早稲田経済学研究　65号　2007年9月

Owen の Coalitional value の非協力メカニズムによる遂行

上　條　良　夫†

JEL Classification Number:　C71; C72

Keywords:　特性関数形ゲーム；提携構造；Coalitional value；遂行問題

概要

本稿では，提携構造のある特性関数形ゲームの代表的解概念である Owen(1977) の Coalitional value を非協力的メカニズムで遂行する問題を考察する．本稿で紹介されるメカニズムは，Perez-Castrillo and Wettstein(2001) により考案された bidding メカニズムを基礎とする．特性関数形ゲームが厳密なゼロ単調性を満たすときに，このメカニズムのすべての部分ゲーム完全均衡点において Coalitional value が達成されることが示される．

1　序論

社会に属する主体たちが協力することにより一定の成果を獲得でき，それを分配することができるような状況は協力ゲーム(特性関数形ゲーム)として描写される．協力することにより何らかの成果を獲得できる一方で，賃金決定を巡る労使交渉における労働組合のように，協力の成果を分配する際に，主体たちがその交渉力を増加させる目的でグループを形成するような状況もしばしば存在する．このように主体たちの属するグループを明示的に扱うべき状況は，提携構造のある特性関数形ゲームとして表現することが可能である．

主体たちの協力をある意味で前提として扱う協力ゲームでは，その主たる分析対象は協力の成果をいかにして分配するのか，という分配ルールそれ自身である．それゆえ，分配ルールはゲームの解概念とよばれる．提携構造のある特性関数形ゲームを定式化した Aumann and Dreze(1974) は，協力ゲームで考察された多様な解概念を提携構造が存在するケースへと拡張した．その後，Owen

* 本論分の執筆にあたり，早稲田大学政治経済学術院，船木由喜彦教授，2名の匿名レフェリーより貴重なコメントを頂き，論文の質が向上することとなった．とりわけ，レフェリーのうち一人から指摘された初期の主要定理の証明の不備を修正することにより，定理の主張がより改善することとなった．この場で感謝の意を表わしたい．なお，本論分の誤りは著者に責のあることを記す．

† 早稲田大学政治経済学術院助手　Email：kami-jo@suou.waseda.jp

(1977)により，提携構造のある特性関数形ゲームの解概念である Coalitional value が定義された．Owen の Coalitional value は提携構造のない通常の意味での協力ゲームの代表的解概念 Shapley value の自然な拡張であり，多くの研究者によりその性質が研究されてきた．

解概念に関する研究の一つの流れは解の公理化である．Owen(1977)自身が Shapley(1953)における Shapley value の公理化を応用した Coalitional value の公理化を行う一方で，Hart and Kurz (1983)は提携形成の視点から正当化される公理を提示し，それを満足する解が唯一 Coalitional value であることを示した．また，Winter(1992)は，当初の配分問題に解概念を適用した結果得られた配分案が，その配分案をもとに作られた再分配問題に対して解概念を適用した結果と一致するという整合性公理を用いて Coalitional value の公理化を行っている．Calvo, Lasaga, and Winter (1996)は，互いに相手の利得に対する限界的貢献が一致するという意味での交渉力の均等化という性質から，Coalitional value の公理化を行っている．Hamiache(2000)は，Winter(1992)とは異なる整合性公理を挙げ Coalitional value の公理化を行った．

公理化に関する研究が古くから現在に至るまで行われている一方で，解概念を擁護するもう一つの研究の流れ，つまり解概念を非協力交渉ゲームによる基礎付けるという研究は，Coalitional value に関してはほとんど行われていない．Nash により始められた，このような研究は Nash プログラムとよばれる(Nash, 1950, 1953)．一般に，公理により正当化された解概念を主体たちに実際に適用することは容易ではない．なぜなら，ある解概念を実際に適用しようと思案している社会計画者が，主体たちに関する正確な情報を有するとは限らないからである．非協力ゲームによる基礎付けとは，このように計画者と主体たちの間で情報の非対称性がある環境でも，当該解概念どおりの分配案を主体に課すことを計画者に保証する研究である．非協力ゲーム(メカニズム)を適切に設計し，それを行う主体たちの合理的行動の帰結が，計画者の思い描く分配案と一致するようにするのである．

Shapley value を遂行する非協力モデルは数多く存在する．例えば，Gul(1989), Hart and Mas-Colell(1992), Winter(1994), Evans(1996), Hart and Mas-Colell(1996), Dasgupta and Chiu(1998), Perez-Castrillo and Wettstein(2001)などを挙げることができる．その一方で，Coalitional value を遂行するメカニズムの研究は少なく，その数少ない研究として Vidal-Puga and Bergantinos(2003)を挙げることができる．彼らのメカニズムは，Perez-Castrillo and Wettstein(2001)の bidding メカニズムを提携構造のあるゲームへと拡張したものであり，bidding メカニズムを，提携内のゲームと各提携の代表が行うゲームとの二段階に適用することにより定義される．彼らは，このような非協力ゲームの(ある)部分ゲーム完全均衡点において Coalitional value が達成されることを示したのである．

しかしながら彼らのメカニズムは，Kamijo(2006a)が指摘しているように，保有資源を取引するかのように「協力の成果を生み出す要素」を自由に取引できるような状況を想定しており，経済学やゲーム理論が一般に想定する主体たちの協力は想定外である(例えば標準形ゲームから特性関数形ゲームを作ったケースなど)．そこで，本稿では Vidal-Puga and Bergantinos(2003)と異なり，

協力の種類に制約を課すことなく Coalitional value を達成できるような非協力メカニズムを考案する．Kamijo(2006a)では未解決問題として扱われた，このような状況下での Coalitional value の遂行は，Vidal-Puga and Bergantinos(2003)や Kamijo(2006a)で考えられていたような bidding メカニズムを二段階に適用するというアイデアではなく，一段階の bidding メカニズムではあるが，提案者の提案が拒否された後の状況を，提携内と提携外とで非対称的に扱うという交渉モデルをにより実現される．

ここで紹介される交渉モデルは，Perez-Castrillo and Wettstein(2001)の bidding メカニズムのアイデアを踏襲している．彼らの交渉モデルは，Rubinstein 型の提案・応答型の交渉の一種である．しかし，提案者の定まり方を，参加者自身が行う bidding ゲームの結果とするという点が通常の提案・応答型の交渉と異なっている．交渉の参加者は，後に行われる提案・応答型のゲームでの提案者を決めるために次のようなステージを行う．各参加者は，提案者となるために他の参加者に支払っても良いと考える金額(bid)を同時に表明する．この表明された bid をもとに，参加者ごとに net bid が，(彼の他の参加者に対して表明した bid の合計) − (他の参加者が彼に対して表明した bid の合計)，として計算され，net bid が一番大きいものが提案者となる．提案者となるものだけが，提案応答ステージ行う前に，実際に bid を支払うことになる．

bidding メカニズムを提携構造が存在するケースや，さらにその拡張である階層構造(Winter, 1989)が存在するケースへと拡張した研究の多くが，段階ごとの bidding メカニズムの適用というアイデアに拠っている(例えば，提携構造の存在するケースでは Vidal-Puga and Bergantinos 2003，階層構造が存在するケースでは Vidal-Puga 2005b)．つまり，提携構造のケースを例にとると，まずグループ別にそれぞれのグループ内で bidding メカニズムを行い，そこで代表となったものがグループ内の協力の資源を回収し，各グループの代表により行われる bidding メカニズムを行うのである．この種のメカニズムを定義する際に鍵となる点は，協力を生み出す要素を資源のように譲渡できる，という仮定である．その一方で，本稿で考えられるメカニズムでは，このような段階的に適用される bidding メカニズムは必要なく，bidding ステージは一度だけ全員により行われる．bidding ステージの勝者は，自身のグループに属するメンバー達だけではなく，他のグループのメンバー全員にも利得の分配案を提案する．この分配案に対して，他の主体は順次,「受諾」か「拒否」のいずれかを決定することになる．合意は満場一致性であり，全員が受諾したときにはそのとおりの分配案が実行される．その一方である主体が拒否した際には提案内容は廃棄されることになる．

我々のモデルでは，グループの存在は提案が拒否された後に重要となる．拒否された後の状況は，提案を拒否した主体が提案者と同一のグループに属するのか，異なるグループに属するのか，という点に応じて異なるのである．このような単純な設定にすることにより，段階的に bidding メカニズムを適用するという複雑な手順を踏むことなく Coalitional value が達成されることが示される．

本稿の残りの構成は次のとおりである．次節では，本稿で用いられる表記法と基本的概念の定義が説明される．3 節では，本稿の核となる交渉モデルの説明を行い，4 節では主要定理の証明が与

えられる．残された課題等については5節でまとめられる．

2　表記法と定義の準備

特性関数形ゲームの定義から始める．$N=\{1,...,n\}$ を数字により名前の与えられたプレイヤーの有限集合として，N の部分集合からなる集合族を 2^N と表す．2^N の要素 S は提携とよばれる．関数 $v:2^N\to\mathbb{R}$ は特性関数よばれ，各提携 S に対して，$v(S)$ は S のメンバーが彼らだけで確保できるような譲渡可能効用の和(例えば金銭など)を表している．しばしば，$v(S)$ は提携 S の価値と称され，通常 $v(\emptyset)=0$ である．N と v の組 (N,v) を特性関数形ゲーム，ないし協力ゲームとよぶ．

プレイヤー $i\in N$ に対して，x_i が彼の利得を表すとき，$x=(x_i)_{i\in N}\in\mathbb{R}^N$ は利得ベクトルとよばれる．利得ベクトル x がゲーム (N,v) で実行可能であるとは，$\Sigma_{i\in N}x_i\leqq v(N)$ が成り立つようなケースを指す．つまり，全員が協力した際に得られる総和 $v(N)$ を超えない限りは，そのような分配は可能であるとみなすのである．特性関数 v が，任意の提携 $S,T(S\cap T=\emptyset)$ に対して $v(S\cup T)\geqq v(S)+v(T)$ を満たすとき，(N,v) は優加法性を満たすといい，不等号が厳密であるときには厳密な優加法性を満たすという．また，任意の $i\in N$ と $S\subseteq N-i$ に対して $v(S\cup\{i\})\geqq v(S)+v(\{i\})$ を満たすとき，(N,v) はゼロ単調性を満たすといい，不等号が厳密である場合には厳密なゼロ単調性を満たすという．ここで，記号 $N-i$ は $N\setminus\{i\}$ を表わしており，混乱を生じさせる恐れがない限り，本稿ではこのような記号を用いる．特性関数が(厳密な)優加法性を満たすときには(厳密な)ゼロ単調性も満たすことになるが，その逆は成立しない．

特性関数形ゲームの解とは，各特性関数 (N,v) に対してその実行可能な利得ベクトルの集合を返すような対応である．対応させる利得ベクトルがただ一つの利得ベクトルであるような際には，そのような解を一点解と表現する．しかし，本稿では一点解のみを扱うので，両者を区別するような表現は用いない．

特性関数形ゲームの代表的な解は **Shapley value** ϕ であり，次のように定義される．任意の $i\in N$ に対して，(N,v) の Shapley value $\phi(N,v)$ は，

$$\phi_i(N,v)=\sum_{S\subseteq N-i}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S)),$$

である．ただし，集合 S に対して $|S|$ は S の要素数を表わす記号である．

Shapley value は次のように解釈される．プレイヤーたちがランダムにある部屋に入室するような状況において，あるプレイヤーが入室した際にその時点ですでに入室していたプレイヤーたちに対する彼の限界貢献度を獲得できるようなケースを考える．例えば，プレイヤー $i\in N$ が入室した段階ですでに入室していたメンバーを S とすれば，i は S に対する限界貢献度 $v(S\cup\{i\})-v(S)$ を受け取ることができる．すると $\phi_i(N,v)$ はこのような状況での i の獲得する利得の期待値を表している．

上記のような特性関数形表現に加え，多くの経済的状況において，プレイヤー自身がなんらかの

グループに属している状況や，自身の交渉力を増加させる目的で組織を形成する状況などが存在している(例えば労使交渉における労働組合と経営者組合など)．そのような状況を明示的にゲームの記述に取り込む目的で，提携構造のある特性関数形ゲームが Aumann and Dreze(1974)により考案された．それは次のように記述される．

N をプレイヤー集合として，$C = \{C_1, \ldots ,C_m\}$ を N の分割，つまり $k, h(k \neq h)$ に対して $C_k \cap C_h = \emptyset$ かつ $\cup_{k=1}^{m} C_k = N$ を満足するような集合族，とする．C は提携構造とよばれる．C において，$i \in C_k, j \in C_k$ であれば，i と j は同一のグループに属しているとみなされる．特性関数形ゲーム (N, v) に N の提携構造 C を加えた三つ組み (N, v, C) を提携構造のある特性関数形ゲームとよぶ．

提携構造のある特性関数形ゲームの解も，特性関数形ゲームのときと同じように定義される．それでは，Owen(1977)により考えられた Shapley value の提携構造のある特性関数形ゲームへの拡張とみなせる解 ψ を定義しよう．(N, v, C) を提携構造のある特性関数形ゲームとして，$M = \{1, \ldots ,m\}$ を C の要素の添え字を表す集合とする．$i \in C_k \in C$ に対して，

$$\psi_i(N,v,C) = \sum_{H \subseteq M-k} \sum_{S \subseteq C_k - i} \frac{|H|!(m-|H|-1)!}{m!} \frac{|S|!(|C_k|-|S|-1)!}{|C_k|!} \Big(v\big(\bigcup_{h \in H} C_h \cup S \cup \{i\}\big) - v\big(\bigcup_{h \in H} C_h \cup S\big)\Big).$$

このとき，ψ を **Coalitional value** とよぶ．定義より $\psi(N, v, \{N\}) = \psi(N, v, \{\{i\}\}_{i \in N}) = \phi(N, v)$ である．

Coalitional value も Shapley value と同様の解釈が可能である．ただし，ここではプレイヤーの入室を決定するランダム化に対して提携構造からの制約が入り，同じグループに属するプレイヤーたちは連続して入室することになる．その結果，まず提携間の順序がランダムに定まり，その後グループ内プレイヤーたちの順序がランダムに定まり，その結果できある入室順序に応じて各プレイヤーは限界貢献度を獲得していく．Coalitional value はこのようなランダム装置による限界貢献度の期待値である．

では次に，プレイヤーに上位，下位のように階級があるような状態で定義される解を考える．$R \subseteq N$ が $N \setminus R$ に対して優位な立場にあるような状態において，Shapley value は次のように再定義されることになる．

$$\phi_i^H(N,v,R) = \begin{cases} \phi_i(R, v^{N\setminus R}) & \text{if } i \in R, \\ \phi_i(N \setminus R, v|_{N\setminus R}) & \text{if } i \in N \setminus R, \end{cases}$$

ここで $(R, v^{N\setminus R})$ は，任意の $S \subseteq R$ に対して，

$$v^{N\setminus R}(S) = v(S \cup (N \setminus R)) - v(N \setminus R),$$

として定義され，$(N \setminus R, v|_{N\setminus R})$ は (N, v) を $N \setminus R$ へと制約した部分ゲームを表している．部分ゲームに関しては，混乱する恐れがない限り，簡略化して $(N \setminus R, v)$ のように記述することにする．定

義からわかるように，ϕ^H とは，上位プレイヤーの集合 R のメンバーが必ず $N \setminus R$ の後に現れるような環境で計算される Shapley value である．

さて，本稿の残りでは，まず(N, v)と上位プレイヤーの集合 R に対して，必ず$\phi^H(N, v, R)$を部分ゲーム完全均衡点において達成するような交渉メカニズム Γ が説明される．そして，その交渉メカニズムを構成要素として内包する新たなメカニズム Δ を定義し，それが Coalitional value を達成することが証明される．それでは，本節の最後に，二つのメカニズムを結びつける上で核となる Coalitional value と ϕ^H の別表現について言及する．

命題 1 Coalitional value は以下の性質を満たす．$i \in C_k \in C$ に対して，

$$\psi_i(N, v, \mathcal{C}) = \frac{1}{m|C_k|}(v(N) - v(N-i)) + \frac{1}{m|C_k|}\sum_{j \in C_k - i} \phi_i^H(N-j, v, C_k - j)$$
$$+ \frac{1}{m}\sum_{C_h \in \mathcal{C}, C_h \neq C_k} \psi_i(N \setminus C_h, v, \mathcal{C} \setminus \{C_h\}).$$

ただし，m は提携構造 C の要素数を表わす．

証明．Coalitional value を生成するランダム装置の定義によると，$i \in C_k$ は確率 $\frac{1}{|C_k|m}$ で順序の最後のプレイヤーとなり，確率 $\frac{1}{|C_k|m}$ で $j \in C_k, j \neq i$ が順序の最後となり，$C_h \neq C_k$ は確率 $\frac{1}{m}$ で順序の最後の提携となる．

$i \in C_k$ が最後になるという条件のもと，i の獲得する限界貢献度の期待値は $v(N) - v(N-i)$ である．また，i 以外の $j \in C_k$ が最後になるという条件のもと，i の獲得する期待値は，$C_k - j$ が $N \setminus (C_k - j)$ に対して上位であるようなケースの限界貢献度の期待値となるので，それはまさしく $\phi^H(N-j, v, C_k - j)$ である．$C_h \neq C_k$ が最後に現れるという条件のもとの限界貢献度の期待値は，C_h を除いたゲーム $(N \setminus C_h, v, C \setminus \{C_h\})$ における Coalitional value と等しい．以上より命題は成り立つ．□

命題 2 ϕ^H に関して以下の性質が成り立つ．$R \subseteq N, i \in R$ のとき，

$$\phi_i^H(N, v, R) = \frac{1}{r}(v(N) - v(N-i)) + \frac{1}{r}\sum_{j \in R-i} \phi_i^H(N-j, v, R-j),$$

ここで $r = |R|$ である．

証明．命題 1 の証明と同様にすればよい．□

これらの性質は，Maschler and Owen (1989) や Hart and Mas-Colell (1996) で言及されている Shapley value が満たす性質，任意の $i \in N$ に対して，

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{n}(v(N) - v(N-i)) + \frac{1}{n}\sum_{j \in N-i} \phi_i(N-j, v),$$

の提携構造が存在するケース，上位プレイヤーが存在するケースへの拡張であるとみなせる．

3　非協力交渉メカニズム

(N, v)を特性関数形ゲームとし，$R \subseteq N$ とする．非協力交渉ゲーム$\Gamma(N, v, R)$を，次のようにプレイヤー数に関して再帰的に定義する．

もし$|N| = 1$であれば，プレイヤー$i \in N$は彼の個人提携値$v(\{i\})$を獲得し，交渉を終えることになる．プレイヤー数が$n - 1$人以下であるようなときには，Γ の定義が与えられていると仮定し，その上でn人のケースを定義する．交渉は3段階に分かれている．この非協力ゲームは，ステップ1が同時手番であることを除いて，すべて完全情報の逐次手番である．

ステップ1 ここではステップ2の提案者が決定される．

$|R| = 1$のとき，$i \in R$が提案者と決まる．次に$|R| \geqq 2$のケースを考える．各$i \in R$は他のすべての$j \in R - i$に対して彼の bid $b_j^i \in \mathbb{R}$ を同時に表明する．全員の bid の結果より，各$i \in R$の net bid B^i が

$$B^i = \sum_{j \in R-i} b_j^i - \sum_{j \in R-i} b_i^j$$

として計算される．結果，$\beta \in argmax_{i \in R} B^i$ が提案者として選ばれる．もしB^iを最大にするプレイヤーが複数存在するようなときには，ランダムに一人が選ばれることになる．次のステップの提案者として選ばれたβだけは，彼の bid を実際に他のプレイヤーにこの時点で支払わなければならない．それゆえ，ステップ1終了時点で，$i \in R - \beta$の利得はb_i^β，βの利得は$-\sum_{j \in R-\beta} b_j^\beta$となる．

ステップ2 ステップ1で定まった提案者をβとする．βは各$i \in N - \beta$に対して利得$y_i \in \mathbb{R}$を提案する．ただし，応答者iは，他の応答者jの提案された利得y_jもわかるとする

ステップ3 提案者β以外のプレイヤーは，予め外生的に定められた順序(例えば名前の順など)にしたがい，順番に提案内容に対して「受諾」か「拒否」のいずれかを選択する．直前のプレイヤーが「受諾」を選択したときのみ，次のプレイヤーの手番が回ってくる．全員が「受諾」を選択したときには，提案は**合意**され，βはy_iを各$i \neq \beta$に支払い，同時に全員による協力の成果$v(N)$を獲得することになる．それゆえ，彼は$v(N) - \sum_{j \in N-\beta} y_j$をさらに獲得することになる．よってステップ1の結果も合わせると，彼の最終的に獲得する利得は，

$$-\sum_{j \in R-\beta} b_j^\beta + v(N) - \sum_{j \in N-\beta} y_j$$

である．その一方で，応答者$i \in R - \beta$が最終的に獲得する利得は，

$$b_i^\beta + y_i$$

となり，応答者$i \in N \setminus R$の利得はy_iとなる．

提案を拒否するプレイヤーが存在するときには，提案は棄却されることになる．このときには，提案者β は交渉テーブルから去り，$v(\{\beta\})$をステップ1の結果に加え交渉を終える．残された$N-\beta$ は，彼らだけで$n-1$ 人の同一の非協力ゲームを行う．この際，上位プレイヤーの集合は$R-\beta$ となる．つまり，彼らは$\Gamma(N-\beta, v, R-\beta)$を行うのである．ただし，$R-\beta=\emptyset$ のケースも存在するので，$\Gamma(N-\beta, v, \emptyset):=\Gamma(N-\beta, v, N-\beta)$とする．彼らの最終利得は，$\Gamma(N-\beta, v, R-\beta)$で獲得する利得に，ステップ1で獲得した bid を足した値である．

$R=N$のとき，$\Gamma(N, v, R)$は Perez-Castrillo and Wettstein (2001) の bidding メカニズムと一致する．それゆえ次の定理が成り立つ．

定理1 (Perez-Castrillo and Wettstein 2001) (N, v)がゼロ単調性を満たすとき，非協力ゲーム$\Gamma(N, v, N)$の任意の部分ゲーム完全均衡点において，各人の獲得する利得は(N, v)の彼の *Shapley value* と一致する．

定理2は，一般の上位集合Rに対して$\Gamma(N, v, R)$の結果がどのようなものとなるのかを教えてくれる．

定理2 $R \subseteq N$とする．(N, v)がゼロ単調性を満たすとき，非協力ゲーム$\Gamma(N, v, R)$の任意の部分ゲーム完全均衡点において，$i \in N$の獲得する利得は$\phi_i^H(N, v, R)$である．

それでは，我々の目的である Coalitional value を遂行できる非協力メカニズムについて説明をする．(N, v, C)を提携構造のある特性関数形ゲームとし，メカニズムを$\Delta(N, v, C)$と表すことにする．Δ は，Γ を一構成要素として内包しており，その交渉の流れもΓ と酷似した構造である．まず bidding ステージを行い提案者を定め，その後，提案応答ステージが行われるのである．Δ とΓの相違点とは，Δ では提携構造が存在するがゆえに，(1) bidding ステージにおいて，各プレイヤーの重み付けをされた net bid をもとにして提案者を選出すること，(2)応答ステージにおいて，あるプレイヤーが提案を拒否した後の交渉の流れが，拒否をしたプレイヤーが提案者と同一のグループに属しているか否かにより異なるということ，の2点である．それでは，メカニズム$\Delta(N, v, C)$を以下で定義しよう．

$C=\{N\}$のとき，プレイヤーたちは$\Gamma(N, v, N)$を行い，交渉を終える．

$|C| \geqq 2$ のときを考える．ここで，$|C|<m$ のときのΔ は定義されていると仮定して，$|C|=m$のときの定義を行う．交渉は3段階に分かれおり，基本的な流れはΓ と同じである．

ステップA 各$i \in N$は他のすべての$j \in N-i$に対して彼の bid $b_j^i \in \mathbb{R}$ を全員同時に表明する．

全員の bid の結果より，各$i \in C_k \in C$の重みつき net bid $B^i(w)$が

$$B^i(w)=\sum_{j \in N-i} w_i b_j^i-\sum_{j \in N-i} w_j b_i^j$$

として計算される．ここで，w_iは net bid にかかる重みであり，$i \in C_k$であれば$w_i=1/|C_k|$である．結果，$\beta \in argmax_{i \in N} B^i(w)$が提案者として選ばれる．その後の手順は$\Gamma$ のステップ1と同様である．

ステップ B β は各 $i \in N - \beta$ に対して利得 $y_i \in \mathbb{R}$ を提案する．

ステップ C 提案者 β 以外のプレイヤーは，予め外生的に定められた順序にしたがい，順番に提案内容に対して「受諾」か「拒否」のいずれかを選ぶ．直前のプレイヤーが「受諾」を選択したときのみ，次のプレイヤーの手番が回ってくる．全員が「受諾」を選択したときには，提案は**合意**され，β は y_i を各 $i \neq \beta$ に支払い，同時に全員による協力の成果 $v(N)$を獲得することになる．それゆえ，彼は $v(N) - \Sigma_{j \in N-\beta}\, y_j$ をさらに獲得することになる．よってステップ 1 の結果も合わせると，彼の最終的に獲得する利得は，

$$-\sum_{j \in R-i} b_j^{\beta} + v(N) - \sum_{j \in N-\beta} y_j$$

である．その一方で，応答者 $i \neq \beta$ が最終的に獲得する利得は，

$$b_i^{\beta} + y_i$$

となる．

あるプレイヤーが提案を拒否したときには，提案は**棄却**される．棄却後の交渉の流れは，誰が拒否をしたかに応じて異なる．$C_k \in C$ を提案者 β の属するグループとしよう．もし，$i \in C_k$，つまり提案者と同じグループに属するプレイヤーが提案を拒否したとすると，(a.1)提案者 β は交渉から一人だけで去り，$v(\{\beta\})$をこれまで得ていた利得に加えて交渉を終える．(a.2)提案者以外のプレイヤーは，$C_k - \beta$を上位プレイヤーとして，$\Gamma(N - \beta, v, C_k - \beta)$を行う．

また，$i \in C_h \neq C_k$，つまり提案者と異なるグループに属するプレイヤーが提案を拒否したとすると，(b.i)提案者 β は交渉から一人だけで去り，$v(\{\beta\})$をこれまで得ていた利得に加えて交渉を終える．(b.ii)$C_k - \beta$ は彼らだけでメカニズム$\Gamma(C_k - \beta, v, C_k - \beta)$を行う．(b.iii)$N \setminus C_k$ は同一の交渉を最初から始める．つまり $\Delta(N \setminus C_k, v, C \setminus \{C_k\})$を行う．

次の定理が成立する．

定理 3(N, v, C)提携構造のある特性関数形ゲームとする．(N, v)が厳密なゼロ単調性を満たすとき，非協力ゲーム$\Delta(N, v, C)$の任意の部分ゲーム完全均衡点において，任意の $i \in N$ の獲得する利得は(N, v, C)の *Coalitional value* と一致する．

定理 4(N, v, C)提携構造のある特性関数形ゲームとする．(N, v)がゼロ単調性を満たすとき，非協力ゲーム$\Delta(N, v, C)$にはある部分ゲーム完全均衡点が存在して，任意の$i \in N$の獲得する利得は(N, v, C)の *Coalitional value* と一致する．

次節でこれらの定理の証明を行う前に，二つのメカニズムに共通するステップ 1, A の bidding ステージがいかなる効果を持つのかを理解しておくことは，証明の本質を把握する上で重要である．この点を以下の簡単な例を用いて説明する．

2 人のプレイヤーが金額 $a > 0$ を分配する状況を考える．ゲーム G_1, G_2 はそれぞれプレイヤー 1, 2 が提案者である，最後通牒ゲームであるとする(図 1 参照)．このとき，G_1, G_2 の部分ゲーム完全

均衡点において実現される利得ベクトルはそれぞれ$(a, 0)$,$(0, a)$であることは容易に確認できる．

それでは，G_1, G_2 を行う以前に，どちらが提案者となるか，つまり G_1 と G_2 のどちらを行うのかを，ステップ1と同じような bidding ゲームによって決める状況を考えよう．このような展開形ゲームは，G_1, G_2 をそれぞれの部分ゲーム完全均衡利得により縮約すれば，結局，次のような2人標準形ゲーム$(N, \{S_i, u_i\}_{i \in N})$と同一視できる．

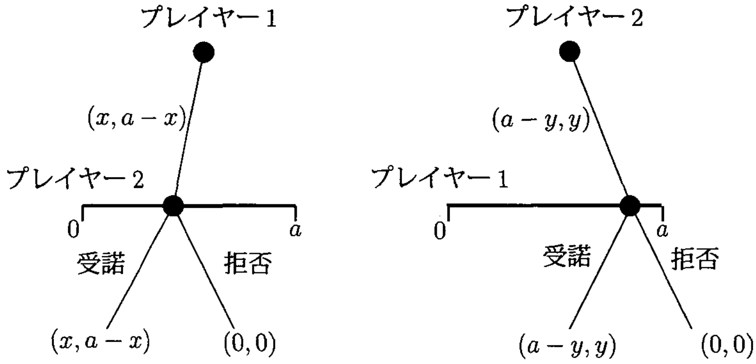

図1：G_1 左．G_2 右．

- $N = \{1, 2\}$
- $S_i = \mathbb{R}$, $i = 1, 2$
- $b = (b^1, b^2) \in S_1 \times S_2$ に対して，

$$u_i(b^1, b^2) = \begin{cases} a - b^i & \text{if } b^i > b^j \\ \frac{1}{2}(a - b^i) + \frac{1}{2}b^j & \text{if } b^i = b^j, \\ b^j & \text{if } b^i < b^j. \end{cases}$$

ではこのゲームのナッシュ均衡を求めてみよう．(b^1, b^2)をナッシュ均衡であるとすると，このとき，$b^1 = b^2$ でなければならない．なぜなら，例えば $b^1 > b^2$ であると仮定すると，プレイヤー1はいつでも新たな bid $b^1 - \epsilon > b^2, \epsilon > 0$ に変えることにより，利得を厳密に改善できるからである．これは(b^1, b^2)がナッシュ均衡であることに矛盾である．逆のケースも同様である．

それゆえ $b^1 = b^2$ である．$b = b^1 = b^2$ とする．このとき，両者ともに確率1/2で $a - b$, 確率1/2で b を獲得する状況にある．ここで，$a - b = b$ が成立しなければならない．つまり，表現を変えれば，ナッシュ均衡においては，自分が提案者に選ばれるのか否かは無差別でなければならないのである．例えば $a - b > b$ であると仮定する．このとき，提案者になった際の利得 $a - b$ は，期待利得 $1/2(a - b) + 1/2b = 1/2a$ よりも厳密に高くなる．プレイヤー i は彼の bid を $b + \epsilon, 0 < \epsilon < \frac{1}{2}a - b$ とすることにより，確実に提案者になれ，そのときの利得は $a - (b + \epsilon) > 1/2a$ となる．それゆえ，プレイヤー i は逸脱することになり，均衡であるという仮定に矛盾することになる．逆のケースも同

様に証明可能である．

それゆえ，ナッシュ均衡であれば，$b^1 = b^2 = 1/2a$ でなければならない．またこのような戦略の組が確かにナッシュ均衡となることも確認可能である．なぜなら，相手が $1/2a$ を選んでいるときに，$b' > 1/2a$ という bid を選択すると，必ず bidding game に勝利する一方で，彼の獲得利得は

$$a - b' < a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$$

となり，利得は減少することがわかる．その一方で，$b' < 1/2a$ を選んだ際には，相手が必ず bidding game に勝利し $1/2a$ を支払い，その後の分配案は 0 なので，利得は $1/2a$ で変わらないことがわかる．よって，相手が $1/2a$ のときに自身も $1/2a$ を選択することは最適反応であることがわかり，それゆえ，両者ともに $b = 1/2a$ を表明する状況はナッシュ均衡である．

この結果は bidding ゲームの有する以下の特徴を描き出す．(1)均衡では，bid(netbid)は等しくなり，各人に提案者となる可能性が存在している.(2)両者に提案者となる可能性があるにもかかわらず，bid による効用移転が存在するために，誰が提案者となるのかは両者の利得に影響を与えない．その結果，(3)均衡利得は，$a - b = b = 1/2a$ となり，a を均等に分配することになり，さらに，(4)これは期待値の意味ではなく，実現値としてこの値を得ることになるのである．

(4)は，ある分配を保証するという遂行問題の目的を達成する上で重要視されるべきである．例えば，先の例で均等分配を達成したいのであれば，単に G_1, G_2 をランダムにやらせれば十分である．しかし，このような設定では，事前的意味では均等分配が達成されているが，事後的に実現されるのは，$(a, 0)$ か $(0, a)$ であり，これにより「均等分配が達成されている」とは必ずしもいえないのである(1)．同様なことは遂行問題でも成立するはずである．社会計画者は，事前的評価として彼の考える望ましい水準に一致することだけでは不十分であると考え，事後的にも必ずその水準に達することを要求するのが通常であろう．その意味において，bidding ゲームはランダムに G_1 と G_2 を行わせるよりも優れているといえるのである．次節の証明でみるように，我々の交渉モデル，Γ，Δ においてもこの点は克服されている．

4 主要定理の証明

定理 2 の証明

定理 1 より，定理 2 の主張が $R = N$ のケースで成立することはすでにわかっているので，$R \subseteq N$, $R \neq \emptyset$ のケースを考える．

証明は，$|R|$ に関する帰納法で行う．ここで $|R| = 0$ のケースは $R = N$ と同一視でき，そのときに定理が成立することは確認できているので，$|R| \neq 0, n$ のケースを考える．$|R| < r$ のときに定理が成立すると仮定し，$|R| = r$ のときにも成立することを示す．

まずステップ 2 から始まる部分ゲームを考える．$\beta \in R$ をステップ 1 により定まった提案者と

(1) Myerson(1981)では，このようなタイミングの問題を社会的選択理論の分野で考察している．

する．このとき以下の Claim が成り立つ．

Claim 1：提案者が β であるようなステップ 2 から始まる部分ゲームのすべての部分ゲーム完全均衡点において，プレイヤーが追加的に獲得する利得(つまり bid の授受を無視した利得)は，β は $v(N)-v(N-\beta)$ であり，それ以外の $i\in N-\beta$ は $\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ である．

帰納法の仮定より，各 $i\in N-\beta$ は提案を拒否することにより $\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ を確保することが可能である．それゆえ，$y_i<\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ となるような i が存在するような β の提案は，必ずあるプレイヤーによって拒否される．その一方で，すべての $i\in R-\beta$ に対して $y_i>\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ を満たす提案は必ず合意される．以下でこの点を示す．

最後に応答するプレイヤーを i_r とする．すると，彼の手番がまわってきた段階で，他の応答者は全員受諾しているので，彼が受諾すれば提案は合意され，拒否すれば提案は棄却される．それゆえ，$y_{i_r}>\phi_{i_r}^H(N-\beta, v, R-\beta)$ を満たすような提案であれば，受諾するのが合理的対応である．次に，最後から二番目に応答するプレイヤー i_{r-1} について考えよう．すると，彼が受諾した後に i_r も受諾して提案が合意されることがわかるので，$y_{i_{r-1}}>\phi_{i_{r-1}}^H(N-\beta, v, R-\beta)$ であれば，i_{r-1} にとって提案を受諾することが合理的であることがわかる．それゆえ，$y_{i_r}>\phi_{i_r}^H(N-\beta, v, R-\beta)$ が成り立つときには，i_{r-1} は $y_{i_{r-1}}>\phi_{i_{r-1}}^H(N-\beta, v, R-\beta)$ という提案を受諾することがわかる．同様の議論を繰り返すことにより，すべての $i\in R-\beta$ に対して $y_i>\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ を満たす提案は必ず合意される．

(N, v) はゼロ単調性を満たすので，$v(N)-v(N-\beta)\geqq v(\{\beta\})$ が成り立つ．では，まず不等号が厳密に成立するケースを考えよう．このとき，部分ゲーム完全均衡において，β の提案が拒否されるような状況が存在しないことが確認できる．なぜなら，

$$v(N)-\sum_{i\in N-\beta}\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)=v(N)-v(N-\beta)>v(\{\beta\})$$

より，$\epsilon=v(N)-v(N-\beta)-v(\{\beta\})>0$ として，任意の $i\in R-\beta$ に対して $y_i(\epsilon)=\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)+\epsilon/|R|$ という提案 $y(\epsilon)$ をすることにより，必ず提案は合意され，そのときの β の獲得する利得は，$v(\{\beta\})+\epsilon/|R|(>v(\{\beta\}))$ となるからである．それゆえ，β は拒否されるような分配案から分配案を $y(\epsilon)$ に変えることにより必ず利得を改善できる．また，ある応答者 i に対して $y_i>\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ となる提案をすることもない．なぜなら，$y_i>y'_i>\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ を満たす y'_i に提案内容を変更することにより，必ず β の利得は改善するからである．以上より，部分ゲーム完全均衡点において，β は，$i\in R-\beta$ に対して $y_i=\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ という提案を行い，応答者はそれを受諾することがわかる．

$v(N)-v(N-\beta)>v(\{\beta\})$ のときには，以上の議論から部分ゲーム完全均衡パス上では，β は，任意の $i\in R-\beta$ に対して $y_i=\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ という提案を行い，他の応答者たちはそれを受諾していることがわかる．実際，提案者がそのような提案を行い，応答者 i は $y_i\geqq\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ なら受諾，$y_i<\phi_i^H(N-\beta, v, R-\beta)$ なら拒否，という戦略の組は部分ゲーム完全均衡

である．また，β がそのような提案を行い，応答者がそれを拒否するような状況は，β に提案内容を $y(\epsilon)$へと変更させるインセンティブを与えることになり，部分ゲーム完全均衡点とはならないのである．

次に $v(N) - v(N - \beta) = v(\{\beta\})$のときを考えよう．このときには，上記の戦略の組のほかに，提案が棄却されるような部分ゲーム完全均衡も存在している．しかし，どちらの均衡においても，均衡利得は Claim 1 のとおりである．

Claim 2：ステップ 1 から始まるゲームにおいて，任意の部分ゲーム完全均衡点で，任意の $i \in R$ について $B^i = 0$ が成り立つ．

$\Omega := argmax\{B^i : i \in R\}$ とする．もし $\Omega = R$ とすると，$\Sigma_{i \in R} B^i = 0$ より Claim2 は成立する．それゆえ $\Omega \neq R$ のケースを考える．$\Omega \neq \emptyset$ なので，適当に $i \in \Omega$ と $j \in R \setminus \Omega$ を選ぶことができる．$\delta > 0$ として，i の bid c^i を次のように定義する．

$$c_k^i = \begin{cases} \frac{\delta}{|\Omega|} + b_k^i & \text{if } k \in \Omega - i \\ -\delta + b_k^i & \text{if } k = j \\ b_k^i & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，$k \in \Omega - i$ の net bid は $B^k - \frac{\delta}{|\Omega|}$ となり，j の net bid は $B^j + \delta$ であり，i の net bid は

$$B^i - \delta + \frac{\delta(|\Omega| - 1)}{|\Omega|} = B^i - \frac{\delta}{|\Omega|}.$$

となる．その他のプレイヤーの net bid は変わらない．任意の $k \in N \setminus \Omega$ に対して $B^i > B^k$ なので，δ が十分に小さければ，以下の不等式が成立する．

$$B^i - \frac{\delta}{|\Omega|} > B^k \ \forall k \in (R \setminus \Omega) - j,$$

$$B^i - \frac{\delta}{|\Omega|} > B^j + \delta.$$

それゆえ，プレイヤー i は Ω を変更することなく total bid $\Sigma_{k \in R - i} b_k^i$ を δ だけ減少させることができる．これにより，i は期待効用を厳密に大きくすることができるので，このような状況は均衡ではない．

Claim 3：ステップ 1 から始まるゲームを考える．任意の部分ゲーム完全均衡点において，誰がステップ 2 の提案者となっても，最終的な利得には影響しない．

Claim 2 より，すべての $i \in R$ に対して B^i が等しいことがわかる．例えば，ある $i \in R$ が提案者となること厳密に好むのであれば，つまり，全員が等しく提案者となる可能性がある状態での利

得の期待値よりも，彼が提案者となる事象が実現した事後的な実現値のほうが大きいのであれば，彼は bid を少しだけ増加させることにより利得を改善することができる．

その一方で，$i \in R$ が提案者は $j \in R$ であることを厳密に好むのであれば，彼は j への bid b^i_j を下げることにより，j を確実に提案者とすることが可能であり，それゆえ利得を改善することができる．均衡において，プレイヤーがそのような行動をとらないという事実は，均衡では誰が提案者となるかは利得に影響しないことを意味する．

Claim 4：任意の部分ゲーム完全均衡点において，$i \in N$ の利得は $\phi^H_i(N, v, R)$ と一致する．

以下の議論では，後の定理 3 の証明を見据え，net bid が重みつき net bid として計算されているとして，式展開を行う．重み $w \in \mathbb{R}$ は，ここでは任意の $i \in R$ に対して $w_i = 1$ である．また u^i_j を $i \in R$ が提案者となったときに $j \in R$ がステップ 2 以降で獲得する利得，つまり最終利得から bid の授受を差し引いた値，を表す．

Claim 3 より，$i \in R$ の最終利得は，$i \in R$ が提案者として選ばれても $j \in R - i$ が選ばれても変わらないので，

$$b^j_i + u^j_i = -\sum_{k \in R-i} b^i_k + u^i_i.$$

Claim 2 より $\Sigma_{k \in R-i} b^i_k = \Sigma_{k \in R-i} (w_k/w_i) b^k_i$ である．また Claim 3 より，$b^j_i + u^j_i = b^k_i + u^k_i$(ここで $k \neq i, j$)が成り立つ．それゆえ，

$$\begin{aligned}
b^j_i + u^j_i &= -\sum_{k \in R-i} b^i_k + u^i_i \\
&= -\sum_{k \in R-i} (w_k/w_i)\, b^k_i + u^i_i \\
&= -\sum_{k \in R-i} (w_k/w_i)\, (b^j_i + u^j_i - u^k_i) + u^i_i \\
&= -\Big(\sum_{k \in R-i} (w_k/w_i)\Big) b^j_i - \Big(\sum_{k \in R \setminus \{i,j\}} (w_k/w_i)\Big) u^j_i + \sum_{k \in R \setminus \{i,j\}} (w_k/w_i)\, u^k_i + u^i_i.
\end{aligned}$$

最後の式の第一項を最初の式に移項し，最初の式の u^j_i を最後の式に移項すれば，

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k \in R} (w_k/w_i)\Big) b^j_i &= -\Big(\sum_{k \in R-j} (w_k/w_i)\Big) u^j_i + \sum_{k \in R-j} (w_k/w_i)\, u^k_i \\
&= -\Big(\sum_{k \in R} (w_k/w_i)\Big) u^j_i + \sum_{k \in R} (w_k/w_i)\, u^k_i
\end{aligned}$$

となる．これより，$i \in R$ の均衡利得を p^i とすれば，

$$p^i := b^j_i + u^j_i = \sum_{k \in R} \frac{w_k}{\sum_{h \in R} w_h} u^k_i, \tag{1}$$

を得る．

ここで任意の $k \in R$ に対して $w_k = 1$ である．さらに Claim 1 より任意の $k \in N - i$ に対して $u_i^k = \phi_i^H(N - k, v, R - k)$ であり，$u_i^i = v(N) - v(N - i)$ である．よって，

$$p^i = \frac{1}{r}(v(N) - v(N-i)) + \frac{1}{r}\sum_{k \in R-i} \phi_i^H(N-k, v, R-k) = \phi_i^H(N, v, R)$$

となる．最後の等式には命題 2 を用いた．

また Claim 1 より，$i \in N \setminus R$ の最終利得は，β が提案者であるとすると $\phi_i^H(N - \beta, v, R - \beta)$ であるが，これは ϕ^H の定義より $\phi_i^H(N, v, R)$ と等しい．

それでは最後に，実際にこれらが部分ゲーム完全均衡となっていることを確認する．ステップ 2 以降の部分ゲーム完全均衡は Claim 1 の証明より明らかにされているので，ステップ 1 について考える．式(1)より，任意の $i \in R$ に対して，任意の $j \in R - i$ について

$$b_j^i = \phi_j^H(N, v, R) - \phi_j^H(N - i, v, R - i),$$

という提案をしているとする．このとき，まず $B^i = 0$ となることを示す．以下では，簡略化のため，特性関数 v を省略することにする．

$$\begin{aligned}
B^i &= \sum_{j \in R-i} (\phi_j^H(N, R) - \phi_j^H(N-i, R-i)) - \sum_{j \in R-i} (\phi_i^H(N, R) - \phi_i^H(N-j, R-j)) \\
&= v(N) - v(N \setminus R) - \phi_i^H(N, R) - (v(N-i) - v(N \setminus R)) \\
&\qquad - \sum_{j \in R-i} \phi_i^H(N, R) + \sum_{j \in R-i} \phi_i^H(N-j, R-j) \\
&= v(N) - v(N-i) + \sum_{j \in R-i} \phi_i^H(N-j, R-j) - \phi_i^H(N, R) - \sum_{j \in R-i} \phi_i^H(N, R) \\
&= r\phi_i^H(N, R) - \phi_i^H(N, R) - (r-1)\phi_i^H(N, R) = 0.
\end{aligned}$$

ここで，三行目から四行目への変換において，命題 2 を用いた．よって $B^i = 0$ である．

よって，このときすべての $i \in R$ が提案者となる可能性が存在し，i が提案者となったときの i の利得は，

$$- \sum_{j \in N-i} (\phi_j^H(N, v, R) - \phi_j^H(N-i, v, R-i)) + v(N) - \sum_{j \in N-i} \phi_j^H(N-i, v, R-i)$$
$$= \phi_i^H(N, v, R),$$

j が提案者となったときの i の利得は，

$$\phi_i^H(N, v, R) - \phi_i^H(N - j, v, R - j) + \phi_i^H(N - j, v, R - j) = \phi_i^H(N, v, R)$$

となる．

次に上記のような bid $b^i=(b^i_j)$ が実際に均衡となることを示す．$i \in R$ の任意の bid c^i を

$$c^i_j = b^i_j + a_j$$

として表現しよう．i 以外プレイヤー j が b^j を bid しているときに，i が自身が提案者とならないような bid を選択することは，i の利得を変化させることはない．その一方で，i が提案者となりうる bid をしているとすると，それは任意の $k \in R-i$ について以下の条件が成立する必要がある．

$$B^i = \sum_{j\in R-i} b^i_j + \sum_{j\in R-i} a_j - \sum_{j\in R-i} b^j_i = \sum_{j\in R-i} a_j \geq B^k = \sum_{j\in R-i} b^k_j - \sum_{j\in R-i} b^j_k - a_k = -a_k$$

ここで，$\Sigma_{j\in R-i}\, a_j \leqq 0$ と仮定すると，上記不等式より，任意の $k \in R-i$ について $-a_k \leqq \Sigma_{j\in R-i}\, a_j \leqq 0$，つまり $a_k \geqq 0$ となり，これは任意の $j \in R-i$ について $a_j=0$ を意味する．当然このときには $c^i=b^i$ をである．また，$\Sigma_{j\in R-i}\, a_j > 0$ が成立しているときには，i が提案者となった際に獲得する利得が，

$$\phi^H_i(N,v,R) - \sum_{j\in R-i} a_j < \phi^H_i(N,v,R)$$

となるので，このような提案は確実に i の利得を減少させることがわかる．以上より，すべての i が b^i を選択する状況はナッシュ均衡である．　□

定理 3 の証明

$|C|$ に関する帰納法で証明を行う．$|C|=1$ のとき，$\Delta(N,v,C)$ は $\Gamma(N,v,N)$ と一致し，$\psi(N,v,C)=\phi(N,v)=\phi^H(N,v,N)$ となることと定理 2 より，定理 3 の主張は成り立つ．

$|C|<m$ のとき定理が成立していると仮定して，$|C|=m$, $C=\{C_1,\ldots,C_m\}$ のケースで定理が成り立つことを示す．

Claim a：提案者が $\beta \in C_k \in C$ であるようなステップ B から始まる部分ゲームにおいて，すべての部分ゲーム完全均衡点でプレイヤーが追加的に獲得する利得(つまり bid の授受を無視した利得)は，β は $v(N)-v(N-\beta)$ であり，$i \in C_k-\beta$ は $\phi^H_i(N-\beta, v, C_k-\beta)$ であり，$i \in N\setminus C_k$ は $\psi_i(N\setminus C_k, v, C\setminus\{C_k\})$ である．

プレイヤー $i \in C_k-\beta$ が拒否した後の彼の利得は，定理 2 より $\phi^H_i(N-\beta, v, C_k-\beta)$ であり，さらにプレイヤー $i \in N\setminus C_k$ が拒否した後に彼の得られる利得は，帰納法の仮定より $\psi_i(N\setminus C_k, v, C\setminus\{C_k\})$ である．また，

$$\sum_{i\in C_k-\beta} \phi^H_i(N-\beta,v,C_k-\beta) + \sum_{i\in N\setminus C_k} \psi_i(N\setminus C_k, v, \mathcal{C}\setminus\{C_k\})$$
$$= v(N-\beta) - v(N\setminus C_k) + v(N\setminus C_k) = v(N-\beta),$$

が成り立つ．

特性関数は厳密な単調性を満足するので, $\epsilon := v(N) - v(N-\beta) - v(\{\beta\}) > 0$ が成り立つ. それゆえ, 定理 2 の証明の Claim 1 と同様の議論を行うことにより, 提案者が $i \in C_k - \beta$ に対しては $y_i = \phi^H_i(N-\beta, v, C_k - \beta)$, $i \in N \setminus C_k$ に対しては $y_i = \psi_i(N\setminus C_k, v, C\setminus\{C_k\})$ というような提案を行い, 応答者がそれを受諾するような状態が唯一の均衡となる.

Claim b：ステップ A から始まるゲームにおいて, 任意の部分ゲーム完全均衡点で, 任意の $i \in N$ に対して $B^i(w) = 0$ が成り立つ.

Claim c：ステップ A から始まるゲームにおいて, 任意の部分ゲーム完全均衡点で, 誰がステップ B の提案者となっても, 最終的な利得には影響しない.

Claim b, c は, 定理 2 の Claim 2, 3 とほぼ同様に証明可能なので省略する.

Claim d：任意の部分ゲーム完全均衡点において, $i \in N$ の利得は $\psi_i(N, v, C)$ と一致する.

提案者が j であるようなステップ 2 以降の部分ゲームでプレイヤー $i \in C_k$ が獲得できる利得を u^j_i とすると, Claim a より,

$$u_i^j = \begin{cases} v(N) - v(N-i) & \text{if } i = j \\ \phi_i^H(N-j, v, C_k - j) & \text{if } i \neq j, j \in C_k \\ \psi_i(N\setminus C_h, v, \mathcal{C}\setminus\{C_j\}) & j \in C_h \neq C_k \end{cases}$$

となる. Claim 4 の証明中の式変換は, ここでも有効であるので, 式(1)より, $i \in C_k \in C$ の均衡利得 p^i は,

$$\begin{aligned} p^i &= \sum_{j\in N} \frac{w_j}{\sum_{l\in N} w_l} u_i^j \\ &= \frac{w_i}{\sum_{l\in N} w_l}(v(N) - v(N-i)) + \sum_{j\in C_k - i} \frac{w_k}{\sum_{l\in N} w_l} \phi_i^H(N-j, v, C_k - j) \\ &\quad + \sum_{h\in M, h\neq k} \sum_{j\in C_h} \frac{w_j}{\sum_{l\in N} w_l} \psi_i(N\setminus C_h, v, \mathcal{C}\setminus\{C_h\}) \end{aligned}$$

となる. ただし, $M = \{1, ..., m\}$ は提携構造の要素の添え字の集合である. ここで, $i \in C_k$ に対して $w_i = 1/|C_k|$ なので, 命題 1 より,

$$p^i = \psi_i(N, v, C)$$

となることがわかる. また, 均衡における $i \in C_k$ の bid $b^i = (b^i_j)_{j\in N-i}$ は,

$$b_j^i = \begin{cases} \psi_j(N, v, \mathcal{C}) - \phi_j^H(N-i, v, C_k - i) & \text{if } j \in C_k \\ \psi_j(N, v, \mathcal{C}) - \psi_j(N\setminus C_h, v, \mathcal{C}\setminus\{C_h\}) & \text{if } j \in C_h \neq C_k \end{cases}$$

となる.

また，このような bid が実際に均衡となることは，定理 2 の証明と同様にすれば確認可能であるので省略する．□

定理 4 の証明

定理 3 の証明より明らかである．□

5 結論

本稿では，Owen の Coalitional value を部分ゲーム完全均衡点で達成する非交渉メカニズムが考察された．メカニズムの特徴は，Vidal-Puga and Bergantinos(2003)や Kamijo(2006a)で考えられたような二段階型の bidding メカニズムではなく，応答者の拒否後に行われる交渉を，応答者が提案者と同一のグループに属するか否かにより異なるようしたものである．このメカニズムでは，$v(N)$を達成する瞬間まで全員が交渉のテーブルに残っており，Vidal-Puga and Bergantinos(2003)で想定されたような資源取引のように協力を生み出す要素が取引できるという限定された状況とは一線を画している．我々の定義した非協力交渉ゲーム Δ が，同じく Coalitional value を達成する Vidal-Puga and Bergantinos(2003)のモデルより優れているもう一点は，遂行可能な特性関数の範囲が Δ のほうが Vidal-Puga and Bergantinos(2003)のモデルよりも広いという点である．彼らのモデルでは，すべての部分ゲーム完全均衡点で Coalitional value を達成できるのは，特性関数が厳密に優加法的であるケースに限定されていたのに対して，我々のモデルでは，特性関数が厳密なゼロ単調性を満たせば，すべての部分ゲーム完全均衡点で Coalitional value が達成される．

本研究の今後の拡張の方向としては，bidding ゲームで用いられた重み w や応答者の拒否の後に行われる交渉形態を修正することにより，Levy and McLean(1989)の重みつき Coalitional value や，Vidal-Puga(2005a)，Kamijo(2006b)で分析された新たな解を遂行するメカニズムを探ることである．

参考文献

Aumann, R. J., and J. H. Dreze(1974)："Cooperative games with coalition structures,"*International Journal of Game Theory*, 3, 217-237.

Calvo, E., J. J. Lasaga, and E. Winter(1996)："The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation," *Mathematical Social Sciences*, 31, 171-182.

Dasgupta, A., and Y. S. Chiu(1998)："On implementation via demand commitment games," *International Journal of Game Theory*, 27, 161-189.

Evans, R. A.(1996)："Value, consistency and random coalition formation," *Games and Economic Behavior*, 12, 68-80.

Gul, F.(1989)："Bargaining foundations of Shapley value," *Econometrica*, 57, 81-95.

Hamiache, G.(2000)："The Owen value values friendship," *International Journal of Game Theory*, 29, 517-532.

Hart, S., and M. Kurz(1983)："Endogenous formation of coalitions," *Econometrica*, 51, 1047-1064.

Hart, S., and A. Mas-Colell(1992) : "A model of n-person noncooperative bargaining,"Discussion Paper 7, Harvard Institute of Economic Research, Harverd University.

——(1996) : "Bargaining and value," *Econometrica*, 64, 357-380.

Kamijo, Y.(2006a) : "Implementation of the Shapley value of games with coalition structures," *The Waseda Journal of Political Science and Economics*, 363, 105-125.

——(2006b) : "Potential, coalition formation, and coalition structure," Discussion paper, 21COE-GLOPE, Waseda University.

Levy, A., and R. P. McLean(1989) : "Weighted coalition structure values," *Games and Economic Behavior*, 1, 234-249.

Maschler, M., and G. Owen(1989) : "The consistent Shapley value for hyperplane games," *International Journal of Game Theory*, 18, 389-407.

Myerson, R. B.(1981) : "Utilitarianism, egalitarianism, and the timing effect in social choice problems," *Econometrica*, 49, 883-897.

Nash, J. F.(1950) : "The bargaining problem," *Econometrica*, 18, 155-162.

——(1953) : "Two person cooperative games," *Econometrica*, 21, 128-1240.

Owen, G.(1977) : "Values of games with a priori unions," in *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, ed. by R. Henn, and O. Moeschlin, pp. 76-88. Springer-Verlag, Berlin.

Perez-Castrillo, D., and D. Wettstein(2001) : "Bidding for the surplus : A non-cooperative approach to the Shapley value," *Journal of Economic Theory*, 100, 274-294.

Shapley, L. S.(1953) : "A value for n-person game," in *Contributions to the Theory of Games*, ed. by H.Kuhn, and A.Tucker, vol. 2, pp. 307-317. Princeton University Press,Princeton, NJ.

Vidal-Puga, J. J.(2005a) : "The Harsanyi paradox and the "right to talk" in bargaining among coalitions," Working Paper.

——(2005b) : "Implementation of the levels structure value," *Annals of Operations Researach*, 137, 191-209.

Vidal-Puga, J. J., and G. Bergantinos(2003) : "An implementation of the Owen value," *Games and Economic Behavior*, 44, 412-427.

Winter, E.(1989) : "A value for cooperative games with levels structures of cooperation,"*International Journal of Game Theory*, 18, 227-240.

——(1992) : "The consistency and potential for values of games with coalition structure," *Games and Economic Behavior*, 4, 132-144.

——(1994) : "The demand commitment bargaining and snowballing cooperation,"*Economic Theory*, 4, 255-273.

abstract

In this paper, we propose a non-cooperative bargaining model which implements Owen's coalitional value in any subgame perfect equilibria. In our construction, we only require the underlyingcharacteristic function form game being strictly zero-monotonic, not strictly superadditive.