

Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

博士論文概要
Doctoral Dissertation Synopsis

論文題目
Dissertation Title

Time-dependent Singularities in the Stokes Equations and the Navier-Stokes
Equations

Stokes方程式とNavier-Stokes方程式における動的特異点

申請者
(Applicant Name)
Fumitaka WAKABAYASHI
少林 文孝

Department of Pure and Applied Mathematics, Research on Functional Analysis and Non-linear
Partial Differential Equations

November, 2022

論文要旨

本学位請求論文は、境界が滑らかな n 次元有界領域における非圧縮性粘性流体の運動を記述する非定常 Stokes 方程式と非定常 Navier-Stokes 方程式を主対象とし、特に、時間経過により動く特異点の除去可能性に関する問題を考察する。

偏微分方程式における特異性の除去可能性について最も知られているのは、Laplace 方程式において解の特異性が Laplace 方程式の基本解よりも弱ければ、その特異点は除去可能であるというものである。特異点の除去可能性は発展方程式における問題が重要である。孤立特異点の場合は、熱方程式、定常 Navier-Stokes 方程式、非定常 Navier-Stokes 方程式など様々な結果が知られている。近年、動的特異点を持つ解の存在が知られるとその除去可能性について議論されるようになった。動的特異点の除去可能性とは動的特異点 $\xi(t)$ を除いた部分 $\bigcup_{0 < t < T} (\Omega \setminus \xi(t)) \times \{t\}$ で元の解 u と一致して全体領域 $\Omega \times (0, T)$ で滑らかな関数 \bar{u} が存在するかということである。熱方程式における研究は多数行われている一方で、Stokes 方程式や Navier-Stokes 方程式といった圧力項を伴う方程式における動的特異点の除去可能性は未解決の問題である。

本論文の最初の目的は、Stokes 方程式と Navier-Stokes 方程式において動的特異点が除去可能であるための十分条件を導出することである。また、その条件の最良性を示す為には、動的特異点を実際に持つ解を構成し特異性を調べることが不可欠である。本論文のもう一つの目的は Navier-Stokes 方程式において動的特異点を持つ解を構成することである。

本論文の構成

本学位論文は以下の 6 つの章から構成されている。

- 第 1 章 : Introduction
- 第 2 章 : Preliminaries
- 第 3 章 : Removable time-dependent singularities in the Stokes equations
- 第 4 章 : Removable time-dependent singularities in the Navier-Stokes equations
- 第 5 章 : Solutions with time-dependent singularities
- 第 6 章 : Appendix

以下、各章の概要を述べる。

第 1 章：序論

第 1 章では、導入として孤立特異点の除去可能性に関する先行研究の概観がなされる。熱方程式における Takahashi-Yanagida による結果を初めとして動的特異点の除去可能性や実際に動的特異点を持つ解に関する研究結果に触れながら圧力項を持つ方程式においては動的特異点の除去可能性の問題は未解決であることが述べられ、最後に各章の要約がなされる。

第 2 章：準備

第 2 章では、まず全空間 R^N と有界領域 Ω における空間が定義される。次に Takahashi-Yanagida により構成された切り落とし関数を導入し、Stokes 方程式や移流項を持つ Stokes 方程式における解の定義を行う。弱解は本論文において動的特異点の除去可能性を示す上で重要な役割を果たす。最後に Stokes 方程式と Navier-Stokes 方程式における強解の存在に関する諸結果が紹介される。

第 3 章：Stokes 方程式における動的特異点

第 3 章では、第 2 章の結果を用いることにより、Stokes 方程式における動的特異点の除去可能性が示される。まず解 u が仮定の条件の下、ある積分等式を満たす、即ち、Stokes 方程式の弱解である事を示す。動的特異点の周りで Takahashi-Yanagida の構成した切り落とし関数を用いて切り落としを行うため、試験関数の発散が 0 である条件が崩壊してしまう。これを回復させるために Bogovskii の補題を用いて補正項を構成し、切り落とし関数と同様の評価を得る事で示すことが可能である。更に、Duality method を用いて弱解の一意性を示す事で、第 2 章における Stokes 方程式の(滑らかな)強解の存在の結果から結論が得られる。

第 4 章：Navier-Stokes 方程式における動的特異点

第 4 章では、第 2 章の結果を用いることにより、Navier-Stokes 方程式における動的特異点の除去可能性が示される。Navier-Stokes 方程式を解 u を移流項の係数を持つ Stokes 方程式とみなし、第 3 章と同じ方法を用いる。第 3 章と異なる点は解 u の正則でない為、この移流項を持つ Stokes 方程式では解の存在や一意性を示すことが困難であることである。考える領域を動的特異点付近に設定する事で、解の特異性の仮定からスケール不変な空間 $L^\infty(0, T; L^{N, \infty}(B_r(\xi(t))))$ のノルムが小さく取れることが重要である。また、Duality method により弱解の一意性は別の移流項を持つ Stokes 方程式にお

ける解の存在に帰着される為、強解の存在を示すことが滑らかな弱解の存在と弱解の一意性の証明に繋がる。この結果は、Takahashi-Yanagida による熱方程式や第 3 章の結果の一般化となっている。

第 5 章：動的特異点を持つ解

第 5 章では、2 次元又は 3 次元の全空間における Navier-Stokes 方程式において実際に動的特異点及び、より高次元の動的特異集合を持つ解を構成する。第 2 章の結果の Lorentz-Besov 空間における解の存在定理において、外力に時間経過で曲線に沿って動くデルタ関数や時間経過で曲線に沿って動く球面上に台を持つ一重層ポテンシャルを用いることで特異解の存在が示される。

第 6 章：付録

第 6 章では、証明を省いていた第 3 章と第 4 章における Bogovskii の補題において、試験関数の発散が 0 である条件を回復させる為の補正項の表現が正しい事、即ち、少なくとも補正項の 1 つとして第 3 章と第 4 章で用いた形で表される物が存在することを証明する。

第 3 章における Stokes 方程式における動的特異点の除去可能性の結果は以下の公刊予定の論文に基づく。

・ Kozono, H., Ushikoshi, E., Wakabayashi, F., Removable time-dependent singularities of solutions to the Stokes equations, Journal of Differential Equations, published online January 2023, Volume 342, Pages 472-489.

DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.10.005>

List of research achievements for application of Doctor of Science, Waseda University

Full Name : 少林 文孝

seal or signature

Date Submitted(yyyy/mm/dd): 2022/12/15

種類別 (By Type)	題名、発表・発行掲載誌名、発表・発行年月、連名者（申請者含む） (theme, journal name, date & year of publication, name of authors inc. yourself)
a. 論文	<p>1. ○ Wakabayashi, F., The Keller-Segel system of parabolic-parabolic type in Morrey space, Journal of Differential Equations, published online November 2018, Volume 265, Issue 9, Pages 4661-4686.</p> <p>2. ○ Kozono, H., Ushikoshi, E., Wakabayashi, F., Removable time-dependent singularities of solutions to the Stokes equations, Journal of Differential Equations, published online January 2023, Volume 342, Pages 472-489.</p>
b. 総説	該当なし
c. 講演	<p>1. 少林文孝. The Keller-Segel system of parabolic-parabolic type in Morrey space, 日本数学会 2018年度秋季総合分科会, 岡山大学, 2018年9月.</p> <p>2. 少林文孝. Removability of moving singularities in the Stokes and Navier-Stokes equations, Waseda Workshop on Partial Differential Equations, 早稲田大学, 2019年12月.</p> <p>3. 少林文孝. Removability of time-dependent singularities in the Stokes equations, International Workshop on Multiphase Flows: Analysis, Modelling and Numerics, 早稲田大学(オンライン), 2020年12月.</p> <p>4. 少林文孝. Removability of time-dependent singularities in the Stokes equations, 第14回 若手のための偏微分方程式と数学解析(オンライン), 2021年2月.</p> <p>5. 小菌英雄・牛越恵理佳・少林文孝. Removability of time-dependent singularities in the Stokes equations, 日本数学会2021年度年会, 慶応義塾大学(オンライン), 2021年3月.</p> <p>6. 小菌英雄・牛越恵理佳・少林文孝. Removability of time-dependent singularities of the Navier-Stokes equations, 日本数学会2021年度秋季総合分科会, 千葉大学(オンライン), 2021年9月.</p> <p>7. 少林文孝. Removability of time-dependent singularities in the Navier-Stokes equations, 若手による流体力学の基礎方程式研究集会プログラム(オンライン), 2022年1月.</p>
d. 著書	該当なし
e. その他	該当なし