

Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

博士論文概要
Doctoral Dissertation Synopsis

論文題目
Dissertation Title

Direct decompositions of groups of piecewise linear homeomorphisms of the
unit interval

単位閉区間の区分線形同相写像群の直積分解

申請者
(Applicant Name)
Takamichi SATO
佐藤 尚倫

Department of Pure and Applied Mathematics, Research on Mathematical Structures of Materials

January, 2022

Richard Thompson の群 F , T , V は 1965 年に発見され、群の語の問題に否定的な解答を与える有限表示群の構成のために利用された。それ以降、これらの群は、群論のみならず数学の様々な理論の中で自然に出現することが確認されている。例えば、ホモトピー理論や力学系の理論、半群の表示と関連する **diagram groups** の理論などが挙げられる。無限群の研究において、これらの群はいくつかの珍しい性質を持つことが明らかにされてきている。例えば、 T , V は有限表示無限単純群の最初の例である。また、群 F については従順性がいまだ明らかにされておらず、von Neumann の問題「非可換自由群を部分群として含む群は非従順であるが、その逆も正しいか」に対する反例の候補として現在もなお注目されている。

群 F は有限表示群であり、二つの生成元と二つの定義関係式から成る群表示をもつ。この群表示は F の構造や性質を解明する際に役立つが、群 F のいくつかの幾何学的な実現の仕方が発見されて以降、群論の問題を幾何学的な設定に置き換えて解析する手法が多用されている。代表的なものとして、単位閉区間上の区分線形同相写像群のある部分群としての実現がある。厳密には、群 F は単位閉区間上の区分線形な同相写像であり、有限個の二進有理数を除き微分可能で、微分可能な区間上の微分係数は 2 の整数べき乗であるもの全体から成る群として実現される。この表現を用いて、M. Brin, C. Squier らによって様々な興味深い特性が調べられてきた。例えば、群 F は振れのない有限表示群で非可換自由群を部分群としてもたない、 F は単純群ではないが、交換子部分群は無限単純群であるなどの性質をもつ。しかし、群 F の構造や群論的性質は解明というにはほど遠い状況にあり、現在も活発に研究が行われている。

近年、群 F の部分群についての研究も広く行われている。C. Bleak による可解部分群の分類や C. Bleak と B. Wassink による有限指数部分群の構造に関する研究、M. Sapir と G. Golan による無限指数極大部分群に関する研究などが挙げられる。本論文は、主として、群 F の部分群に関する研究に貢献するものであり、特に、有限個の直既約群の直積としての構造をもつ部分群に焦点を当てている。

本論文の構成

本学位論文は以下の章によって構成されている。

第1章 Groups of piecewise linear homeomorphisms

第2章 Geometric description of Schreier graphs of Baumslag-Solitar groups

以下、各章の概要を述べる。

第1章 Groups of piecewise linear homeomorphisms

群 F の部分群に関する研究として G. Golan と M. Sapir が、群 F の単位閉区間への自然な作用のもとでの有限個の実数に関する固定部分群の構造と性質を解明する研究を行った。彼らは、有限個の実数に関する固定部分群に対して、構造として、いくつかの異なる捉え方を提示した。例えば、群 F の交換子部分群有限個の直積と有限階数自由アーベル群との半直積構造としての捉え方や、固定される実数の配列に注目することで得られる直積構造としての捉え方が提示されている。さらには、iterated ascending HNN-extension としての捉え方を用いて、固定部分群同士が同型となるためのある十分条件が述べられた。

この章では、群 F を部分群としてもつ群として、単位閉区間上の向きを保つ区分別形な同相写像であり、有限個の実数を除き微分可能であるもの全体から成るものを扱う。これを $PL_0(I)$ と記す。主結果として、 $PL_0(I)$ の部分群で非可換な直既約群有限個から成る直積に分解されるものは、ある意味で、その分解が一意に定まることを証明している。群論における、分解の一意性に関する古典的な定理として Krull-Remak-Schmidt の定理「群 G が正規部分群について極大条件と極小条件を満たすとき、 G は有限個の直既約群の直積に分解される。また、直積因子の順序と同型性を度外視すれば分解は一意的である。」が知られている。一方で、群 $PL_0(I)$ や群 F の部分群は一般には、Krull-Remak-Schmidt の定理の仮定を満たさない。したがって、上述の主張を Krull-Remak-Schmidt の定理を適用するだけで解明することはできない。群 $PL_0(I)$ における幾何学的な議論を通して、上述の主張は証明される。その際に、 $PL_0(I)$ の可換部分群と非可換部分群の差異を幾何学的に捉えるために部分群の台の成分に対して commutative orbital という概念を導入し議論する。また、主結果の応用として、上述の群 F の固定部分群同士が同型となる必要十分条件を決定している。その際には、固定部分群を直積構造として捉えたときの因子群が直既約群となることを示す必要が生じる。そのために部分群の台の二つの成分それぞれの端点の間の関係として linked endpoints という概念を導入し議論する。上述の主結果はとくに固定部分群同士が非同型であることを示す際に役立っている。

さらに、群 F の固定部分群についての共役性に関する結果についても述べている。Golan と Sapir は、有限個の無限枝をもつ infinite tree-diagrams から成る群を定義し、それが単位閉区間上の自己同相写像群の中に埋蔵されることを示した。また、二つの固定部分群に対して、固定点の実数の配列に関して特定の条件を満たす場合に、その群において共役となることを示した。これらを背景として、Golan と Sapir により定義された群が自然に埋蔵される新たな群を導入し、二つの固定部分群が同型となるときは常に、この群の中で共役となることを示している。

本章の結果は以下の公刊予定論文に基づく。

Sato, T, Direct decompositions of groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval, to appear in International Journal of Algebra and Computation.

第2章 Geometric description of Schreier graphs of Baumslag-Solitar groups

一般に, 有限生成群 G と G を生成する有限対称集合 S と G の部分群 H が与えられたとき, G, S に対する Cayley graph や, G, S, H に対する Schreier coset graph を構築することは難しい. しかし, 適切な Cayley graph や Schreier coset graph を構築することができれば, それらを組み合わせ的あるいは幾何的な観点から利用することで, もとの群や部分群の性質を解明できる可能性がある. 例えば群が与えられたとき, その有限指数部分群に関する群表示を求める際に, Schreier coset graph は有効であることが知られている.

この章では, まず, Schreier graph と Baumslag-Solitar 群について説明を与える. 次に, 実数直線上のアファイン群の部分群として実現される特定の Baumslag-Solitar 群について, その実数直線上への作用のもとでの任意の実数の固定部分群に関する Schreier coset graph を具体的に構築する. 固定部分群が無限指数部分群であり, 直接の構築が困難なため, ラベル付き有向グラフとして同型となる別の Schreier graph を利用する. この Schreier graph の頂点集合は, 各実数に対する, 上述の作用のもとでの軌道であり, その配列を理解することで Schreier graph の構造を述べている. また, 頂点集合が有理数に対する軌道であるような Schreier graphs を利用して, その有理数の固定部分群の構造と生成元を明らかにしている.

さらに, 得られた Schreier graphs をラベル付き有向グラフとして分類している. 特に, 頂点集合が有理数に対する軌道であるような Schreier graphs の, マーク付き, ラベル付き有向グラフとしての分類は, もとの Schreier coset graphs で用いられていた固定部分群の, 群表示に関連する分類に対応していることを示している.

本章の結果は以下の公刊論文に基づく.

Sato, T, Geometric description of Schreier graphs of B-S groups, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 83(2020) no.3 191-209.

List of research achievements for application of Doctor of Science, Waseda University

Full Name : 佐藤 尚倫

seal or signature

Date Submitted(yyyy/mm/dd):

2021/12/20

種類別 (By Type)	題名、発表・発行掲載誌名、 (theme, journal name, date & year of publication, name of authors inc. yourself)
Academic papers	<p>○ Direct decompositions of groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval, International Journal of Algebra and Computation, Takamichi Sato (accepted).</p> <p>○ Geometric description of Schreier graphs of B-S groups, Scientiae Mathematicae Japonicae, 83 (2020) no. 3 191-209, Takamichi Sato.</p>
Lectures	<p>Direct decompositions of groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval, トポロジー火曜セミナー, June 15, 2021, Takamichi Sato.</p> <p>Direct decompositions of groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval, The 54th Spring Topology and Dynamical Systems Conference, May 14, 2021, Takamichi Sato.</p> <p>トンプソン群Fの固定部分群について, Thompson群とその周辺, March 30, 2021, Takamichi Sato.</p> <p>Isomorphism between the stabilizers of finite sets of numbers in the R. Thompson group F, 2020年度秋季総合分科会, September 24, 2020, Takamichi Sato.</p> <p>Isomorphism between the stabilizers of finite sets of numbers in the R. Thompson group F, RIMS 共同研究(公開型) Recent Developments in General Topology and its Related Fields, June 6, 2019, Takamichi Sato.</p> <p>Thompson群Fの固定部分群の間の同型性, 早稲田双曲幾何学的群論セミナー, April 26, 2019, Takamichi Sato.</p> <p>Schreier coset graphs of Baumslag-Solitar groups, RIMS 共同研究(公開型) Advances in General Topology and their Problems, June 20, 2018, Takamichi Sato.</p> <p>Schreier coset graphs of Baumslag-Solitar groups, The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, November 13, 2017, Takamichi Sato.</p> <p>Schreier graph と Baumslag-Solitar groups, 玉原トポロジー・幾何セミナー, August 1, 2017, Takamichi Sato.</p>
Others (unrefereed papers)	<p>Isomorphism between the stabilizers of finite sets of numbers in the R. Thompson group F, RIMS Kokyuroku 2151, 9-11, April, 2020, Takamichi Sato.</p> <p>Schreier coset graphs of Baumslag-Solitar groups, RIMS Kokyuroku 2110, 21-27, April, 2019, Takamichi Sato.</p> <p>Richard Thompson群Fとその性質, Waseda University, February, 2, 2016, Takamichi Sato (master thesis).</p>