

Graduate School of Advanced Science and Engineering
Waseda University

博士論文概要
Doctoral Thesis Synopsis

論文題目
Thesis Theme

A study on the qualitative theory of solutions for some parabolic equations with
nonlinear boundary conditions

非線形境界条件を伴う放物型方程式の解の定性理論の研究

申請者
(Applicant Name)
Kosuke KITA
喜多 航佑

Department of Pure and Applied Physics, Research on Mathematical Physics

October, 2021

非線形放物型偏微分方程式は、物理学や化学における非線形現象を記述する数理モデルとしてだけでなく、人口動態モデルや動物の表皮のパターン形成など多種多様な分野における数理モデルとして広く用いられている数理物理学における重要な研究対象の一つである。実際の非線形現象の数理モデルを構築する際には、現象が起こっている領域内における非線形性の定式化が最重要課題であることは論を俟たないが、如何に適切な境界条件を課すかということも重要な視点であることは、あまり広く認識されてこなかった。

例えば、熱流に関する非線形放物型方程式の従来の研究では、ディリクレ型やノイマン型といった線形の境界条件下での考察がほとんどであったが、これらの線形境界条件を実現させる為には熱流に対する境界における強い制御の存在が必須条件となる。しかしながら、原子炉の様な非常に大きな系においては、そのような境界における熱流の制御は困難である。一方で、境界における熱流の制御が無い系に対しては、黒体輻射という理想的な条件下ではあるものの、ステファン-ボルツマンの法則（物体表面から放射される熱エネルギーは物体の内部と外部の温度の4乗の差に比例する）が良く知られている。すなわちこの事実は、境界における熱流の制御が存在しない場合には、その境界条件は本質的に非線形となるということを提示している。

このような観点から、非線形境界条件を課した放物型方程式の数学的な研究は重要な研究対象であったといえるが、これに対する数学的な研究は、高村幸男の非線形半群理論(1967)に基づく H. Brézis (1971) による劣微分作用素論の登場まで待たねばならなかった。しかしながら、この理論はエネルギー消散系に対してのみ有効であり、解の有限時間爆発現象を包含するような、摂動項付きの非線形放物型方程式（藤田型の非線形放物型方程式）には適用できなかった。その後、藤田型の非線形放物型方程式への応用を目指した、Ôtani (1982, 2007) による劣微分作用素に対する非単調摂動理論が提出され、解の存在に対する抽象論の整備は進んでいたが、非線形境界条件を有する非線形放物型方程式への応用の言及はなかった。本論文は、これまでの研究で触れてこられなかった、非線形境界条件下の摂動項付きの非線形熱方程式に対する可解性という基本的問題をはじめとし、その解の定性的な性質などの重要な未解決問題に関して論じたものである。

本論文は二部全十章から構成され、それらの概要は以下の通りである。

第一部は非線形境界条件をもつ非線形放物型方程式に関する諸問題を扱っている。第一部の第一章では次章以降で用いられる記法の定義及び数学的な基本事項が述べられている。

第二章以降では以下の非線形境界条件を伴う藤田型の非線形熱方程式について考察されている。

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t > 0, x \in \Omega, \\ -\partial_\nu u \in \beta(u), & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで、 $p > 2$, Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ \mathbb{R}^N 内の有界領域、 ν は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである。また、境界条件に現れる β は \mathbb{R} 上の極大単調 (多価) 作用素である。非線形項 β の典型例として、前述のステファン-ボルツマンの法則に対応する

q 乗の冪乗型 ($\beta(r) = |r|^{q-2}r$, $q > 1$) が挙げられる.

第二章では, 冪乗型の非線形境界条件下での初期値境界値問題 (P) の局所可解性が述べられている. (P) に対しては境界条件の非線形性が障害となり, デュハメルの原理を用いて微分方程式を積分方程式に変換し不動点定理を適用するといった半線形の問題でよく用いられる一連の手法が適用できない. ここでは, 初期値がラプラシアンに付随する汎函数の定義域に属する場合に, Ôtani (1982) による劣微分作用素を主要項とする非単調摂動項を含む非線形発展方程式の結果を適用することで $L^2(\Omega)$ (自乗可積分函数の成す空間) における (P) の強解の存在が示されている. また, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ (有界函数の成す空間) に対して, Ôtani (2007) の手法に則り, 非線形項をカットオフした補助問題を考察し, その解のアプリオリ評価を用いて時空に関して有界な強解を得ている.

第三章では冪乗型の非線形境界条件を課した (P) の時間大域解の漸近挙動について考察されている. 前述の通り (P) に対しては積分方程式を通した解析が困難である為, Cazenave-Lions (1984) や Quittner (1999) で用いられている斉次ディリクレ境界条件下での (P) の解析手法が適用できない. ここでは, 方程式に付随するエネルギー構造に着目し, (P) を劣微分の差の項を持つ発展方程式に帰着させ, Ishii (1977) や Ôtani (1981) の抽象論を汎函数の斉次性を仮定しない理論に拡張することで, 解が時間大域的に存在するならば適当なノルムにおいて解が時間一様に有界であることが示されている.

第四章では (P) を含むような一般の二階楕円型作用素を主要部を持つ放物型方程式系の解に対する比較定理とその応用が示されている. 比較定理は反応拡散方程式に対する数学解析の強力な道具の一つとして広く知られているが, 従来の比較定理では境界条件の形が固定されているという制約があった. 第四章で示される比較定理では異なる境界条件を持つ方程式の解を比較可能にしており, 特に線形境界条件と非線形境界条件の比較が可能になっている. この比較定理の応用として (P) の解の爆発について議論が為されている. 特に, 非線形境界条件下での (P) の正值解の極大存在時間が, 同一の初期値に対する斉次ディリクレ境界条件・斉次ノイマン境界条件下での (P) の正值解の極大存在時間によってそれぞれ上と下から評価されるいう重要な結果を得ている. これにより (P) の有限時間爆発解の存在について, 従来の Rodríguez-Tajdine (2001) における議論よりも遥かに簡潔な証明を与えている.

第五章では (P) の正值解の爆発に関する臨界現象について議論されている. 全空間の場合, 藤田方程式では藤田指数と呼ばれる $p_c = 2 + \frac{2}{N}$ が p 乗冪の閾値となり, $p > p_c$ のときは小さな初期値に対して藤田方程式は時間大域解を持ち, $p \leq p_c$ の場合は全ての正值解が有限時間で爆発することが Fujita (1966) や Hayakawa (1973) などにより知られている. 一方で有界領域の場合, 斉次ディリクレ境界条件を課した (P) の正值解は小さな初期値に対して時間大域的に存在し, 斉次ノイマン境界条件を課した (P) の正值解は必ず有限時間で爆発する, という結果が知られている. ここでは, $\alpha = 0, +\infty$ でそれぞれ斉次ディリクレ境界条件・斉次ノイマン境界条件に対応するような境界条件として, 非線形項の族 (β^α ; $\alpha > 0$) を導入し有界領域の場合の藤田指数の臨界現象のアナロジーとして (P) において $\beta = \beta^\alpha$ とした方程式 $(P)_\alpha$ と書く) の正值解に対して次の結果が得られている. 即ち, ある $\alpha_c > 0$ が存在し, $\alpha < \alpha_c$ ならば $(P)_\alpha$ は小さな

初期値に対して時間大域解を持ち、 $\alpha > \alpha_c$ ならば $(P)_\alpha$ の解は有限時間で爆発する、ということが示されている。この定理は適当な優解・劣解を構成し、第四章で示された比較定理を適用することによって証明される。

第六章では再び q 乗の冪乗型 ($\beta(r) = |r|^{q-2}r, q > 1$) の非線形境界条件を伴う (P) が考察されており、ここでは境界条件の非線形項のパラメーター $q > 1$ に対する解の連続依存性が示されている。特に q の極限としては $q \rightarrow 1$ 及び $q \rightarrow +\infty$ の場合も議論されており、第五章で導入された β^α はこの $q \rightarrow +\infty$ の極限(を適当にスケール変換したもの)として自然に現れることが示されている。証明は (P) を $L^2(\Omega)$ の発展方程式に帰着させて行われる。先ず、Mosco 収束する汎函数の劣微分を主要部を持つ発展方程式の解の収束についての Attouch (1978) の結果を、リプシッツ摂動項付きの方程式に拡張した結果が証明されている。次に、 q に依存して変わる非線形境界条件下でのラプラシアンに付随する汎函数が Mosco 収束することを示し、以上の結果を組み合わせることで (P) の解の q に関する連続依存性を得ている。

第二部では以下の反応拡散系について考察されており、第七章では以後の解析に必要な数学的な道具が纏められている。

$$(NR) \quad \begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta u_1 = u_1 u_2 - b u_1, & t > 0, x \in \Omega, \\ \partial_t u_2 - \Delta u_2 = a u_1, & t > 0, x \in \Omega, \\ \partial_\nu u_1 + \alpha u_1 = \partial_\nu u_2 + \beta |u_2|^{\gamma-2} u_2 = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} + \boxed{\text{初期条件}}$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域であり、 $a, b > 0$ である。境界条件に現れるパラメーターは $\alpha \geq 0, \beta > 0$ かつ $\gamma \geq 2$ である。反応拡散系 (NR) は Kastenberg-Chambré (1968) によって導入された原子炉内の熱と中性子の拡散を記述するモデルであり、Gu-Wang (1994,1996) により線形の境界条件下での数学的な解析が為されている。本論文では前述の観点から、より現実に即した u_2 に関する非線形境界条件下での解析を行っている。

第八章では (NR) の定常問題について考察されており、正值定常解の存在とある種の一意性が示されている。特に、定常解の存在は Krasnosel'skii (1960) による不動点定理を適用することで示されるが、その際に必要となる解の L^∞ 評価について、境界条件が真に非線形 ($\gamma > 2$) となるとき、その強い消散性を巧みに利用することで $\gamma = 2$ の場合に必要となっていた技術的な仮定を取り払うことに成功している。

第九章では (NR) の非定常問題が議論されている。先ず、有界な初期値に対する局所可解性が第一部第二章と同様な議論により証明されている。さらに、正值定常解が時間大域解と有限時間爆発解を隔てる初期値の閾値となっているという主張が比較定理を用いることで証明されている。さらに、第一部第四章の比較定理の応用として解の爆発に対する初期値の十分条件が与えられている。

第十章においては、 $\gamma = 2$, 即ち、ロバン境界条件の場合に時間大域解の $L^\infty(\Omega)$ ノルムが時間に関して一様に有界となることが示されている。斉次ディリクレ境界条件の場合は Quittner (1998) によって空間2次元の場合にのみ同様の結果が示されているが、ここではロバン境界条件下でのラプラシアンの第一固有値及び対応する固有函数の性質を上手く使うことによって空間2次元の場合だけでなく3次元の場合にも有界性が証明されている。

List of research achievements for application of Doctor of Science, Waseda University

Full Name : 喜多 航佑

seal or signature

Date Submitted(yyyy/mm/dd): 2022/1/12

種別 (By Type)	題名、発表・発行掲載誌名、発表・発行年月、連名者（申請者含む） (theme, journal name, date & year of publication, name of authors inc. yourself)
論文 (査読有)	<p>○1. On a comparison theorem for parabolic equations with nonlinear boundary conditions, to appear in <i>Adv. Nonlinear Anal.</i>, Kita K.; Ôtani M.</p> <p>○2. A bound for global solutions of nonlinear heat equations with nonlinear boundary conditions, to appear in <i>Lib. Math. (N.S.)</i>, Kita K.; Ôtani M.</p> <p>○3. Bounds for global solutions of a reaction diffusion system with the Robin boundary conditions, <i>Differ. Equ. Appl.</i>, 11 (2019), no. 2, 227–242, Kita K.; Ôtani M.</p> <p>○4. On some parabolic systems arising from a nuclear reactor model with nonlinear boundary conditions, <i>Adv. Math. Sci. Appl.</i>, 27 (2018), no. 2, 193–224, Kita K.; Ôtani M.; Sakamoto H.</p>
(査読無)	<p>5. 非線形境界条件を伴う非線形熱方程式の大域解の有界性について、『第41回発展方程式若手セミナー報告集』, 259-264, 2020, 喜多航佑.</p> <p>6. 非線形境界条件に支配される放物型方程式に対する比較定理とその応用について, Hokkaido University technical report series in Mathematics 176, 319-324, 2019, 喜多航佑.</p> <p>7. On some parabolic systems arising from a nuclear reactor model, <i>RIMS Kôkyû roku</i>, Kyoto University, 2090, 42-59, 2018, Kita K.</p> <p>8. The uniform boundedness of global solutions for a reaction diffusion system, 第40回発展方程式若手セミナー報告集, 121-128, 2018, 喜多航佑.</p> <p>9. 原子炉モデルに起因するある反応拡散系について, 第39回発展方程式若手セミナー報告集, 125-134, 2017, 喜多航佑.</p>
講演 (国際会議)	<p>1. Comparison theorem for parabolic equations governed by nonlinear boundary conditions and its applications, International Workshop on Multiphase Flows: Analysis, Modelling and Numerics, オンライン開催, 2020年12月, 喜多航佑; 大谷光春.</p>

List of research achievements for application of Doctor of Science, Waseda University

Full Name : 喜多 航佑

seal or signature

Date Submitted(yyyy/mm/dd): 2022/1/12

種類別 (By Type)	題名、発表・発行掲載誌名、発表・発行年月、連名者（申請者含む） (theme, journal name, date & year of publication, name of authors inc. yourself)
(国内会議)	<p>2. On some parabolic systems arising from a nuclear reactor model with nonlinear boundary conditions, 12th AIMS Conference Series on Dynamical Systems and Differential Equations, 台湾, 2018年7月, 喜多航佑; 大谷光春.</p> <p>3. On some parabolic systems arising from a nuclear reactor model, RIMS研究集会：発展方程式の理論と非線形現象の数学解析, 京都大学, 2017年10月, 喜多航佑; 大谷光春.</p> <p>4. 非線形境界条件を伴う非線形熱方程式に対する臨界現象について, One Day Workshop抽象発展方程式のこれまでとこれから -動的境界条件への応用を見据えて-, 京都教育大学, 2021年1月, 喜多航佑.</p> <p>5. Comparison theorem for parabolic equations governed by nonlinear boundary conditions and its applications, 第7回 Elliptic and Parabolic Zoom Seminar, オンライン開催, 2020年9月, 喜多航佑.</p> <p>6. On some nonlinear heat equations with nonlinear boundary conditions of radiation type, 第9回非線形発展方程式セミナー, 京都教育大学, 2020年5月, 喜多航佑.</p> <p>7. A bound for global solutions of some parabolic equation with nonlinear boundary conditions, 第45回発展方程式研究会, 日本女子大学, 2019年12月, 喜多航佑.</p> <p>8. On some parabolic equations with nonlinear boundary conditions of radiation type, 東北大学OS特別セミナー, 東北大学, 2019年11月, 喜多航佑.</p> <p>9. On the uniform boundedness for global solutions of nonlinear heat equations with nonlinear boundary conditions in bounded domain, 日本数学会2019年度秋季総合分科会, 金沢大学, 2019年9月, 喜多航佑; 大谷光春.</p> <p>10. 非線形境界条件を伴う非線形熱方程式の大域解の有界性について, 第41回発展方程式若手セミナー, 群馬, 2019年8月, 喜多航佑.</p> <p>11. An abstract comparison theorem for parabolic equations governed by nonlinear boundary conditions, 第26回応用解析研究会シンポジウム, 湯河原, 2019年3月, 喜多航佑.</p>

List of research achievements for application of Doctor of Science, Waseda University

Full Name : 喜多 航佑

seal or signature

Date Submitted(yyyy/mm/dd): 2022/1/12

種別 (By Type)	題名、発表・発行掲載誌名、発表・発行年月、連名者（申請者含む） (theme, journal name, date & year of publication, name of authors inc. yourself)
	<p>12. On the comparison theorem for parabolic equations governed by nonlinear boundary conditions, 日本数学会2019年度年会, 東京工業大学, 2019年3月, 喜多航佑; 大谷光春.</p> <p>13. 非線形境界条件に支配される放物型方程式に対する比較定理とその応用について, 第15回数学総合若手研究集会, 北海道大学, 2019年3月, 喜多航佑.</p> <p>14. 非線形境界条件に支配される放物型方程式の初期値境界値問題に対する比較定理とその応用, 第44回発展方程式研究会, 日本女子大学, 2018年12月, 喜多航佑.</p> <p>15. Bounds for global solutions of a reaction diffusion system, 日本数学会2018年度秋季総合分科会, 岡山大学, 2018年9月, 喜多航佑; 大谷光春.</p> <p>16. The uniform boundedness of global solutions for a reaction diffusion system, 第40回発展方程式若手セミナー, 福岡, 2018年9月, 喜多航佑.</p> <p>17. Some threshold property for a reaction diffusion system arising from a nuclear reactor model, 日本数学会2018年度年会, 東京大学, 2018年3月, 喜多航佑; 大谷光春.</p> <p>18. Blow-up solutions for some parabolic systems arising from a nuclear reactor model, 第25回応用解析研究会シンポジウム, 熱海, 2018年3月, 喜多航佑.</p> <p>19. 原子炉モデルに因る或る反応拡散系に対する解の時間大域挙動の閾値に就いて, 第43回発展方程式研究会, 日本女子大学, 2017年12月, 喜多航佑.</p> <p>20. On some elliptic systems arising from a nuclear reactor model, 日本数学会2017年度秋季総合分科会, 山形大学, 2017年9月, 喜多航佑; 大谷光春.</p> <p>21. 原子炉モデルに起因するある反応拡散系について, 第39回発展方程式若手セミナー, 愛知, 2017年9月, 喜多航佑.</p> <p>22. 非線型境界条件を持つある反応拡散系の定常問題, 第24回応用解析研究会シンポジウム, 箱根, 2017年3月, 喜多航佑.</p>