Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

博士論文審査報告書
Doctoral Dissertation Review Report

論　文　題　目
Dissertation Title

Time-dependent Singularities in the Stokes Equations and the Navier-Stokes Equations

Stokes方程式とNavier-Stokes方程式における動的特異点

申　請　者
(Applicant Name)
Fumitaka WAKABAYASHI

少林文孝

Department of Pure and Applied Mathematics　Research on Functional Analysis and Non-linear Partial Differential Equations

February, 2023

1．本論文の要旨

本論文の目的は，非定常 Stokes 及び Navier-Stokes 方程式における動的特異点の発現過程について調べることである．動的特異点の除去可能性とは，時間に依存する非柱状領域 $Q_T \equiv \bigcup_{0<t<T}(\Omega \setminus \{\xi(t)\}) \times \{t\}$ 上の滑らかな関数 u に対し，Q_T 上 で u と一致し，全体の柱状領域 $\Omega \times (0,T)$ で滑らかな関数が存在するか？という問題である．線形熱方程式に関しては，Takahashi-Yanagida による動的特異点の除去可能性の結果を基礎として，動的特異点を持つ解の構造やより高次元の動的特異集合における同様の問題など多くの結果が得られている．その一方で，圧力項を伴う連立方程式系において同様の研究はあまり進んでいない．本論文では，非圧縮性粘性流体の運動を記述する非定常 Stokes 方程式と Navier-Stokes 方程式における動的特異点が除去可能であるための十分条件を明らかにし，更に，Navier-Stokes 方程式について実際に 2 次元においては動的特異点を，3 次元においては動的特異集合を持つ解の存在を提示した．

2．本論文の構成と主要結果

本論文は 6 つの章から構成されている．第 1 章では, 導入として孤立特異点の除去可能性に関する先行研究の概観がなされる．熱方程式における Takahashi-Yanagida による結果を初めとして，動的特異点の除去可能性や実際に動的特異点を持つ解に関する研究結果に触れながら圧力項を持つ方程式においては動的特異点の除去可能性の問題は未解決であることが述べられ, 最後に各章の要約がなされる．

第 2 章では, まず全空間 $\mathbb{R}^n$ と有界領域 Ω における関数空間が幾つか定義される．次に Takahashi-Yanagida により構成された切り落とし関数を導入し, Stokes 方程式や移流項を持つ Stokes 方程式における弱解と強解の定義を行う．特に，移流項を持つ Stokes 方程式の弱解は本論文において動的特異点の除去可能性を示す上で重要な役割を果たす．最後に Stokes 方程式と Navier-Stokes 方程式における強解の存在に関する諸結果が紹介される．

第 3 章では, 第 2 章の結果を用いることにより, Stokes 方程式における動的特異点の除去可能性が示される．まず動的特異点 $\xi \in C^{\alpha}([0,T];\Omega)$ $(0 < \alpha \leq 1/2)$ に対して，解 u がその近傍で $|u(x,t)| = o(|x-\xi(t)|^{1/\alpha-n})$ のごとく振る舞うという仮定の下, ある積分等式を満たす, 即ち, 全体の柱状領域 $\Omega \times (0,T)$ において Stokes 方程式の弱解である事を示す．動的特異点の周りで Takahashi-Yanagida が構成した関数を用いて切り落としを行うため, 試験関数の発散が 0 であるという条件が崩壊してしまう．これを回復させるために Bogovskii の補題を用いて補正項を構成し，切り落とし関数と同様の評価を得る事で Stokes 方程式の弱形式に付随する積分等式を示すことが可能となる．更に, Duality method を用いて弱解の一意性を示す事で, 第 2 章における Stokes 方程式の (滑らかな) 強解の存在定理を用いて所望する結論が得られる．

第 4 章では, 第 2 章の結果を用いることにより, Navier-Stokes 方程式における動的特異点の除去可能性が示される．Navier-Stokes 方程式の解 u を移流項の係数に持つ Stokes 方程式の解とみなし, 第 3 章と同じ方法を用いる．第 3 章と著しく異なる点は，解 u が正則でない為, この u を移流項の係数とする摂動された Stokes 方程式に対する解の存在や一意性を示すことが困難であることである．考える領域を動的特異点 $\xi(t)$ の近傍に制限する事で，$r > 0$ を十分小さく選べば，解 u の特異性の仮定から，そのスケール不変な空間 $L^{\infty}(0,T;L^{n,\infty}(B_r(\xi(t))))$ におけるノルムもまた小さく取れることが重要である．また, Duality method により弱解の一意性は移流項を持つ Stokes 方程式における解の存在に帰着される為, これら二つの移流項を持つ Stokes 方程式を一般化した問題に対し，強解の存在を示すことが滑らかな弱解の存在と一意性の証明に繋がる．この結果は, Takahashi-Yanagida による熱方程式や第 3 章の結果の一般化となっている．

第 5 章では, 2 次元又は 3 次元の全空間における Navier-Stokes 方程式において実際に動的特異点及び, より高次元の動的特異集合を持つ解を構成する．第 2 章の結果の Lorentz-Besov 空間における解の存在定理において, 外力として 2 次元の場合は時間経過で曲線に沿って動くデルタ関数，3 次元の場合は時間経過で曲線に沿って中心が動く球面や半径が変動する球面上に台を持つ一重層

ポテンシャルを用いることで特異解の存在が示される．
第 6 章では, 証明を省いていた第 3 章と第 4 章における Bogovskii の補題において, 試験関数の発散が 0 である条件を回復させる為の補正項の表現が正しい事, 即ち, 少なくとも補正項の 1 つとして第 3 章と第 4 章で用いた形で表される関数族が存在することを証明する.
まとめとして，以下に主要結果の定理を述べる．

主要定理１． $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ領域とする．$\xi \in C^\alpha([0,T];\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \leq 1/2$ は $\{\xi(t); 0 \leq t \leq T\} \subset \Omega$ をみたす曲線とする． 初期データ a はある $1 < p < \infty$ に対して $a \in L^p_\sigma(\Omega)$ であるとする．u は非柱状領域 $Q_T \equiv \bigcup_{0<t<T}(\Omega \setminus \{\xi(t)\}) \times \{t\}$ における次の Stokes 方程式の滑らかな解とする．

$$
\text{(S)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = 0, \quad \text{div } u = 0 \quad \text{in } Q_T, \\ u|_{t=0} = a. \end{cases}
$$

もし

$$
u(x,t) = o(|x - \xi(t)|^{\frac{1}{\alpha} - n}) \quad \text{locally uniformly in } t \in (0,T) \quad \text{ as } x \to \xi(t)
$$

であれば，$x = \xi(t)$, $0 < t < T$ は u の除去可能特異点である．すなわち，ある $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega \times (0,T))$ が存在し，$u \equiv \tilde{u}$ かつ (S) を $\Omega \times (0,T)$ でみたす．

主要定理２． $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\xi \in C^\alpha([0,T];\mathbb{R}^n)$ 及び Q_T を主要定理 1 と同様とする．ただし，$1/n < \alpha \leq 1$ とする．初期データ a は

$$
a \in \begin{cases} L^{3,\infty}_\sigma(\Omega) \quad n = 3 \text{ のとき}, \\ (L^q_\sigma(\Omega)), D(A_q))_{1-1/s,s} \quad n \geq 4 \text{ のとき} \end{cases}
$$

とする．ただし，$2/s + n/q = 3$, $\max\{n/3, 2\} < r < n$ であり，A_q は $L^q_\sigma(\Omega)$ における Stokes 作用素を表す．u は Q_T における次の Navier-Stokes 方程式の滑らかな解とする．

$$
\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \quad \text{div } u = 0 \quad \text{in } Q_T, \\ u|_{t=0} = a. \end{cases}
$$

もし

$$
u(x,t) = o(|x - \xi(t)|^{\beta - n}) \quad \text{locally uniformly in } t \in (0,T) \quad \text{ as } x \to \xi(t)
$$

$\beta = \max\{1/\alpha, n-1\}$ であれば，$x = \xi(t)$, $0 < t < T$ は u の除去可能特異点である．

３．本論文に関連するこれまでの結果と問題の背景

孤立特異点の除去可能性として最も有名なのはラプラス方程式の解，即ち調和関数に対する定理であろう．調和関数に対しては，解の特異性がラプラス方程式の基本解よりも弱ければその特異点は除去可能であることが知られている．特異解の典型例である基本解が条件の臨界値となっていることから，これは最良の結果であると言える．一般的な楕円型偏微分方程式や熱方程式についても同様の結果が得られてるが，その証明は解 u の積分表示から各点の値や特異点における漸近挙動を詳細に調べたり，$|\nabla u|$ を部分積分によって評価したり，また熱方程式に関しては最大値原理を用いる方法など方程式自身の構造やそれに伴う解の一般的な性質を用いた様々な手法がある．しかしベクトル場の方程式である流体力学の基礎方程式においては，線形偏微分方程式の様に解の表現公式が存在せず，また最大値原理なども成り立たないため同様の手法が適用できない．そこで注目されるのが 3 次元非定常 Navier-Stokes 方程式における弱解の正則性に関する Kozono による手法である．証明の際には，切り落とし関数による問題の局所化，解 u 自身を移流項の係数に持つ Stokes 方程式との同一視，そして Stokes 方程式の L^p-正則性という 3 つの手法が用いられている．その際，スケール不変な $L^\infty(0,T;L^{3,\infty})$ ノルムが小さいという条件が鍵となるが，これは

線形摂動法では不可避な仮定となっている．Kim-Kozono による定常 Navier-Stokes 方程式における特異点の除去可能性の証明も，この手法から発想を得ている．
近年，藤田型方程式において動的特異点を持つ解の存在が発見されると，その性質や動的特異点の除去可能性について議論されるようになった．動的特異点の除去可能性に関する研究基盤を確立したのは Takahashi-Yanagida による熱方程式の結果であろう．彼らは孤立特異点の場合と同様に，ラプラス方程式の基本解より解の特異性が弱ければ，動的特異点が除去可能であることを示した．その要となるのは，動的特異点に沿って平行移動する切り落とし関数を実際に構成した事であろう．また，彼らは動的特異点を持つ解を構成し特異点における漸近挙動を明らかにすることで，得られた除去可能性定理の最良性も証明した．その後，非線形反応拡散方程式では特異解の分類や特異点の除去可能性，またより高次元の動的特異集合においても研究が進んでいる．その一方で，圧力項の扱いの困難さから Stokes 方程式や Navier-Stokes 方程式といった流体力学の基礎方程式に関しては，動的特異点の除去可能性についての結果が得られていなかった．

4．得られた結果の意義と新たな知見及び他への波及効果，結語

本論文では Stokes 方程式と Navier-Stokes 方程式において動的特異点が除去可能であるための十分条件を明らかにした．これは Takahashi-Yanagida による熱方程式における動的特異点の除去可能性の結果の一般化となっている．動的特異点の近傍で切り落としを行う際、試験関数の発散が 0 である条件が崩れるため，その際に重要な役割を果たす Bogovskii の補題における補正項を動的特異点に沿って平行移動するように構成を試みた．また，熱方程式においては L^1_{loc} に属する弱解は，実は領域全体で方程式を古典的な意味で満たすという有名な Weyl の補題がある一方で，流体力学の基礎方程式に関しては，それに類するものがない．そのため，まず第一に解 u がある積分等式を満たすこと，言い換えると，解 u がそれ自身を移流項の係数に持つ摂動 Stokes 方程式の弱解とみなせること，次に同方程式には滑らかな (弱) 解が存在すること，最後に同方程式の弱解は一意的であることを示すことによって証明を完結させた．この証明法は先の Kozono の手法を動的特異点に対して拡張したものであり, 圧力項を含むなど一般的なベクトル場の方程式に対する動的特異点の除去可能性の研究に適用され得る．今後は Navier-Stokes 方程式における動的特異点が除去可能であるための必要性，即ち動的特異点を持つ解の構造の研究やより高次元の動的特異集合の除去可能性にも展開が期待される．

以上の理由により，本論文は学位論文に十分に値すると言える．

2022 年 12 月

審査員

主査　早稲田大学教授　理学博士　北海道大学　小薗英雄

早稲田大学教授　理学博士　早稲田大学　田中和永

早稲田大学教授　博士（理学）　早稲田大学　久藤衡介

早稲田大学教授　理学博士　京都大学　小澤徹