q_k, m \geq k$  を含むような  $C$  内のなめらかな 1 次元開円板の列  $\{C_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  をとる。ただし、 $i \leq m$  に対して、 $C_{i+1} = F_0|_C(C_i)$ ,  $q_i \in C_i$  であり、非退化性から  $F_0|_C : C_i \rightarrow C_{i+1} : \text{微分同相写像}$ ,  $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i, j < m, i \neq j$  かつ、一般性を失わず  $C_0 \subset \tilde{W}_{loc}^s(\mathbf{p})$  とできる。よって、 $F_0^m|_C : C_0 \rightarrow C_m$  は  $C_0$  を  $C_m$  の上に微分同相的に写すので、 $q_m \in C_m$  に注意すると構成から、 $F_0^m(C_0)$  と  $\tilde{W}_{loc}^s(\mathbf{p})$  は  $F_0^m(q_0) = \mathbf{p}$  で横断的に交叉する。

$a = g^2(x_{max}), b = g(x_{max})$  とおく。 $L = \{(x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2 \mid y = g(x), a \leq x \leq b\}$  と定義すると、 $F_0(L) = L$  である。 $a > \varepsilon_0 > 0$  を固定し、 $g(b + \varepsilon_1) > a - \varepsilon_0$  となる  $\varepsilon_1 > 0$  を固定して、 $Iy = [a - \varepsilon_0, b + \varepsilon_1] \subset \mathbf{R}_{++}$  とすると、 $g(Iy) \subset \text{int } Iy$  である。また、 $a > \varepsilon'_0 > \varepsilon_0 > 0$  を固定し、 $g(b + \varepsilon'_1) > a - \varepsilon'_0$  となる  $\varepsilon'_1 > \varepsilon_1 > 0$  を固定して、 $Ix = [a - \varepsilon'_0, b + \varepsilon'_1] \subset \mathbf{R}_{++}$  とすると、 $Iy \subset \text{int } Ix$  かつ  $g(Ix) \subset \text{int } Ix$ 。 $Q \equiv Ix \times Iy$  と定義すると、 $L \subset \text{int } Q$  かつ、 $F_0(Q) \subset \text{int } Q$  また、 $F_0(Q) \subset C$ 。 $\partial Q = Q \setminus \text{int } Q$  に対し、 $\delta_L = \min\{\|x - y\| \mid x \in \partial Q, y \in L\}$  とする。 $s_1 = \sup\{s \in (0, 1) \mid \max_{(x,y) \in Q} |s(w(y) - f'(y)w(x))| < \delta_L\}$  とすれば、 $\forall s \in (0, s_1)$  に対し、 $F_s(Q) \subset \text{int } Q \subset \mathbf{R}_{++}^2$  が成り立つ。 $s \in (0, 1)$  のとき、 $\det D_x F_s \neq 0 (x \in \mathbf{R}_{++}^2)$  かつ、 $F_s : \mathbf{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  が 1 対 1 のなめらかな写像であったから、 $U \equiv \text{int } Q$  とおけば、 $s \in (0, s_1)$  に対し、 $F_s : U \subset \mathbf{R}_{++}^2 \rightarrow U$  は埋め込みである。

固有値のパラメーターに関する連続性と  $\det$

$\partial A$  集合  $A$  に対し、 $\bar{A}$  は  $A$  の閉包を表すものとする。

$DpF_s > 0 (s > 0)$  より, 十分小さな  $s_2 > 0$  があって,  $\forall s \in (0, s_2)$  に対し,  $-1 < \lambda_1(s) < 0$  と  $\lambda_2(s) < -1$  が成り立つ。横断的交叉は  $C^1$ -位相で安定だから, 結局,  $\varepsilon \in (0, \min\{s_1, s_2\})$  が存在して, 任意の  $s \in (0, \varepsilon)$  に対して,  $p \in U$  は横断的ホモクリニック点をもつ双曲型不動点である。よって, 定理1より, 命題3が示された。□

2 記号全推移写像  $\sigma|_{\Sigma_2} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  の極めて豊かな諸性質のうち, 位相共役性によって保存される性質を我々が関心をもつ部分経済系  $F^n|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda$  は有する。従って, 命題3の系として直ちに次のことが主張できる。

系1:  $\alpha, \beta, s, n$  および,  $U \subset \mathbf{R}_+^2$  と  $\Lambda \subset U$  を命題3のようにとる。そのとき,  $F^n|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda$  に関して, 次のことが成り立つ:

- (C0)  $\Lambda$  はコンパクト, 完全不連結 (totally disconnected), 完全 (perfect) な集合, 即ち, カントル集合 (Cantor set) である。
- (C1) 可算無限個の任意の周期の周期軌道<sup>(23)</sup>をもつ。
- (C2) 非可算無限個の非周期軌道をもつ。
- (C3) 稠密軌道をもつ。つまり,  $\exists x_0 \in \Lambda; \overline{\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} F^{in}(x_0)} = \Lambda$ 。
- (C4) 位相混合的 (topologically mixing) である。つまり,  $U \cap \Lambda \neq \emptyset$  かつ  $V \cap \Lambda \neq \emptyset$  となる任意の開集合  $U, V \subset U$  に対し,

$\exists N > 0; \forall m \geq N, F^{mn}(U) \cap V \cap \Lambda \neq \emptyset$ 。

- (C5) 位相推移的 (topologically transitive) である。つまり,  $U \cap \Lambda \neq \emptyset$  かつ  $V \cap \Lambda \neq \emptyset$  となる任意の開集合  $U, V \subset U$  に対し,  $\exists m \geq 0; F^{mn}(U) \cap V \cap \Lambda \neq \emptyset$ 。
- (C6) 周期点の集合  $\text{Per}(F^n|_\Lambda)$  は  $\Lambda$  で稠密。つまり,  $\overline{\text{Per}(F^n|_\Lambda)} = \Lambda$ 。
- (C7) 擬軌道追跡性 (pseudo orbit tracing property) をもつ。つまり,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \in PO_\delta(F^n|_\Lambda) \equiv \{\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \in \Lambda \mid d(F^n|_\Lambda(x_i), x_{i+1}) < \delta, i \in \mathbf{Z}\}, \exists y \in \Lambda; \forall i \in \mathbf{Z}, d(F^{in}|_\Lambda(y), x_i) < \varepsilon$ 。
- (C8) 拡大的 (expansive) である。つまり,  $\Lambda$  の点に存在しない  $\delta > 0$  が存在して,  $\forall x, y \in \Lambda (x \neq y), \exists m \in \mathbf{Z}; d(F^{mn}(x), F^{mn}(y)) \geq \delta$ 。
- (C9) 初期値鋭敏性 (sensitive dependence on initial conditions) をもつ。つまり,  $\Lambda$  の点に依存しない  $\delta > 0$  が存在して,  $\forall x \in \Lambda, \forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in \{y \in \Lambda \mid d(x, y) < \varepsilon\}, \exists m \in \mathbf{Z}; d(F^{mn}(x), F^{mn}(y_0)) \geq \delta$ 。

上の系1に関して, 一般に,  $\Lambda$  がコンパクトな無限集合であることにも気を付けると, (C3)  $\Leftrightarrow$  (C5), (C4)  $\Rightarrow$  (C9), (C5) + (C6)  $\Rightarrow$  (C9) という関係が成り立っている。また, 定義から, (C4)  $\Rightarrow$  (C5), (C8)  $\Rightarrow$  (C9) である<sup>(24)</sup>。しばしば, (C5) + (C9) という条件をもって, そ

<sup>(23)</sup>  $\Lambda$  内の周期点は全て鞍部型<sup>(23)</sup>の双曲型周期点である。

<sup>(24)</sup> この意味で, (C3), (C5) および (C9) を述べるのは蛇足かもしれない。

の力学系を「カオス」(chaotic)であるということがある。ところが、この「カオス」の定義によると、条件(C4) $\Rightarrow$ (C5)+(C9)であるから、ほぼ位相混合性のみでカオスを意味してしまうことに注意する。しかしながら、一般的に通用する適切な「カオス」という概念の定義は今のところ存在していないように思われる。

$F^n|_A : \Lambda \rightarrow \Lambda$ が拡大性をもつと主張したが、この性質は、経済現象を力学系で記述し、経済変数の将来的な動向をその経済の外部から第三者として予測しようという立場からは、しばしば「予測不可能性」とみなされる。つまり、どんなに観測の精度をあげても、観測誤差が存在する限り、ある観測値に基づく予測は、いつか必ず少なくともある値だけの予測誤差を生み出す。このことは、丸め誤差の避けられない計算機による数値計算の過程でも経験される。しかし、これと同時に興味深いのは、擬軌道追跡性により、数値的な写像の反復によって得られる点の列、あるいは小さな誤差を伴う観測値の列——擬軌道とみなされる——は、何らかの真の軌道の近似になっているということである。

命題3や系1における主張は、本来その経済系が定義されている空間全体に対し、ごく限られた不変集合系の性質に関するものに他

ならない。よって、例えば、位相混合性、拡大性、擬軌道追跡性などの複雑性を生み出す性質は、現段階では、単に $\Lambda$ 上のみ通用するものであることに注意する。よって、これは無作為にある初期条件を与えたときに実際に複雑な振る舞いが観察できることを必ずしも意味しない。経済系が我々のモデルのように馬蹄を有したとしても、明らかに局所漸近安定な周期軌道をもてば、確かにその周期点に近い点はそこに引き寄せられるであろう。したがって、そのような場合、ここで得られたような複雑性は長期的に観察されないことによる。しかしながら、与えられた経済系のそこへの制限が複雑な動きをみせるような不変集合に対し、それに十分近い点は、仮に安定な周期軌道に引き寄せられるにしても、写像の連続性から、かなり長い時間、「過渡的」な複雑な変動を保ち続けるであろう<sup>(25)</sup>。もし、経済を短い期間で捉えるならこのことは無視できないことである。

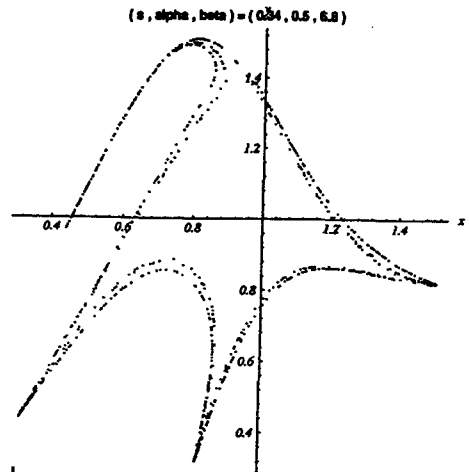
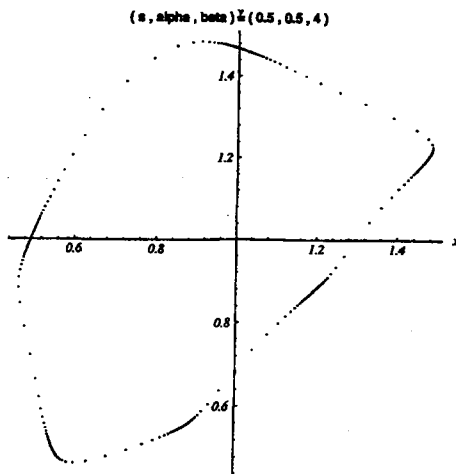
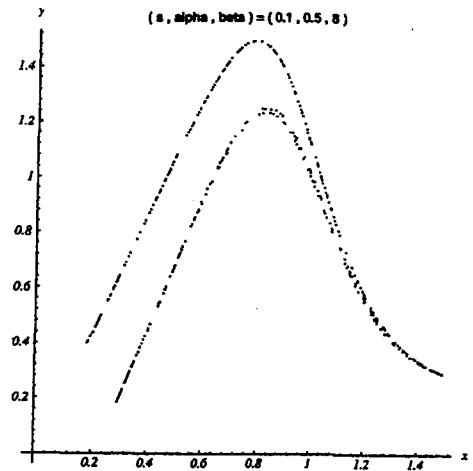
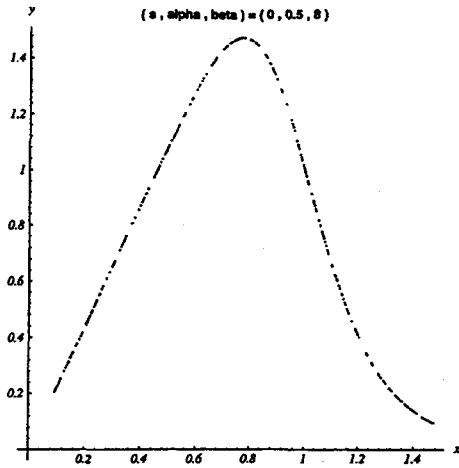
## 5 結び

本稿ではよく知られた経済モデルにおいて、長期均衡の局所分岐、つまり構造パラメータの変化による長期均衡の近傍の経済変動の型の定性的変化に関する議論と、「馬蹄」として表される部分経済系の大域的な動学的性質の記号力学系による特徴付けに関する議論を行い、多くの興味深い結果を得た。特に複雑な

<sup>(25)</sup>複雑な過渡的挙動 (complex transient motion) に関する議論に関して、例えば、Lorenz (1992)、Dohtani et al (1995)を見よ。

<sup>(26)</sup>他に2次元写像による経済変動モデル(離散型Kaldorモデル)の例で、類似した論法により攪拌集合(scrambled set)が存在するという意味でカオス的な振る舞いを研究したものとして、Dohtani/Misawa/Inaba/Yokoo/Owase (1995)がある。ただし、そこでは、写像が1対1でないので、Smale-Birkhoffの定理とMarottoの定理を一般化した白岩・倉田の定理が用いられている。また、そこでは外生的なショックがカオス的な経済系により生成される時系列に与える影響について数値計算を交えて考察されている。





軌道のプロット

変動を示す高次元の経済系の大域的な特徴付けに関しては、今まで明確に分析された例が少ないので<sup>(26)</sup>、ここでの議論は今後の経済動学理論の展開に対し、いくらかは寄与するところがあったといえよう。しかしながら、効用関数や生産関数をかなり特定化したにもかかわらず、分岐図や軌道のプロットを通じてコンピュータのモニター上に「観察される」ような複雑な状況がいかなる性質をもつもの

で、どのような機構を通じて発生するのかという問題については、多くが未解決であり、これら問題の解明は我々の今後の大きな課題である。

参考文献

- [1] Anderson, P.A./Arrow, K.J./Pines, D. (eds.) (1988) : *The Economy as an Evolving Complex System*. Addison-Wesley.

- [2] 青木統夫 (1996) : 「力学系・カオス」, 共立出版株式会社。
- [3] Benhabib, J./Laroque, G. (1988) : "On Competitive Cycles in Productive Economies." *Journal of Economic Theory* 45, pp. 145-170.
- [4] Boldrin, M./Woodford, M. (1990) : "Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos : A Survey." *Journal of Monetary Economics* 25, pp. 189-222.
- [5] Diamond, P.A. (1965) : "National Debt in a Neoclassical Growth Model." *American Economic Review* 55, pp. 1126-1150.
- [6] Dohtani, A. (1992) : "Occurrence of Chaos in Higher-Dimensional Discrete-Time Systems." *SIAM Journal of Applied Mathematics* 52, pp. 1707-1721.
- [7] Dohtani, A./Misawa, T./Inaba, T./Yokoo, M./Owase, T. (1995) : "Chaos, Complex Transients, and Noise : Illustration with a Kaldor Model." Paper presented at the *Conference on Bifurcation and Chaos in Economic and Social Systems* held at the Umea° University.
- [8] Farmer, R.E.A. (1986) : "Deficits and Cycles." *Journal of Economic Theory* 40, pp.77-88.
- [9] Guckenheimer, J./Holmes, P. (1983) : *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 3rd ed. Springer-Verlag.
- [10] Hommes, C.H. (1991) : *Chaotic Dynamics in Economic Models : Some Simple Case-Studies*. Groningen : Wolters-Noordhoff.
- [11] Jullien, B. (1988) : "Competitive Business Cycles in an Overlapping Generations Economy with Productive Investment." *Journal of Economic Theory* 46, pp. 45-65.
- [12] Lorenz, H.-W. (1992) : "Multiple Attractors, Complex Basin Boundaries, and Transient Motion in Deterministic Economic Systems." in : Feichtinger, G. (ed.) : *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, pp. 411-430, Amsterdam : North-Holland.
- [13] Lorenz, H.-W. (1993) : *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. 2nd ed. Springer-Verlag.
- [14] Nusse, H.E./Yorke, J.A. (1988) : "Period-Halving for  $x_{n+1}=mF(x_n)$  where  $F$  has Negative Schwarzian Derivative." *Physics Letters* 127 A, pp. 328-334.
- [15] Owase, T. (1991) : "Nonlinear Dynamical Systems and Economic Fluctuations : A Brief Historical Survey." *IEICE Transactions E74*, pp. 1393-1400.
- [16] Reichlin, P. (1986) : "Equilibrium Cycles in an Overlapping Generations Economy with Production." *Journal of Economic Theory* 40, pp. 89-102.
- [17] Smale, S. (1967) : "Differentiable Dynamical Systems." Reprinted in : Smale, S. (1980) : *The Mathematics of Time. Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics*. Springer-Verlag.
- [18] 横尾昌紀 (1996) : 「1 次元および 2 次元離散時間非線形力学系理論による経済変動モデルの再検討」, 修士論文 (早稲田大学)。
- [19] Zarnowitz, V. (1987) : "The Regularity of Business Cycles." *NBER Working Paper*, No. 2381.

(博士課程後期 1 年)